BAB 4

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFFERENSIAL BIASA

Metode Euler

Metode Euler adalah Metode hampiran paling sederhana untuk menyelesaikan masalah nilai awal:

$y'(t) = f(t, y(t)),$ $\qquad$ $y(t_0) = y_0$ ....(1)

Biasanya diasumsikan bahwa penyelesaian y(t) dicari pada interval terbatas yang diketahui $t_0 \leq t \leq b$.

Kita tidak akan secara eksplisit menari fungsi dapat dideferensialkan (diturunkan) yang memenuhi persamaan (1) melainkan menghitung sejumlah pasangan nilai (t_k, y_k) sebagai pendekatan fungsi penyelesaian tersebut yakni $[y(t]_k) \cong y_k$.
Pada metode ini interval yang deberikan dibagi menjadi n interval, masing-masing sepanjang h.

Misalkan kita hendak mencari penyelesaian numeric untuk persamaan (1) pada interval [a,b]. Misalkan $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ adalah suatu posisi pada [a,b] sedemikian sehingga :

$t_k = a + kh$ untuk k = 1,2,... , n

Misalkan $y_0 = y(a)$. Apabila $y(a)$ diketahui, maka kita dapat menghitung nilai $f(a, y_0)$.
Persamaan garis ini adalah $y = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0)$. Garis ini merupakan garis singgung kurva penyelesaian pada $t = a$.
Selanjutnya, tentukan titik pada garis ini yang memiliki absis t_1 . Ordinat ini adalah $y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0) = y_0 + hf(t_0, y_0)$.
Sekarang y_1 merupakan hampiran penyelesaian $y(t_1)$.

Algoritma (Metode Euler)

CONTOH :
Misalkan akn menghitung hampiran penyelesaian masalah nilai awal :
$y' = \frac{t - y}{2}$ $\quad pada\ [0,3] \quad dengan \quad y(0) = 1$

Masalah nilai awal ini mempunyai penyelesaian eksak $y = 3e^{-\frac{t}{2}} - 2 + t$

Berikut perintah-perintah dalam matlab dengan metode euler.

```
function [t,y]=euler4pdb(f,n,a,b,y0)
%fungsi euler4pdb.m (metode euler);
%menghitung hampiran penyelesaian masalah niai awal
%y'=f(t,y), y(0) = y0 pada [a,b]
%menggunakan n langkah dengan lebar langkah (b-a)/n
h = (b-a)/n;
t = [a]; y = [y0];
for k = 2:n+1,
    t = [t;a+(k-1)*h];
    y = [y;y(k-1)+h*f(t(k-1),y(k-1))];
end
```

Dalam command windows kita coba running

f=inline('(t-y)/2')   % fungsi ditulis di command windows dulu

f =

    Inline function:

    f(t,y) = (t-y)/2

>> [t1,y1]=euler4pdb(f,10,0,3,1);

>> ye1=3*exp(-t1/2)-2+t1;

>> [t2,y2]=euler4pdb(f,20,0,3,1);

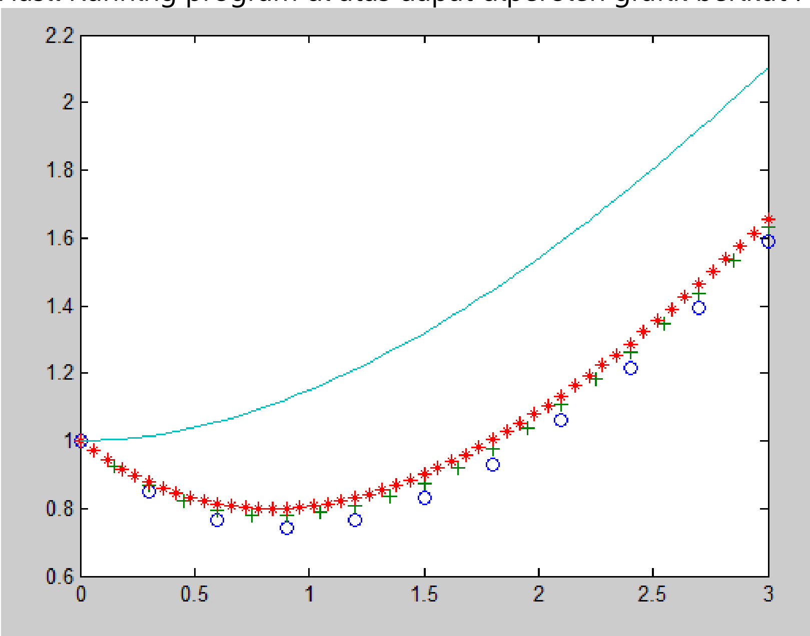
>> ye2=3*exp(-t2/2)-2+t2;

>> [t3,y3]=euler4pdb(f,50,0,3,1);

>> ye3=3*exp(-t3/3)-2+t3;

>> plot(t1,y1,'o',t2,y2,'+',t3,y3,'*',t3,ye3)

Hasil Running program di atas dapat diperoleh grafik berikut :



Gambar 1 : solusi ekasakdan 3 hampiran penyelesaian PD . $y' = \frac{t-y}{2}, \qquad y(0) = 1$

Berikut ini adalah perintah untuk menampilkan tabel perbandingan ketiga hampiran. Kolom pertama adalah nilai t_k kolom kedua nilai hampiran $y(t_k)$ dengan lebar langkah h = 0.3, kolom ketiga nilai hampiran $y(t_k)$ dengan lebar langkah 0.15, kolom keempat nilai hampiran $y(t_k)$ dengan lebar langkah h = 0.06, dan kolom terakhir adalah nilai eksaknya.

tabel=[t1 y1 y2(1:2:21) y3(1:5:51),ye3(1:5:51)]
tabel =

0	1.0000	1.0000	1.0000	4.0000
0.3000	0.8500	0.8669	0.8762	3.5821
0.6000	0.7675	0.7963	0.8123	3.2225
0.9000	0.7424	0.7792	0.7998	2.9129
1.2000	0.7660	0.8079	0.8314	2.6464
1.5000	0.8311	0.8757	0.9009	2.4171
1.8000	0.9314	0.9771	1.0030	2.2197
2.1000	1.0617	1.1072	1.1331	2.0498
2.4000	1.2175	1.2618	1.2871	1.9036
2.7000	1.3949	1.4373	1.4618	1.7777
3.0000	1.5906	1.6309	1.6542	1.6694

Tugas :

1. Gunakan metode Euler untuk mendapatkan hampiran penyelesaian masalah nilai awal :

$$y' = \frac{-y^2}{1 + x^{\square}}, \qquad y(0) = 1$$

Dengan lebar langkah h = 0.05.

2. Gunakan metode Euler untuk mendapatkan hampiran penyelesaian masalah nilai awal di bawah ini di sepuluh titk dengan lebar langkah (a). h = 0.1, (b). h = 0.01, (c). h = 0.001

$$y' = (1 - x)y^2 - y, \qquad y(0) = 1$$

Jelaskan bahwa solusi eksak PD adalah :

$$y = \frac{1}{e^x - x}$$

Gambar grafik solusi eksak tersebut bersama titik-titik hampiran yang Anda peroleh di a,b, dan c.

Metode Runge – Kutta

Pada Metode Euler nilai y_{k+1} dihitung dengan menggunakan y_k memakai rumus :

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

Metode ini disebut metode satu langkah karena informasi dari satu langkah sebelumnya digunakan untuk menghitung hampiran sekarang. Oleh karena itu galat di dalam metode

Euler adalah O(h), kita perlu memilih lebar langkah yang sangat kecil untuk mendapatkan keakuratan yang diinginkan. Galat di dalam metode Runge – Kutta jauh lebih kecil daripada galat Metode Euler.

Ide belakang Metode Runge - Kutta adalah menghitung nilai $f(t,y)$ pada beberapa titik di dekat kurva penyelesaian yang dipilih dengan metode tertentu di dalam interval $(t_k, t_k + h)$ dan mengombinasikan nilai-nlai ini sedemikian sehingga diperoleh keakuratan yang baik pada hampiran berikutnya, y_{k+1}.

a. Metode Runge-Kutta orde-dua (RK2) : Metode Heun

Algoritma (Metode Heun)

Menghitung hampiran penyelesaian masalah nilai awal $y' = f(t,y)$ dengan $y(t_0) = y_0$ pada $[t_0, b]$.

Input : $t_0, b, y_0, h,$ dan fungsi f

Output : $(t_k, y_k), k = 1,2,......., n$

Langkah-langkah :

1. hitung $n = (b - t_0)/h$
2. for k = 1,2,3,....., n

   Hitung $t_k = t_{k-1} + h$

   Hitung $S_1 = f(t_{k-1}, y_{k-1}),$

   Hitung $S_2 = f(t_k, y_{k-1} + h * S_1),$

   Hitung $y_k = y_{k-1} + \frac{h}{2}(S_1 + S_2)$
3. Selesai .

Pada metode ini y_{k+1} dihitung dengan menggunakan langkah – langkah sebagai berikut:

$$S_1 = f(t_k, y_k) \tag{1}$$

$$S_2 = f(t_k + h, y_k + hS_1) \tag{2}$$

$$y_{k+1} = y_k + h\frac{(S_1 + S_2)}{2} \tag{3}$$

untuk k = 0, 1, 2, ..., dengan (t_0, y_0) diktehui.

Pada perhitungan-perhitungan di atas, S_1 adalah gradient di titik (t_k, y_k), S_2 gardien di titik $(t_k + h, y_k + hS_1)$ dan rata-rata S_1 dan S_2 digunakan untuk menghitung hampiran selanjutnya y_{k+1}.

Aturan di atas diperoleh sebagai berikut:

Misalkan kita akan menyelesaikan masalah nilai awal :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \text{ pada } [a,b] \text{ dengan } y(t_0) = y_0$$

Jika titik (t_k, y_k) diketahui, maka titik solusi $\left(t_{k+1}, y_{k+1}\right)$ dapat diperoleh dengan mengintegralkan $y'(t)$ pada $[t_k, t_{k+1}]$,

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)dt = y(t_{k+1}) - y(t_k)$$

atau

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)dt$$

dengan menggunakan aturan trapezium dengan lebar langkah $h = t_{k+1} - t_k$ untuk menghitung hampiran suku integral, diperoleh hampiran :

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right]$$

suku kedua pada ruas kanan memuat nilai ruas kiri , y_{k+1}.

Kita dapat menggunakan Metode Euler untuk menaksir y_{k+1} pada ruas kanan, sehingga diperoleh Metode Heun :

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))\right]$$

Galat pada setiap langkah dalam Metode Heun (Atau Metode RK2) sama dengan galat aturan trapezium, yakni

$$y^n(\varepsilon_k)\frac{h^3}{12}$$

oleh karena itu, galat setelah n langkah pada Metode Heun menjadi :

$$\sum_{k=1}^{n} y^n(\varepsilon_k)\frac{h^3}{12} \approx \frac{t_n - t_0}{12h} y^n(\varepsilon)h^3 = O(h^2)$$

Dengan demikian kita peroleh bahwa galat pada setiap langkah (iterasi) dalam Metode Heun (RK2) adalah $O(h^3)$. Sedangakan galat yang terakumulasi pada akhir setiap lankah adalah $O(h^2)$.

Contoh :

Gunakan Metode Heun (RK2) untuk menyelesaikan masalah nilai awal :

$y' = (t - y)/2$ pada [0, 3] dengan y(0) = 1, dengan menggunakan lebar langkah

$h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, dan - \frac{1}{8}$

Penyelesaian :

Rumus Iterasi Heun untuk hampiran solusi PD tersebut adalah :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(\frac{t_k - y_k}{2} + \frac{t_{k+1} - y_k - h(t_k - y_k)/2}{2}\right), k = 0,1,2,........., \frac{3}{h} \, dengan \quad t_0 = 0, y_0 = 1$$

Penyelesaian eksak masalah nilai awal di atas adalah :

$y = e^{-t/2} + t - 2.$