Nama :____ **Tanggal:** ________________

Tingkat: ____________

Pokok Bahasan/ Pembelajaran :

Sasaran Pembelajaran:

Di akhir modul, mahasiswa dapat:

1. Memahami Ruang Vektor Real
2. Menjelaskan Sub Ruang
3. Menyelesaikan soal tentang Ruang Vektor Real dan Sub Ruang

Materi:

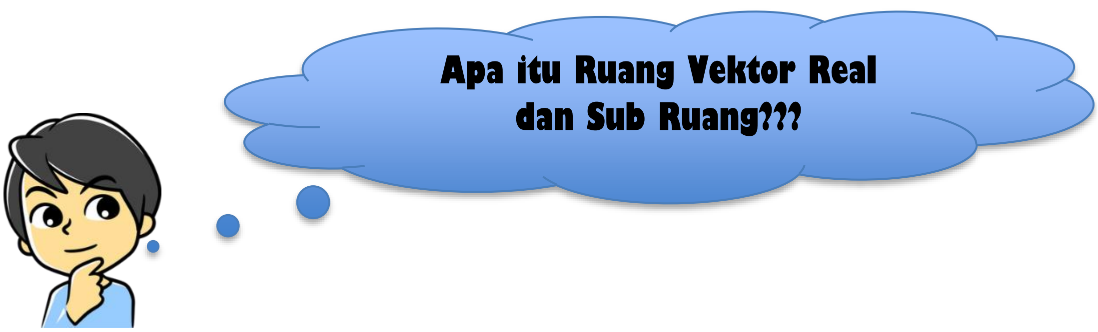
Ruang Vektor Real dan Sub Ruang

Referensi:

1. Anton, Howard. (2000). Dasar-dasar Aljabar Linear Jilid 1 Edisi 7. Interaksara: Batam
2. Rainarli, E dan Dewi, K. E. (2011). *Diktat Perkuliahan Aljabar Linear dan Matriks Edisi 1*. Unikom: Bandung [Online]
3. Gozali, S. M. (2010). *Aljabar Linear*. UPI: Bandung [Online]

A. TINJAUAN PENDAHULUAN

Pendahuluan



Ruang vektor adalah konsep dalam aljabar linear yang sangat penting dalam matematika, fisika, dan teknik. Dalam ruang vektor, kita bekerja dengan objek-objek yang disebut vektor dan mengoperasikannya menggunakan penjumlahan dan perkalian skalar. Jika skalar yang digunakan adalah bilangan real, maka kita memiliki **ruang vektor real**..

Pada subbab ini, kalian akan mempelajari materi Ruang Vektor Real dan Sub Ruang, meliputi:

- ❖ Definisi Ruang Vektor Real
- ❖ Teorema-Teorema Terkait Ruang Vektor Real
- ❖ Definisi Sub Ruang
- ❖ Teorema-Teorema Terkait Sub Ruang

B. MATERI PEMBELAJARAN

Konten/Isi

1. Ruang Vektor Real

Definisi. Himpunan tak kosong V dengan operasi + dan perkalian dengan skalar disebut **ruang vektor** (**linear**) **real**, bila untuk setiap $u, v, w \in V$ dan $\alpha, \beta \in R$ berlaku sifat-sifat berikut.

1) $u + v \in V$	Tertutup (terhadap +)
2) $u + v = v + u$	Komutatif
3) $u + (v + w) = (u + v) + w$	Asosiatif
4) $\exists 0 \in V \ni u + 0 = u$	Kewujudan vektor nol
5) $\exists -u \in V \ni -u + u = 0$	Kewujudan invers
6) $\alpha u \in V$	Tertutup terhadap perkaliandengan skalar
7) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$	
8) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$	Distributif
9) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$	
10) $1u = u$	

Contoh Soal dan Pembahasan

Contoh 1 Misalkan $R^n = RxRxRx...xR$ (n kali) yakni himpunan pasangan terurut n bilangan real dan $a \in R^n, a = (a_1, a_2, a_3, ..a_n), a_i \in R, i = 1, 2, 3, ..., n$.

Dengan menggunakan pengertian penjumlahan, perkalian dengan skalar dan kesamaan vektor seperti pada R^3 , yakni:

(i) $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

(ii) $\alpha a = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$

(iii) $a = b, a_i = b_i, i = 1, 2, 3$.

dan sifat-sifat bilangan real dapat dibuktikan, bahwa sifat 1 sampai dengan 10 berlaku untuk R^n . Misalnya untuk sifat-sifat berikut:

(1) $a + b \in R^n$ karena $a_i + b_i \in R$,

(2) $a + b = b + a$ karena $a_i + b_i = b_i + a_i$,

(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$ karena $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$

$\forall i = 1, 2, 3, ..., n$

Sifat-sifat lainnya dapat Anda buktikan sendiri.

Contoh 2 Misalkan $V = M_{mn}$ himpunan matriks real $m\,x\,n$. Lihat lagi sifat-sifat penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar pada modul sebelumnya dan periksalah sifat 1 sampai dengan 10. Akan ternyata bahwa semua sifat itu dipenuhi, misalnya jika A matriks $m\,x\,n$ maka αA juga matriks $m\,x\,n$, bila A dan B matriks $m\,x\,n$ *maka* $A + B$ juga matriks $m\,x\,n$ dan seterusnya. Jadi himpunan matriks real $m\,x\,n$ adalah ruang vektor real.

Contoh 3 Misalkan $V = \{(x, y, z, u),, x \in R, y \geq 0, z \in R, u \in R\}$ bukan ruang vektor karena sifat 6 tidak dipenuhi karena untuk $a = (0,1,0,0) \in V$, dan $\alpha = -1$, $\alpha a = -1a = -1(0,1,0,0) = (0,-1,0,0) \notin V$ karena $y_a = -1 < 0$

,

> **Teorema 1** Dalam ruang vektor real :
> a) ada tepat satu vektor nol,
>
> b) setiap vektor mempunyai tepat satu vektor invers.

<u>Bukti:</u>

a) Sifat (4) menyatakan ada sekurangnya satu vektor nol. Sekarang tinggal menunjukkan bahwa tak mungkin ada lebih dari satu vektor nol. Andaikan ada 2 vektor nol: 0_1 dan 0_2 maka $0_1 + 0_2 = 0_1$, dan $0_2 + 0_1 = 0_2$. Karena sifat komutatif (sifat 2) maka $0_1 = 0_2$. Jadi, ada tepat satu vektor nol.

b) Sifat (5) menyatakan untuk tiap vektor **a** ada sekurangnya satu vektor in-vers. Andaikan ada dua vektor invers $-a_1$ dan $-a_2$ maka $a + (-a_1) = a + (-a_2) = 0$.

   Selanjutnya,

   $\{(-a_2) + a\} + (-a_1) = \{a + (-a_2)\} + (-a_1) = 0 + (-a_1) = -a_1$ (sifat Komunitatif)

   Dan $-a_2 + \{a + (-a_1)\} = -a_2 + 0 = -a_2$

   Sifat asosiatif $\{(-a_2) + a\} + (-a_1) = -a_2 + \{a + (-a_1)\}$ mengakibatkan $-a_1 = -a_2$

> **Teorema 2** $\forall u, v \in V$ (V adalah ruang vektor), $\alpha, \beta \in R$, maka berlaku :
>
> a. $0u = 0$
>
> b. $k0 = 0$
>
> c. $(-1)u = -u$,
>
> d. Jika $ku = 0$, maka sekurang kurangnya salah satu $k = 0$ atau $u = 0$
>
> e. Jika $\alpha u = \alpha v$, dan $\alpha \neq 0$ maka $u = v$
>
> f. Jika $\alpha u = \beta u$ dan $u \neq 0$ maka $\alpha = \beta$
>
> g. $-(u + v) = (-u) + (-V) = -u - v$
>
> h. $u + u = 2u, u + u + u = 3u$ pada umumnya $\sum_{i=1}^{n} u_i = nu$

Bukti Sebagai Latihan

Contoh 4 Jika pada sistem aksioma untuk ruang vektor aksioma 5 (sifat 5) diganti dengan 5a) : $\forall u \in V$ berlaku $u+(-1)u=0$ dan aksioma 10 diganti dengan 10 a): $0u=0$ buktikan $1u=u$

Bukti **:**

$1u+(-1)u=\{1+(-1)\}u=0u$ (sifat 9). Sedangkan menurut 10 a) $0u=0$**.** Jadi $1u$ adalah invers dari $(-1)u$**.** Aksioma 5a) menyatakan bahwa u juga invers dari $(-1)u$**.** Dengan aksioma-aksioma yang lain perubahan 2 aksioma ini masih memberlakukan ketunggalan invers. (Dalil 1b). Oleh karena itu, $1u=u$ terbukti.

Sekarang kita pandang sifat 1 dan sifat 6:

i) Bila 1 dan 6 berlaku: 1) $u+v\in V$ dan 2) $\alpha u\in V$, $\forall\alpha\in R$ bila $u\in V$. Jika $u,v\in V$ dan $\alpha,\beta\in R$ maka menurut sifat 6: $\alpha u,\beta v\in V$,sedangkan menurut sifat 1 : $\alpha u+\beta v\in V$.

ii) Selanjutnya Andaikan berlaku $\alpha u+\beta v\in V$; $\forall\alpha\in R$ bila $u,v\in V$ Sifat 1 adalah hal khusus dari sifat ini: yakni kasus $\alpha=1$ dan $\beta=1$. Sifat 2 adalah kasus $\alpha=1$ dan $\beta=0$ .Selanjutnya jika 1 dan 6 berlaku akan ditunjukkan untuk *N* asli berlaku

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i \in V$$

iii) Bila $u_i\in V$ dan $\alpha_i\in R \forall i=1,2,3,...,n$

Kita buktikan dengan induksi matematik (induksi lengkap):

a. $n=1:\alpha_1 u_1\in V$ karena $\alpha_1\in R$ dan $u_1\in V$ (sifat 6) .

b. Jika $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i\in V$ akan ditunjukkan $\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i u_i\in V$

c. Diperhatikan $\alpha_{k+1}u_{K+1}\in V$ karena $\alpha_{k+1}\in R$ dan $u_{k+1}\in V$ makan

$$\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i u_i=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i(\in V)+\alpha_{k+1}u_{k+1}(\in V)$$

Jadi, berlakunya sifat 1 dan sifat 6 ekivalen dengan berlakunya sifat $\alpha u+\beta v\in V$; $\alpha,\beta\in R$ bila $u,v\in V$ dan ekivalen pula dengan sifat:

Untuk tiapn asli $\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i u_i\in V$ bila $u_i\in V$ dan $\alpha_i\in R\forall i=1,2,3,...,n$

2. SUB RUANG

Pada umumnya jika *V* ruang vektor, dengan penjumlahan dan perkalian dengan skalar untuk *V*, himpunan bagian $W\subset V$ dapat merupakan ruang vektor atau tidak. Karena sifat 2 sampai dengan 5 dan sifat 7 sampai dengan 10 dipenuhi dengan sendirinya oleh $W \subset V$ (diwariskan oleh V). Supaya W merupakan ruang vektor yang menjadi masalah adalah apakah sifat 1 dan 6 dipenuhi pula.

Bahwa sifat ini ekivalen dengan sifat:

$\alpha u + \beta v \in V$; $\forall \alpha, \beta \in R$ bila $u, v \in V$, (sifat #: ketertutupan terhadap kombinasi linear) sudah dibuktikan sebelum ini. Dengan demikian, kita telah mengukuhkan/membuktikan dalil berikut:

Teorema 3 Untuk himpunan V dengan penjumlahan tiap dua unsur dan perkalian unsur dengan skalar berlaku: sifat 1 dan 6 berlaku jika dan hanya jika $\alpha u + \beta v \in V$, $\forall \alpha, \beta \in R$ bila $u, v \in V$ (sifat # berlaku).

Jadi bila himpunan bagian W dari suatu ruang vektor V memenuhi sifat 1dan 6 (atau sifat #) maka W juga merupakan ruang vektor. Dalam hal ini dikatakan W adalah **ruang bagian** dari V.

Definisi 2: Himpunan bagian tak hampa W dari ruang vektor V disebut ruang bagian (ruang bagian linear) dari V bila W merupakan ruang vektor dengan penjumlahan dan perkalian skalar untuk V.

Untuk jelasnya pelajari contoh berikut.

Contoh 5

Bila $V = R^n$, periksa apakah himpunan bagian dari V berikut merupakanruang bagian atau bukan

I. $W_1 = \{(x_1, x_2, ..., x_n), x_1 + x_2 = 1\}$

II. $W_2 = \{(x_1, x_2, ..., x_n), x_1 - 2x_2 = 0\}$

III. $W_3 = \{0 = (0, 0, ..., 0)\}$

Penyelesaian :

a. (a) W_1 tidak memenuhi 1 karena : Ambil $v \in W_1$ maka $v_1 + v_2 = 1$,

$w \in W$, $w_1 + w_2 = 1$. Untuk $v + w$ berlaku:

$v + w(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) = (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) = 1 + 1 = 2 \neq 1. v + w \notin W_1$ tak dipenuhi.

W_1 bukan ruang vektor, jadi bukan ruang bagian dari V, atau

b) W_1 tidak memenuhi untuk 2 karena: Ambil $\alpha = 2$, $\alpha v \notin W$ karena $\alpha v_1 + \alpha v_2 = \alpha(v_1 + v_2) = 2 \neq 1$. Sifat 6 tak dipenuhi. Jadi W_1 bukan ruangvektor.

b. W_2 memenuhi 1 dan 6 karena: Bukti Sifat 1 diambil $v \in W_2$ **,** $v_1 - 2v_2 = 0$. $w \in W$ **,** $w_1 - 2w_2 = 0$. $v + w \in W_2$ **,** karena: $(v_1 + w_1) - 2(v_2 + w_2) = (v_1 - 2v_2) + (w_1 - 2w_2) = 0 + 0 = 0$, dan selanjutnya bukti sifat 6: $\alpha \in R, v \in W_2, \alpha v \in W_2$ karena $\alpha v = \alpha v_1 - 2\alpha v_2 = \alpha(v_1 - 2v_2) = 2.0 = 0$ Jadi W_2 ruang bagian dari R^n.

(iii) $W_3 = \{\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)\}$ memenuhi 1 dan 6 karena $0+0=0$, $\alpha 0 = 0$. Jadi, W_3 merupakan ruang vektor. Perhatikan bahwa W_3 ini merupakan ruang bagian yang sangat khusus yaitu hanya memuat tepat satu vektor saja.

Sudah kita lihat bahwa ketika memeriksa apakah himpunan bagian W merupakan ruang bagian dari ruang vektor V, sifat 2 sampai dengan 5 dan sifat 7 sampai dengan 10 dari ruang vektor dipenuhi oleh $W \subset V$. Yang perlu diperiksa lagi adalah sifat 1 dan sifat 6 (atau sifat #) yakni sifat ketertutupan terhadap penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Jadi dalil berikut berlaku.

Teorema 4: Himpunan bagian tak hampa *W* dari ruang vektor *V* adalah ruang bagian dari *V* jika dan hanya jika *W* memenuhi sifat 1 dan 6 (atau sifat #) dari ruang vektor.

Bukti :

a) Jika *W* ruang bagian linear dari *V* menurut definisi *W* memenuhi sifat 1 sampai dengan 10 dari ruang vektor jadi memenuhi sifat 1 dan 6 (juga sifat #).

b) Andaikan *W* himpunan bagian dari *V* yang memenuhi sifat 1 dan 6 (atau sifat #). Maka karena *W*Ì*V*, *W* memenuhi sifat 2 sampai dengan 5 dan 7 sampai dengan 10. Dengan demikian *W* memenuhi sifat 1 sampai dengan10 dari ruang vektor, Jadi *W* ruang bagian dari *V*.

Untuk menunjukkan bahwa *W* bukan ruang bagian, kita menggunakan kontraposisi dalil 4 dengan menunjukkan bahwa: ***Jika*** terdapat $\alpha \in R$ dan $v \in W$ dengan $\alpha v \in W$, atau terdapat $v \in W$ dan $w \in W$ dengan $v + w \in W$ maka *W* ruang bagian dari V.

Untuk menunjukkan bahwa *W* ruang bagian, kadang-kadang menunjukkan sifat # dipenuhi akan sedikit lebih menguntungkan, misalnya untuk menunjukkan $W_3 = \{0 = (0,0,\ldots,0)\}$ ruang bagian dari R^n (Contoh 5): Kita langsung menunjukkan bahwa $\alpha 0 + \beta 0 = 0 + 0 = 0$ menggunakan Teorema 2**.** Di samping itu, dari dalil 2 (butir a) dan dalil 4 dapat kita buktikan dalil berikut:

Teorema 5: Jika *W* ruang bagian dari *V* maka **0**Î*W* (unsur satuan pada penjumlahan di *V*).

Bukti :

W ruang bagian dari *V*, menurut teorema 4 " $v \in W$ dan $\alpha \in R$, $\alpha v \in W$. Ambil $\alpha = 0$ maka $0v \in W$. Sedangkan menurut butir a) Teorema 2 , $0v = 0$. Dengan demikian $0 \in W$ terbukti.

Kontraposisi dalil ini: Jika $0 \in W$ maka *W* bukan ruang bagian dari *W*. Fakta ini sangat ampuh untuk menunjukkan suatu himpunan bagian bukan ruang vektor.

Untuk memantapkan pemahaman Anda pelajarilah contoh-contoh berikut.

Contoh 6

Periksa apakah himpunan bagian W berikut merupakan ruang bagian dari ruang vektor V yang diberikan. (Tunjukkan bahwa himpunan itu ruang bagian atau bukan ruang bagian). A adalah matriks mxn.

1. $W = \left\{x, Ax = 0, x \in R^n\right\}, V = R^n$
2. $W = \left\{x, Ax = a, a \neq 0, x \in R^n\right\}$
3. $W = \left\{f \mid f : R \to R, f(0) - 2f(1) = 0\right\}, V = \left\{f \mid f : R \to R\right\}$
4. $W = \left\{f \mid f : R \to R, f(0) + f(1) = 1\right\}, V = \left\{f \mid f : R \to R\right\}$

Penyelesaian :

1. Ambil $v, w \in W$, dan $\alpha, \beta \in R$ maka $Av = 0$, dan $Aw = 0$.
   $A(\alpha v + \beta w) = \alpha Av + \beta Aw = \alpha 0 + \beta 0 = 0 + 0 = 0$ Maka $\alpha v + \beta w \in W$, menurut Teorema4, W ruang bagian dari $V = R^n$.
2. Menggunakan (kontraposisi) Teorema 4: $v \in W$, dan $\alpha = 2$ maka $Av = a$, $A(2v) = 2a \neq a$ karena $2a \neq 0$. Jadi $2a \notin W$. Dengan demikian sifat 6 takdipenuhi W sehingga W bukan ruang bagian V.
3. Menggunakan Teorema 4: Ambil $f \in W$, dan $g \in W$ maka $f(0) - 2f(1) = 0$ dan $g(0) - 2g(1) = 0$. $(f+g)(0) - 2(f+g)(1) = f(0) + g(0) - 2(f(1) + g(1))$
   $= f(0) - 2f(1) + g(0) - 2g(0) = 0 + 0 = 0$
   Maka $f + g \in W$.
   Ambil $\alpha \in R$, $(\alpha f)(0) - 2(\alpha f)(1) = \alpha f(0) - 2\alpha f(1) = \alpha(f(0) - 2f(1)) = \alpha 0 = 0$ yang berarti $\alpha f \in W$, jadi sifat 6 dipenuhi. Menurut Teorema 3 W ruang bagian dari V.
4. Menggunakan Teorema 5: Vektor **0** untuk W adalah fungsi k yang memenuhi $k\alpha = 0, \forall \alpha \in R$ $k(0) + k(1) = 0 + 0 = 0 \neq 1$. Maka $0 \in W$, jadi W bukan ruang bagian.
   Gunakan Teorema 4: Ambil $\alpha = 2$, $f \in W$, $((2f)(0) + (2f)(1)) = 2f(0) + 2f(1)$ $= 2(f(0) + f(1)) = 2X1 = 2 \neq 1$ jadi W bukan Ruang bagian dari V

C. MENGECEK PEMAHAMAN

Untuk meningkatkan pemahaman kalian tentang Ruang Vektor Real dan Sub Ruang, saatnya latihan mandiri. Silakan kerjakan soal berikut:

SOAL LATIHAN

1) Bila W dan V seperti yang diberikan, tunjukkan bahwa V ruang vektordan W ruang bagian dari V atau tidak.
   a) $V = P_3$ = {himpunan semua fungsi polinom koefisien real berpangkat lebih kecil atau sama

dengan (£) 3},

$W = \{ p \mid px = 1 + ax + bx^3, a, b \in R \}$

b) $V = P_3$, $W = \{ q \mid qx = a - bx^3, a, b \in R \}$

c) $V = PT_2 = \{ g \mid g(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x \}$.

$W = \{ r \mid r(x) = 2a\cos^2 x - b\sin x, a, b \in R \}$, (Nyatakan dulu $\cos^2 x$ dalam $\cos 2x$)

d) $V = PT_2$, $W = \{ f \mid f(x) = 2\sin^2 x - a\sin x, a \in R \}$ (Nyatakan dulu $\sin^2 x$ dalam $\cos 2x$

2) Bila $V = \{ f \mid f : R \to R \}$, periksa apakah himpunan W berikut merupakanruang bagian dari V atau bukan.

a) $W = \{ f \mid f \in V, f(0) = 2f(2) \}$.

b) $W = \{ f \mid f \in V, f(0) + f(1) = 2 \}$

c) $W = \{ f \mid f \in V, f(-x) = 1 - f(x), \forall x \in R \}$

d) $W = \{ f \mid f \in V, f(x) = f(-x) \forall x \in R \}$