Nama :____ **Tanggal:** ________________

Tingkat: ____________

Pokok Bahasan/ Pembelajaran :
Sasaran Pembelajaran:
Di akhir modul, mahasiswa dapat:
1. Menjelaskan konsep matriks dan operasi matriks.
2. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan matriks dan operasi mtrik

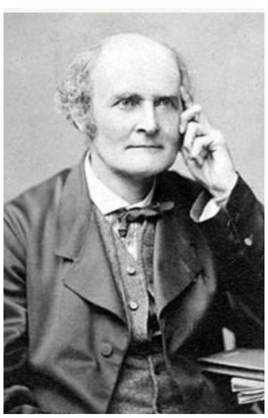
Materi:
Matriks

Referensi:

1. Anton, Howard. (2000). Dasar-dasar Aljabar Linear Jilid 1 Edisi 7. Interaksara: Batam
2. Rainarli, E dan Dewi, K. E. (2011). *Diktat Perkuliahan Aljabar Linear dan Matriks Edisi 1.* Unikom: Bandung [Online]
3. Gozali, S. M. (2010). *Aljabar Linear.* UPI: Bandung [Online]

A. TINJAUAN PENDAHULUAN

Pendahuluan



Gagasan matriks pertama kali diperkenalkan oleh Arthur Cayley (1821-1895) pada tahun 1859 di Inggris dalam sebuah studi system persamaan linear dan transformasi linear. Namun pada awalnya, matriks hanya dianggap sebagai permainan karena tidak bisa diaplikasikan. Baru pada tahun 1925 matriks digunakan pada mekanika kuantum. Selanjutnya matriks mengalami perkembangan yang pesat dan digunakan dalam berbagai bidang.

Dalam kehidupan sehari-hari, kta sering berhadapan dengan persoalan yang apabila kita telusuri ternyata merupakan masalah matematika. Untuk menyelesaikan masalah tersebut bis akita lakukan dengan mengubahnya ke dalam bahas atau persamaan matematika. Tetapi, terkadang kita mengalami kesulitan apabila persamaan tersebut memuat lebih dari dua persamaan atau variable. Matriks merupakan alata atau instrument yang cukup ampuh untuk memecahkan permasalan tersebut.

Pada subbab ini, kalian akan mempelajari materi matriks meliputi:

- Pengertian dan notasi matriks
- Macam-macam matriks
- Operasi matriks dan sifat-sifatnya
- Transpose matriks

B. MATERI PEMBELAJARAN

Konten/Isi

1. Pengertian dan Notasi Matriks

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan – bilangan dalam susunan itu disebut ***anggota*** dalam matriks tersebut. Matriks disusun dalam bentuk persegi panjang yang memuat elemen baris-baris dan kolom-kolom. Notasi yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \quad \text{Atau} \quad \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \quad \text{Atau} \quad \begin{Vmatrix} & \end{Vmatrix}$$

Nama matriks ditulis dengan huruf kapital seperti A, B, C, dll. Matriks yang mempunyai i baris dan j kolom ditulis A = (a_{ij}), artinya suatu matriks A yang elemen-elemennya a_{ij} dimana indeks i menyatakan baris ke i dan indeks j menyatakan kolom ke j dari elemen tersebut.

Secara umum :

Matriks A = (a_{ij}), i=1, 2, 3,… m dan j=1, 2, 3,… n yang berarti bahwa banyaknya baris m dan banyaknya kolom n disebut ukuran matriks atau **ordo matriks**.

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Contoh: $A = (-1 \quad -3)$ $\qquad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Keterangan: Ukuran matriks A adalah 1 x 2 dengan banyak baris 1 dan banyak kolom 2

Ukuran matriks B adalah 2 x 1 dengan banyak baris 2 dan banyak kolom 1

Ukuran matriks A adalah 2 x 3 dengan banyak baris 2 dan banyak kolom 3

Matriks yang hanya mempunyai satu baris disebut **matriks baris**, sedangkan matriks yang hanya mempunyai satu kolom disebut **matriks kolom**. Dua buah matriks A dan B dikatakan **sama** jika ukurannya sama (mxn) dan berlaku $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan j.

2. Macam-macam Matriks

Berikut ini diberikan macam-macam matriks selain matriks kolom dan matriks baris, diantaranya:

(i) **Matriks Nol** adalah matriks yang semua elemennya nol

Sifat-sifat:

1. A+0=A, jika ukuran matriks A = ukuran matriks 0
2. A*0=0, begitu juga 0*A=0.

(ii) **Matriks Bujursangkar** adalah matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama. Barisan elemen a_{11}, a_{22}, a_{33}, … a_{nn} disebut diagonal utama dari matriks bujursangkar A tersebut.

Contoh : Matriks berukuran 2x2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(iii) **Matriks Bujursangkar Istimewa**

a. Bila A dan B merupakan matriks-matriks bujursangkar sedemikian sehingga AB = BA maka A dan B disebut **COMMUTE** (saing).

b. Bila A dan B sedemikian sehingga AB = -BA maka A dan B disebut **ANTI COMMUTE.**

c. Mtriks M dimana M^{k+1} = M untuk k bilangan bulat positif disebut matriks **PERIODIK.**

d. Jika k bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga M^{k+1} = M maka M disebut **PERIODIK** dengan PERIODE k.

e. Jika k = 1 sehingga M^2 = M maka M disebut **IDEMPOTEN**.

f. Matriks A dimana A^p = 0 untuk p bilangan bulat positif disebut dengan matriks **NILPOTEN**.

g. Jika p bilangan positif bulat terkecil sedemikian hingga A^p = 0 maka A disebut **NILPOTEN** dari indeks p.

(iv) **Matriks Diagonal** adalah matriks bujursangkar yang semua elemen diluar diagonal utamanya nol.

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(v) **Matriks Satuan/Identity** adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonalnya adalah 1.

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(vi) **Matriks Skalar** adalah matriks diagonal yang semua elemennya sama tetapi bukan nol atau satu

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(vii) **Matriks Segitiga Atas *(Upper Triangular*)** adalah matriks bujursangkar yang semua elemen yang berada di bawah diagonal utama adalah 0

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(viii) **Matriks Segitiga Bawag (Lower Triangular)** adalah matriks bujursangkar yang semua elemen yang berada di atas diagonal utama adalah 0

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ix) **Matriks Simetris** adalah matriks bujursangkar yang elemennya simetris secara diagonal. Dapat juga dikatakan bahwa matriks simetris adalah matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri.

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(x) **Matriks Antisimetris** adalah matriks yang trnsposenya adalah negatif dari matriks tersebut. Maka $A^T = -A$ dan $a_{ij} = -a_{ij}$, elemen diagonal utamanya = 0

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Operasi Matriks dan Sifat-sifatnya

a) Penjumlahan Matriks

Penjumlahan matriks hanya dapat dilakukan terhadap matriks-matriks yang mempunyai ukuran (orde) yang sama. Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ adalah matriks-matriks berukuran sama, maka A+B adalah suatu matriks $C=(c_{ij})$ dimana $(c_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$ atau [A]+[B] = [C] mempunyai ukuran yang sama dan elemennya $(c_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$.

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{maka}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0 & 1+2 \\ 4+1 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A+C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A+C tidak terdefinisi (tidak dapat dicari hasilnya) karena matriks A dan B mempunyai ukuran yang tidak sama.

b) Pengurangan Matriks

Sama seperti pada penjumlahan matriks, pengurangan matriks hanya dapat dilakukan pada matriks-matriks yang mempunyai ukuran yang sama. Jika ukurannya berlainan maka matriks hasil tidak terdefinisikan.

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{maka}$$

$$A\text{-}B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\text{-}0 & 4\text{-}2 \\ 4\text{-}3 & 5\text{-}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Perkalian Matriks dengan Skalar

Jika k adalah suatu bilangan skalar dan A=(a_{ij}) maka matriks kA=(ka_{ij}) yaitu suatu matriks kA yang diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan k. Mengalikan matriks dengan skalar dapat dituliskan di depan atau dibelakang matriks. Misalnya [C]=k[A]=[A]k dan (c_{ij}) = (ka_{ij}).

Contoh:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{maka } 2A=\begin{pmatrix} 2*1 & 2*2 & 2*3 \\ 2*0 & 2*\text{-}1 & 2*5 \end{pmatrix}$$

Pada perkalian skalar berlaku hukum distributif dimana k(A+B) = kA+kB.

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{dengan } k = 2\text{, maka}$$

k(A+B) = 2(A+B) = 2A+2B

$$2(A+B) = 2\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2A+2B = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Perkalian Matriks dengan Matriks

Beberapa hal yang perlu diperhatikan :

(i) Perkalian matriks dengan matriks umumnya tidak komutatif.

(ii) Syarat perkalian adalah jumlah banyaknya kolom pertama matriks sama dengan jumlah banyaknya baris matriks kedua.

(iii) Jika matriks A berukuran mxp dan matriks pxn maka perkalian A*B adalah suatu matriks C=(c_{ij}) berukuran mxn dimana
$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{ip}b_{pj}$

Contoh:

1) Misalkan $A = (3 \quad 2 \quad 1)$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ maka

$$A \times B = (3 \quad 2 \quad 1) * \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = [(3*3) + (2*1) + (1*0)] = (11)$$

2) Misalkan $a = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ maka

$$A \times B = \begin{pmatrix} (3*3) + (2*1) + (1*0) \\ (1*3) + (2*1) + (1*0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Beberapa Hukum Perkalian Matriks :

1) Hukum Distributif, A*(B+C) = AB + AC
2) Hukum Assosiatif, A*(B*C) = (A*B)*C
3) Tidak Komutatif, $A*B \neq B*A$
4) Jika A*B = 0, maka beberapa kemungkinan
   (i) A=0 dan B=0
   (ii) A=0 atau B=0
   (iii) $A\neq0$ dan $B\neq0$
5) Bila A*B = A*C, belum tentu B = C

e) Transpose Matriks

Jika diketahui suatu matriks $A=a_{ij}$ berukuran mxn maka transpose dari A adalah matriks A^T =n x m yang didapat dari A dengan menuliskan baris ke-i dari A sebagai kolom ke-i dari A^T.

Beberapa Sifat Matriks Transpose:

(i) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(ii) $(A^T) = A$

(iii) $k(A^T) = (kA)^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

C. MENGECEK PEMAHAMAN

Untuk meningkatkan pemahaman kalian tentang Matriks dan Operasinya, saatnya latihan mandiri. Silakan kerjakan soal berikut!

SOAL LATIHAN

1. Diketahui matriks P = $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 9 & 7 & 11 \\ 11 & 5 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

   a. Berapakah ordo matriks P?
   b. Tentukan elemen yang ada pada baris 1, baris 2, baris 3 kolom 4, kolom 5 baris 1 ?
   c. Tentukan P_{11}, P_{31}, P_{23}, P_{15}, P_{35} ?

2. Diketahui persamaan matriks sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & x_1 & 6 \\ -1 & 2 & x_2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3+1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & \frac{1}{2x_4} \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Carilah x_1 , x_2 , x_3 , x_4

3. Misalkan (mxn) menyatakan ukuran matriks. Cari hasil perkalian (kalau terdefinisi) dari ukuran-ukuran berikut.
   a. (2x1)(1x3)   c. (3x3)(3x4)
   b. (2x2)(3x2)   d. (4x5)(2x3)
4. Carilah AB dan BA jika
   a. A= $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
   b. A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$
5. Diketahui

   A= $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

   Tentukan:
   a. 2A, 3B, 2A-B, 3B-A
   b. (2A-B)(3B-A)
6. Selidikilah bahwa AB≠BA untuk A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Carilah $3A^2+2A-3I^2$, jika A=

8. Carilah A^T jika A

a. $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

9. Tunjukan bahwa matriks A idempoten jika A= $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

10. Periksalah apakah matriks A dan B berikut ekuivalen

a. A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b. A = $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$