

Aljabar Linear

SPL Homogen dan Non Homogen
serta Menyelesaikannya dengan
Eliminasi Gauss dan
Substitusi Mundur serta
Eliminasi Gauss Jordan

Netty J.M. Gella, M.Si



Tujuan Pembelajaran

Melalu pembelajaran, mahasiswa mampu

- a) Menjelaskan konsep sistem persamaan linear homogen dan non homogen
- b) Menghitung solusi sistem persamaan linear homogen dan non homogen menggunakan Eliminasi Gauss dan substitusi mundur serta eliminasi Gauss Jordan



SPL Homogen dan Non Homogen

Suatu **sistem persamaan linear** dikatakan **homogen** jika **semua konstantanya adalah nol**; yaitu jika sistem tersebut mempunyai bentuk


$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_{1n} = 0$$

$$a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \cdots + a_{2n}x_{2n} = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \cdots + a_{mn}x_{mn} = 0$$

Setiap persamaan linear homogen disebut **konsisten** karena semua solusi dari sistem ini adalah $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ dan disebut sebagai **solusi trivial (trivial solution)**. Namun, jika terdapat solusi lain maka solusi-solusi tersebut merupakan solusi nontrivial (nontrivial solution).

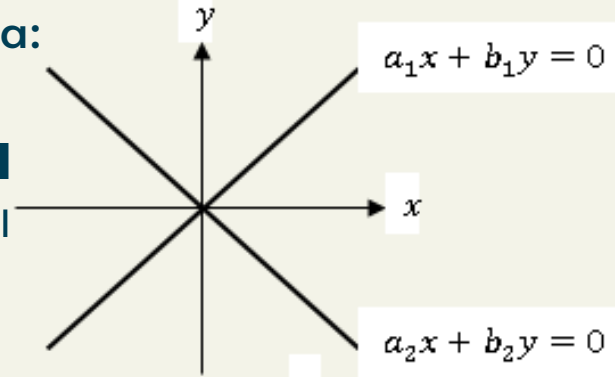


Lanjutan SPL Homogen...

Karena sistem linear homogen selalu mempunyai penyelesaian trivial, hanya ada dua kemungkinan penyelesaiannya:

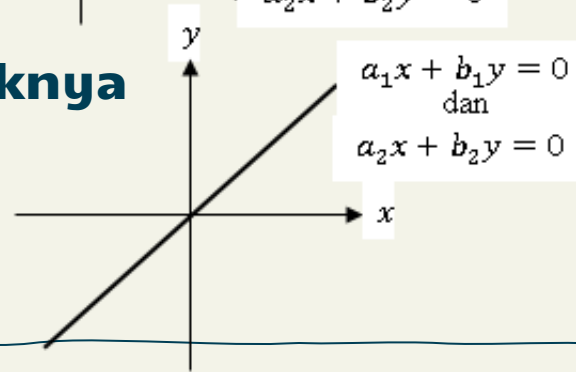
1. Hanya memiliki solusi trivial

Hanya satu penyelesaian trivial



2. Memiliki takterhingga banyaknya solusi selain solusi trivial

Tak hingga banyaknya penyelesaian



Catatan:

Sistem persamaan linear homogen dapat dipastikan memiliki solusi nontrivial jika sistem tersebut memperoleh lebih banyak variabel /faktor yang tidak diketahui dibandingkan dengan jumlah persamaan pada sistem tersebut

Eliminasi Gauss

Bentuk Eselon

Matriks dalam **bentuk eselon baris tereduksi** adalah matriks yang memenuhi **4 sifat dibawah ini**, yaitu:

- Jika baris tak seluruhnya nol, maka bilangan tak nol pertama dan setiap baris adalah 1 (1 utama).
- 1 utama pada baris yang lebih bawah terletak lebih kanan dari pada baris di atasnya.
- Bila terdapat baris nol maka letaknya pada baris bagian bawah matriks.
- Kolom yang memuat 1 utama hanya memuat nol di tempat lainnya.

Catatan: Matriks yang memiliki **3 sifat pertama di samping** disebut dalam **bentuk eselon baris**

Klasifikasikanlah bentuk matriks yang diperbesar di bawah ini yang merupakan berbentuk eselon baris dan eselon baris tereduksi?

01

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

02

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

03

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

04

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Klasifikasikanlah bentuk matriks yang diperbesar di bawah ini yang merupakan berbentuk eselon baris dan eselon baris tereduksi?



01

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk Eselon Baris

02

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bentuk Eselon Baris Tereduksi

03

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk Eselon Baris Tereduksi

04

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bentuk Eselon Baris



Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss mengubah persamaan linear (homogen/non homogen) menjadi bentuk matriks yang diperbesar, kemudian diubah ke bentuk Eselon Baris melalui Operasi Baris Elementer, sehingga sistem persamaan dapat diselesaikan dalam bentuk substitusi mundur.

Perhatikan Contoh SPL Pada Pertemuan Sebelumnya,...

Contoh:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0\end{aligned}$$

SPL

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks yang diperbesar

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Bentuk Eselon Baris

Eliminasi Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

x_1 x_2 x_3 NK

Dari bentuk eselon baris yang ada dapat langsung kita mencari solusi dari SPL yang diberikan dengan membuat SPL yang bersesuaian

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ x_2 - \frac{7}{2}x_3 &= -\frac{17}{2} \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

dengan substitusi mundur,

Karena $x_3 = 3$ maka $x_2 - \frac{7}{2}(3) = -\frac{17}{2} \Leftrightarrow x_2 - \frac{21}{2} = -\frac{17}{2} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{17}{2} + \frac{21}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Karena $x_3 = 3$ dan $x_2 = 2$ maka $x_1 + 2 + 2(3) = 9 \Leftrightarrow x_1 + 8 = 9 \Leftrightarrow x_1 = 9 - 8 = 1$

Jadi nilai $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ dan $x_3 = 3$

Eliminasi Gauss Jordan

- **Eliminasi Gauss-Jordan** merupakan prosedur pemecahan sistem persamaan linear (homogen atau non homogen) dengan mengubahnya menjadi **bentuk matriks eselon baris tereduksi** dengan metode operasi baris elementer.

Perhatikan Contoh SPL Pada Pertemuan Sebelumnya,...

Contoh:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0\end{aligned}$$

SPL



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks yang diperbesar



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Bentuk Eselon Baris tereduksi

Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss mengubah persamaan linear menjadi bentuk matriks yang diperbesar, kemudian diubah ke bentuk Eselon Baris melalui Operasi Baris Elementer, sehingga sistem persamaan dapat diselesaikan dalam bentuk substitusi mundur.

Perhatikan Contoh SPL Pada Pertemuan Sebelumnya,...

Contoh:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$$

$$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$$

SPL

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks yang diperbesar

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Bentuk Eselon Baris

Contoh:

Selesaikan SPL homogen berikut dengan eliminasi Gauss Jordan

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$

$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0$$

$$3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0$$

Penyelesaian

1. Sistem persamaan linear dinyatakan dalam bentuk matriks diperbesar

:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 2 & b_1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & b_2 \\ 2 & 2 & -3 & -3 & b_3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & b_4 \end{array} \right]$$



Contoh:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} b_1 + b_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} b_2 + 2b_1 \\ b_3 + (-2)b_1 \\ b_4 + (-3)b_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \frac{1}{7} b_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} b_3 + 9b_2 \\ b_4 + 5b_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} b_1 - 3b_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

SPL yang bersesuaian dengan matriks eselon baris tereduksi adalah

$$1. x_1 + 1. x_2 + 0. x_3 + 0. x_4 = 0$$

$$0. x_1 + 0. x_2 + 1. x_3 + 1. x_4 = 0$$

$$0. x_1 + 0. x_2 + 0. x_3 + 0. x_4 = 0$$

$$0. x_1 + 0. x_2 + 0. x_3 + 0. x_4 = 0$$

atau $x_1 + x_2 = 0$
 $x_3 + x_4 = 0$

atau $x_1 = -x_2$
 $x_3 = -x_4$

Karena x_2 dan x_4 bernilai sebarang bilangan riil maka keduanya dapat diganti dengan parameter, misalnya, $x_2 = t$ dan $x_4 = s$, sehingga penyelesaian SPL homogen tersebut ialah: $\{t \in R | x_1 = -t, x_2 = t, x_3 = -s, x_4 = s\}$.





Terima Kasih...

