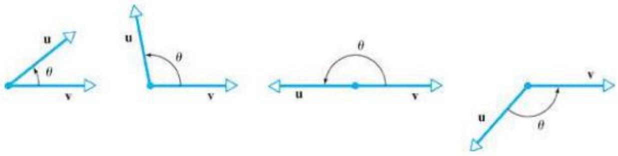
Hasil Kali, Proyeksi dan Hasil Kali Silang

Hasilkali Titik dari Vektor-vektor

Misalkan u dan v adalah dua vektor taknol pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3, dan asumsikan vektor-vektor ini ditempatkan sedemikian rupa sehingga titik awalnya berhimpitan. Mengenai *sudut antara u dan v* (*angle between u and v)* yang kita maksudkan adalah sudut θ ditentukan oleh u dan v di mana $0 \leq \theta \leq \pi$(Gambar 1).



Gambar 1. Sudut θ antara u dan v yang memenuhi $0 \leq \theta \leq \pi$

Definisi:

Jika u dan v adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3 dan θ adalah sudut antara u dan v, maka hasilkali titik (*dot product*) atau hasilkali dalam Euclidean (*Euclidean inner product*) $u \cdot v$ didefinisikan oleh

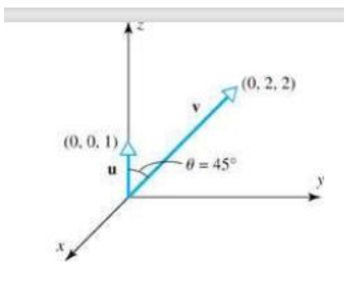
$$u \cdot v = \begin{cases} ||u|| \; ||v|| \cos\theta & Jika\ u \neq 0\ dan\ v \neq 0 \\ 0 & Jika\ u = 0\ dan\ v = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Contoh 1. Hasilkali Titik

Sebagaimana terlihat pada Gambar 2, sudut antara vektor-vektor $u = (0,0,1)$ dan $v = (0, 2, 2)$ adalah 45°. Maka,

$$u \cdot v = ||u|| \; ||v|| \cos\theta = \left(\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}\right)\left(\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}\right)\cos 45°$$

$$= 1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2$$



Gambar 2

Bentuk Komponen dari Hasilkali Titik

Misalkan $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ adalah dua vektor taknol. Jika θ adalah sudut antara u dan v sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 3, maka hukum cosinus menghasilkan

$$\left|\left|\overrightarrow{PQ}\right|\right| = ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u|| \; ||v|| \cos\theta$$

(2)

Karena $\overrightarrow{PQ} = v - u$, kita dapat menulis kembali (2) sebagai

$$||u|| \ ||v|| \cos\theta = \frac{1}{2}\left(||u||^2 + ||v||^2 - ||v-u||^2\right)$$

atau

$$u \cdot v = \frac{1}{2}\left(||u||^2 + ||v||^2 - ||v-u||^2\right)$$

Dengan mensubstitusi

$$||u||^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad ||v||^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

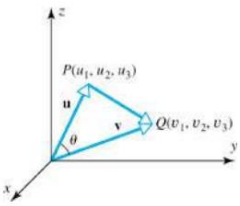
Dan

$$||v-u||^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

setelah disederhanakan, kita memperoleh

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \qquad (3)$$

Meski kita menurunkan persamaan ini dengan asumsi bahwa u dan v adalah taknol, rumus di atas juga berlaku jika u = 0 atau v = 0.



Gambar 3

Jika u = $(u_1 u_2)$ dan v = $(v_1 v_2)$ adalah dua vektor pada ruang berdimensi 2, maka rumus yang bersesuaian dengan (3) adalah

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 \qquad (4)$$

Menentukan Sudut antara Vektor-vektor

Jika u dan v adalah vektor-vektor taknol, maka Rumus (1) dapat ditulis sebagai

$$\cos\theta \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}|| \, ||\mathbf{v}||} \qquad (5)$$

Contoh 2. Hasil kali titik menggunakan persamaan 3

Perhatikan vektor-vektor u = (2, -1, 1) dan v = (1, 1, 2). Tentukan u·v dan sudut θ & antara u dan v.

Penyelesaian:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$$

Untuk vektor-vektor tersebut, kita memperoleh $||u|| = ||v|| = \sqrt{6}$, sehingga dari (5)

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

Jadi, θ= 60°

Contoh 3. Masalah Geometri

Tentukan sudut antara diagonal kubus dengan salah satu sisinya.

Penyelesaian:

Misalkan k adalah panjang suatu sisi pada sistem koordinat sebagaimana terlihat pada Gambar 4. Jika kita misalkan $u_1 = (k, 0, 0), u_2 = (0, k, 0)$, dan u_3 = (0, 0, k), maka vektor

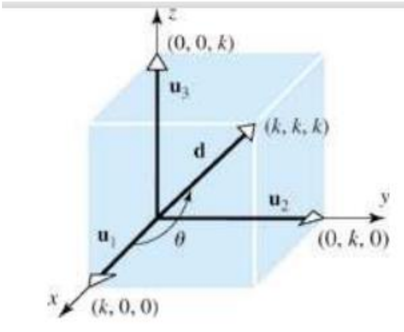
$$\mathbf{d} = (k, k, k) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

adalah diagonal dari kubus. Sudut θ antara d dan sisi u_1, memenuhi

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{d}}{\|\mathbf{u}_1\|\|\mathbf{d}\|} = \frac{k^2}{(k)(\sqrt{3k^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Jadi,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.74°$$



Gambar 4

Teorema:
Misalkan u dan v adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3.

a) $v \cdot v = ||v||^2$, yaitu $||v|| = (v \cdot v)^{1/2}$
b) Jika vektor-vektor u dan v adalah taknol dan θ adalah sudut di antaranya, maka

θ adalah lancip	Jika dan hanya jika	$u \cdot v > 0$
θ adalah tumpul	Jika dan hanya jika	$u \cdot v < 0$
$\theta = \pi/2$	Jika dan hanya jika	$u \cdot v = 0$

Contoh 4. Menentukan hasilkali titik dari komponen-komponen
Jika $u = (1, -2,3), v = (-3, 4, 2)$ dan $w = (3, 6, 3)$ maka

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (1)(-3) + (-2)(4) + (3)(2) = -5$$
$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = (-3)(3) + (4)(6) + (2)(3) = 21$$
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = (1)(3) + (-2)(6) + (3)(3) = 0$$

Sehingga, u dan v membentuk sudut tumpul, v dan w membentuk sudut lancip, dan u dan w membentuk sudut saling tegak lurus.

Vektor-vektor ortogonal

Vektor-vektor yang saling tegak lurus juga disebut sebagai vektor orthogonal. Dua vektor taknol adalah ortogonal jika dan hanya jika hasil kali titiknya adalah nol. Jika kita setuju untuk menganggap u dan v saling tegak lurus ketika salah satu atau keduanya adalah nol, maka kita dapat menyatakan tanpa pengecualian bahwa dua vektor u dan v ortogonal (tegak lurus) jika dan hanya jika $u \cdot v = 0$.

Teorema: sifat-sifat hasil kali titik

Jika u, v dan w adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 2 atau berdimensi 3 dan k adalah skalar, maka:

a) $u \cdot v = v \cdot u$
b) $\mathrm{u} \cdot (\mathrm{v} + \mathrm{w}) = \mathrm{u} \cdot \mathrm{v} + \mathrm{u} \cdot \mathrm{w}$
c) $k(u \cdot v) = (ku) \cdot v = u \cdot (kv)$
d) $v \cdot v > 0$ jika $v \neq 0, dan\ v \cdot v = 0$ jika $v = 0$

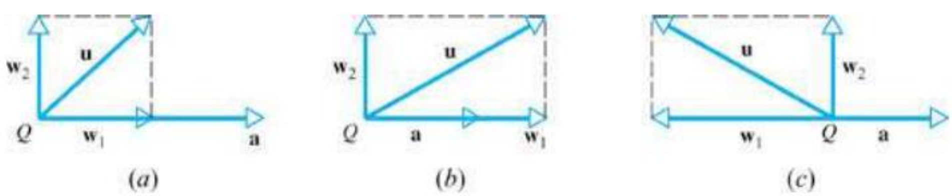
Proyeksi Ortogonal

Pada sejumlah aplikasi kita perlu "menguraikan" suatu vektor u menjadi jumlah dari dua vektor, di mana yang satu sejajar dengan suatu vektor taknol a tertentu, dan yang lainnya tegak lurus terhadap a. Jika u dan a ditempatkan sedemikian rupa sehingga titik-titik awalnya berhimpitan di titik Q. maka kita dapat menguraikanı vektor u dengan cara berikut (Gambar 5): Tariklah garis dari ujung u yang memotong tegak lurus a dan buatlah vektor w_1, dari Q hingga ke kaki dari garis tegak lurus tersebut. Kemudian hitunglah selisih dari

$$w_2 = u - w_1$$

Sebagaimana terlihat pada Gambar 5, vektor w_1, sejajar dengan a, vektor w_2, tegak lurus terhadap a, dan

$$\mathrm{w}_2 = \mathbf{u} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$$



Gambar 5. Vektor u adalah jumlah dari w_1, dan w_2, di mana w_1, sejajar dengan a dan w_2, tegak lurus terhadap a.

Vektor w_1, disebut sebagai proyeksi ortogonal *u* pada *a* (*orthogonal projection of u on a*) atau kadang-kadang disebut *komponen vektor u sepanjang a (vector component of u along a*). Ini dinotasikan sebagai

$$proj_a\, u$$

Vektor w_2 disebut komponen vektor u yang *ortogonal terhadap a* (*vector component of u orthogonal to a*). Karena $w_2 = u - w_1$ vektor ini dapat ditulis dengan menggunakan notasi (7) sebagai

$$w_2 = u - proj_a\, u$$

Teorema: Jika u dan a adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3 dan jika $a \neq 0$, maka $$proj_a\, u = \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a \;\; (komponen\ vektor\ u\ sepanjang\ a\ )$$ $$u - proj_a\, u = u - \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a \;\; (\text{komponen vektor u yang } ortogonal\ terhadap\ a\ )$$

Contoh 5. Komponen vektor u sepanjang a

Misalkan u = (2, -1, 3) dan a = (4, -1, 2). Carilah komponen vektor u sepanjang a dan komponen vektor u yang ortogonal terhadap a.

Penyelesaian:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$$
$$\|\mathbf{a}\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$$

Jadi, komponen vektor u sepanjang a adalah

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = \frac{15}{21}(4, -1, 2) = \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right)$$

dan komponen vektor u yang ortogonal terhadap a adalah

$$\mathbf{u} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = (2, -1, 3) - \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right) = \left(-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7}\right)$$

Rumus untuk panjang dari komponen vektor u sepanjang a dapat diperoleh dengan menulis

$$\begin{aligned} \|\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| &= \left\| \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} \right\| \\ &= \left| \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \right| \|\mathbf{a}\| \\ &= \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|^2} \|\mathbf{a}\| \end{aligned}$$

Yang menghasilkan

$$\|\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|}$$

Jika θ menyatauakn sudut antara u dan a, maka $u \cdot a = ||u||||a|| \cos\theta$ sehingga dapat juga ditulis sebagai

$$\|\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|\,|\cos\theta|$$

Gambar 6

Hasilkali Silang Vektor

Definisi
Jika $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1. v_2, v_3)$ adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, maka hasilkali silang (*cross product*) $u \times v$ adalah vektor yang didefinisikan sebagai

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

atau dalam notasi determinan

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right)$$

CATATAN. Untuk memperoleh komponen-komponen dari $u \times v$, Anda tidak perlu menghafalkan (Ib) tetapi hanya perlu melakukan langkah-langkah berikut:

- Bentuklah matriks 2×3 $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ yang baris pertamanya terdiri darikomponen-komponen u dan baris kedua terdiri dari komponen-komponen v.
- Untuk menghitung komponen pertama dari $u \times v$, hilangkan kolom pertama dan hitunglah determinannya; untuk menghitung komponen kedua, hilangkan kolom kedua dan hitunglah nilai negatif dari determinannya, dan untuk menghitung komponen ketiga, hilangkan kolom ketiga dan hitunglah determinannya.

Contoh 6. Menghitung hasilkali silang

Carilah $u \times v$, dimana $u = (1, 2, -2)$ dan $v = (3, 0, 1)$

Penyelesaian:

Baik dari (1) maupun dari catatan untuk membantu mengingat seperti di atas, kita memiliki

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\left(\begin{vmatrix}2 & -2\\0 & 1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & -2\\3 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{vmatrix}\right)$$
$$=(2, -7, -6)$$

Terdapat perbedaan penting antara hasilkali titik dan hasilkali silang dari dua vector. hasilkali titik adalah suatu skalar dan hasilkali silang adalah suatu vektor. Teorema berikut menjabarkan beberapa hubungan penting antara hasilkali titik dan hasilkali silang dan juga menunjukkan bahwa $u \times v$ adalah ortogonal, baik terhadap u maupun v.

Teorema 3. Hubungan antara Hasilkali Silang dan Hasilkali Titik

Jika u, v, dan w adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, maka:

a) $u \cdot (u \times v) = 0$ ($u \times v$ adalah ortogonal terhadap u)
b) $v \cdot (u \times v) = 0$ ($u \times v$ adalah ortogonal terhadap v)
c) $||u \times v||^2 = ||u||^2||v||^2 - (u - v)^v$ (identitas Lagrange)
d) $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$ (hubungan antara hasilkali titik dan hasilkali silang)
e) $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$ (hubungan antara hasilkali titik dan hasilkali silang)

Bukti (a). Misalkan $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1 . v_2, v_3)$ Maka

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (u_1, u_2, u_3)\cdot(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$
$$= u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) = 0$$

Bukti (b). Sama seperti (a).

Bukti (c). Karena

$$||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2$$

Dan

$$||\mathbf{u}||^2||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2$$

bukti ini dapat diselesaikan dengan "mengalikan" ruas kanan dari (2) dan (3) untuk membuktikan kesamaannya.

Contoh 7

Perhatikan vektor-vektor

$u = (1, 2, -2)$ dan $v = (3, 0, 1)$

Pada Contoh 1 telah ditunjukkan bahwa

$$u \times v = (2, -7, -6)$$

Karena

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (1)(2) + (2)(-7) + (-2)(-6) = 0$$

Dan

$$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (3)(2) + (0)(-7) + (1)(-6) = 0$$

Teorema. sifat-sifat hasil kali silang

Jika u, v, dan w adalah vector-vektor sembarang vektor pada ruang berdimensi 3 dan k adalah sembarang skalar, maka:

a) $u \times v = -(v \times u)$
b) $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$
c) $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$
d) $k(u \times v) = (ku) \times v = u \times (kv)$
e) $u \times 0 = 0 \times u = 0$
f) $u \times u = 0$

Contoh 8

Perhatikan vektor-vektor

$$i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)$$

Masing-masing vektor tersebut memiliki panjang 1 dan terletak sepanjang sumbu-sumbu koordinat (Gambar …). Vektor-vektor ini disebut *vektor satuan standar (standard unit vector)* pada ruang berdimensi 3. Setiap vektor $v = (v_1 . v_2, v_3)$ pada ruang berdimensi 3 dapat dinyatakan dalam bentuk i, j, dan k karena kita dapat menulis

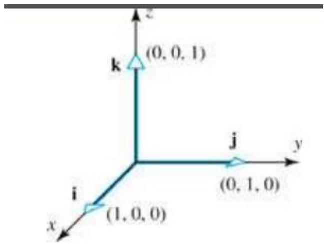
$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

Sebagai contoh,

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Dari (1b) kita memperoleh

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$

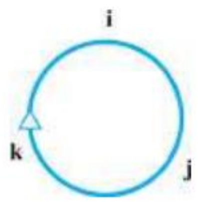


Gambar 7

Anda akan dengan mudah memperoleh hasil-hasil berikut:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{array}$$

Gambar 3.4.2 sangat membantu untuk mengingat hasil-hasil ini. Jika kita lihat diagram ini, hasilkali silang dari dua vektor dengan urutan searah jarum jam adalah vektor berikutnya dan hasilkali dari dua vektor dengan urutan berlawanan arah jarum jam adalah negatif dari vektor berikutnya.



Gambar 8

Bentuk Determinan dari Hasilkali Silang

Juga penting untuk dicatat bahwa hasilkali silang dapat diwakili dengan notasi dalam bentuk determinan 3 x 3:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

Sebagai contoh, jika u = (1, 2, -2) dan v = (3, 0, 1), maka

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\mathbf{i}-7\mathbf{j}-6\mathbf{k}$$

yang sesuai dengan hasil yang diperoleh pada Contoh 1.

Peringatan. Secara umum tidaklah benar bahwa $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w$. Sebagai contoh,

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{j})=\mathbf{i}\times 0=0$$

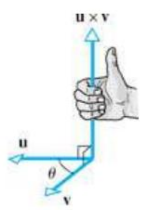
Dan

$$(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$$

Sehingga

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{j})\neq(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{j}$$

Kita telah mengetahui dari Teorema 3.4.1 bahwa $u \times v$ adalah ortogonal terhadap u dan v. Jika u dan v adalah vektor-vektor taknol, maka dapat ditunjukkan bahwa arah dari $u \times v$ dapat ditentukan dengan menggunakan "aturan tangan kanan (Gambar 3.4.3): Misalkan θ adalah sudut antara u dan v, dan misalkan u dirotasikan melewati sudut θ hingga berhimpitan dengan v. Jika jari-jari tangan kanan dikatupkan sehingga jari-jari tersebut menunjuk ke arah rotasi, maka ibu jari menunjukkan (kurang lebih) arah dari $u \times v$



Gambar 9

Anda dapat mencoba mempraktikkan aturan ini untuk menentukan hasilkali-hasilkali

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$

Interpretasi Geometrik dari Hasilkali Silang

Jika u dan v adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, maka Teorema $u \times v$ memiliki interpretasi geometrik yang penting. Identitas Lagrange pada Teorema 3.4.1 menyatakan bahwa

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$$

Jika θ menyatakan sudut antara u dan v, maka $u \cdot v = ||u||\ ||v|| \cos\theta$, sehingga (5) dapat ditulis kembali menjadi

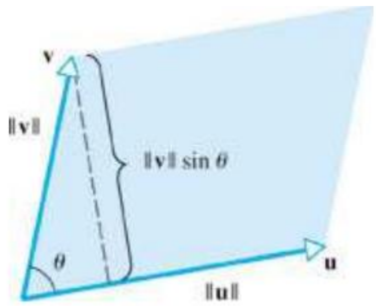
$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\cos^2\theta \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(1-\cos^2\theta) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

Karena $0 \le \theta \le \pi$, maka $\sin\theta > 0$, sehingga persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\sin\theta$$

Tetapi $||v|| \sin\theta$ adalah tinggi dari paralelogram (jajaran genjang) yang dibatasi oleh u dan v (Gambar 3.4.4). Jadi, dari (6), luas A dari paralelogram ini adalah

$$A = (\text{base})(\text{altitude}) = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\sin\theta = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$$



Gambar 10

Hasil ini bahkan benar jika u dan v berhimpit, karena jajar genjang yang dibatasi oleh u dan v mempunyai luas nol dan dari (6) diperoleh $u \times v = 0$ karena dalam kasus ini $\theta = 0$. Sehingga diperoleh teorema berikut.

Teorema. Luas Paralelogram (Jajaran Genjang) Jika u dan v adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, maka $\|\|u \times v\|\|$ sama dengan luas dari paralelogram yang dibatasi oleh u dan v.

Contoh 9

Tentukan luas segitiga yang dibatasi oleh titik P_1 $(2,2,0)$, P_2 $(-1,0,2)$, dan P_3 $(0,4,3)$.

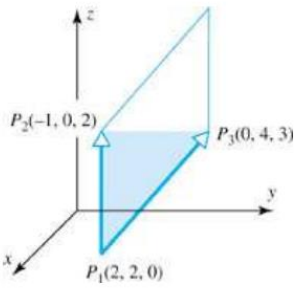
Penyelesaian:

Luas A dari segitiga adalah $\frac{1}{2}$ luas dari paralelogram yang dibatasi oleh vektor-vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ dan $\overrightarrow{P_1P_3}$ (Gambar 3.4.5). Dengan menggunakan metode yang dibahas pada Contoh 2 Subbab 3.1, $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3,-2,2)$ dan $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2,2,3)$. Selanjutnya

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-10, 5, -10)$$

dan sebagai konsekuensinya

$$A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \frac{1}{2}(15) = \frac{15}{2}$$



Gambar 11

Definisi
Jika u, v, dan w adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, maka $$u \cdot (v \times w)$$ disebut sebagai hasilkali tripel skalar (scalar triple product) dari u, v, dan w

Hasilkali tripel skalar dari $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$ dapat dihitung dari rumus

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Dari Rumus (4) diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\ &= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3 \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Contoh 10

Hitunglah hasilkali tripel skalar $u \cdot (v \times w)$ dari vektor-vektor

Penyelesaian

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 60 + 4 - 15 = 49$$

CATATAN, Penulisan notasi $(u \cdot v) \times w$ tidaklah masuk akal karena kita tidak dapat membentuk hasilkali silang dari suatu skalar dengan suatu vektor. Jadi tidak akan menimbulkan kebingungan jika kita menulis uvxw bukannya $u \cdot (v \times w)$ bukunya $u \cdot (v \times w)$. Namun demikian, agar lebih jelas kita biasanya tetap menggunakan tanda kurung.

Interpretasi Geometrik dari Determinan

Teorema

a) Nilai absolut dari determinan

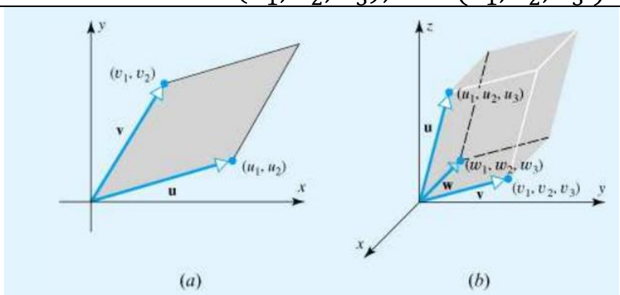
$$det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

sama dengan luas paralelogram pada ruang berdimensi 2 yang dibatasi oleh vektor-vektor $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$

b) Nilai absolut dari determinan

$$det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

sama dengan volume paralelepiped (balok genjang) pada ruang berdimensi 3 yang dibatasi oleh vektor-vektor $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3\ )$ dan $w = (w_1, w_2\ w_3)$



Gambar 12

Teorema

Jika vektor $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3\ )$ dan $w = (w_1, w_2\ w_3)$ mempunyai titik pangkal yang sama, maka vektor-vektor tersebut terletak pada bidang yang sama jika dan hanya jika

$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$