



Nama : \_\_\_\_\_

Tanggal: \_\_\_\_\_

Tingkat: \_\_\_\_\_

**Pokok Bahasan/ Pembelajaran :**

**Sasaran Pembelajaran:**

Di akhir modul, mahasiswa dapat:

1. Memahami Sistem Persamaan Linear (SPL)
2. Menjelaskan Sistem Persamaan Linear (SPL)
3. Menyelesaikan soal tentang Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan cara Operasi Baris Elementer (OBE)

**Materi:**

Sistem Persamaan Linear (SPL)

**Referensi:**

1. Anton, Howard. (2000). Dasar-dasar Aljabar Linear Jilid 1 Edisi 7. Interaksara: Batam
2. Rainarli, E dan Dewi, K. E. (2011). *Diktat Perkuliahan Aljabar Linear dan Matriks Edisi 1*. Unikom: Bandung [Online]
3. Gozali, S. M. (2010). *Aljabar Linear*. UPI: Bandung [Online]

## A. TINJAUAN PENDAHULUAN

### Pendahuluan



Dalam kehidupan sehari-hari kita sering dihadapkan pada suatu masalah perhitungan yang melibatkan beberapa variable. Sebagai contoh, berapa harga minyak/liter jika yang diketahui harga/tong, atau berapa jumlah bahan bakar yang diperlukan untuk menempuh jarak tertentu, dan sebagainya. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan persamaan linear. Penyelesaian perhitungan menggunakan system persamaan linear bukan sesuatu yang baru. Sistem persamaan linear sudah digunakan sekitar 2000 SM pada masa Babylonian. Istilah “Sistem Persamaan Linear (*Linear Equation*)” muncul oleh seorang matematikawan Perancis bernama Rene Descartes.

Pada subbab ini, kalian akan mempelajari materi Sistem Persamaan Linear (SPL), meliputi:

- ❖ Bentuk Umum Sistem Persamaan Linear
- ❖ Matriks Augmented
- ❖ Operasi Baris Elementer (OBE)

## B. MATERI PEMBELAJARAN



### Konten/Isi

#### 1. Sistem Persamaan Linear (SPL)

##### **Definisi:**

Suatu sistem yang memiliki  $m$  persamaan dan  $n$  variabel (Bilangan yang tidak diketahui).

Sebuah sistem persamaan linear dengan  $m$  buah persamaan dan  $n$  variabel  $x_1, x_2, \dots, x_n$  memiliki bentuk umum:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Atau dalam bentuk matriks:

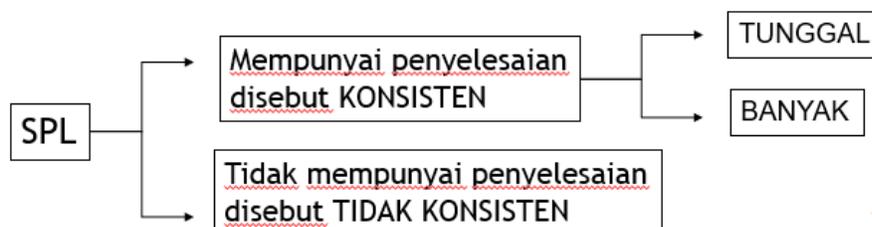
$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Atau dalam bentuk perkalian matriks  $Ax = B$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

dimana  $x_1, x_2, \dots, x_n$  variabel tak diketahui,  $a_{ij}, b_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$  bilangan diketahui.

SPL memiliki 2 jenis penyelesaian yaitu konsisten dan tidak konsisten.



Contoh: diketahui SPL

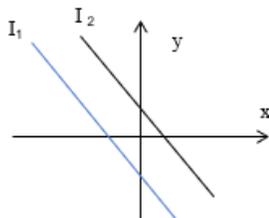
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= -2 \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \\ 5 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

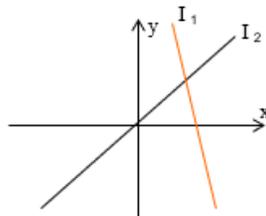
## ILUSTRASI GRAFIK

- SPL 2 persamaan 2 variabel:  $a_1x + b_1y = c_1$   
 $a_2x + b_2y = c_2$
- Masing-masing pers berupa garis lurus. Penyelesaiannya adalah titik potong kedua garis ini.



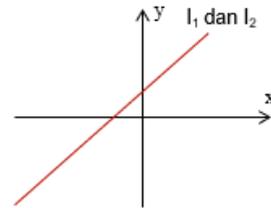
a). Tidak mempunyai penyelesaian

kedua garis sejajar



b). Mempunyai sifat penyelesaian

kedua garis berpotongan



c). Tak terhingga banyaknya solusi

kedua garis berhimpitan

### 2. Matriks *Augmented*

SPL dapat dinyatakan secara ringkas dalam bentuk matriks *augmented*

$$[A | \mathbf{b}] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Contoh: diketahui SPL

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= -2 \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 9 \\ 2 & -6 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

### 3. Operasi Baris Elementer (OBE)

Metode dasar untuk memecahkan sistem persamaan linear adalah untuk mengganti sistem yang diberikan dengan sistem baru yang mempunyai himpunan pemecahan yang sama dengan pemecahan yang lebih mudah. Sistem baru ini umumnya didapatkan dalam suatu tahapan dengan menerapkan ketiga tipe operasi untuk menghilangkan bilangan-bilangan tak-diketahui secara

sistematis. Operasi ini bersesuaian dengan operasi pada matriks yang diperbesar. Tiga operasi baris elementer terhadap matriks *augmented* yaitu:

- Kalikan sebuah baris dengan konstanta yang taksama dengan nol.
- Pertukarkan dua buah baris
- Tambahkan perkalian dari satu baris pada baris yang lainnya

Contoh: Selesaikan SPL berikut dengan menerapkan OBE pada matriks *augmented*

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$

$$4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

Penyelesaian:

- Ubahlah SPL ke dalam bentuk matriks *augmented*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Kalikan baris pertama dengan 1/2

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Tambahkan baris kedua dengan -4 kali baris pertama
- Tambahkan baris ketiga dengan 2 kali baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

- Kalikan baris kedua dengan -1/2

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

- Tambahkan baris ketiga dengan -6 kali baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix}$$

- Kalikan baris ketiga dengan -1/5

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Tambahkan baris kedua dengan -1/2 kali baris ketiga
- Tambahkan baris pertama dengan 1/2 kali baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Tambahkan baris pertama dengan  $-3/2$  kali baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi, pemecahan SPL tersebut adalah  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$

### C. MENGECEK PEMAHAMAN



Untuk meningkatkan pemahaman kalian tentang Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan Operasi Baris Elementer (OBE), saatnya latihan mandiri. Silakan kerjakan soal berikut!

#### SOAL LATIHAN

1. Ubahlah persamaan SPL berikut kedalam bentuk matriks *augmented*

$$3x_1 - 2x_2 = -1$$

a.  $4x_1 + 5x_2 = 3$

$$7x_1 + 3x_2 = 2$$

$$3x_1 + 2x_3 = 1$$

b.  $3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$

$$6x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1$$

c.  $3x_2 + x_3 - x_5 = 2$

$$x_3 + 7x_4 = 1$$

2. Tentukan penyelesaian SPL berikut dengan OBE!

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$