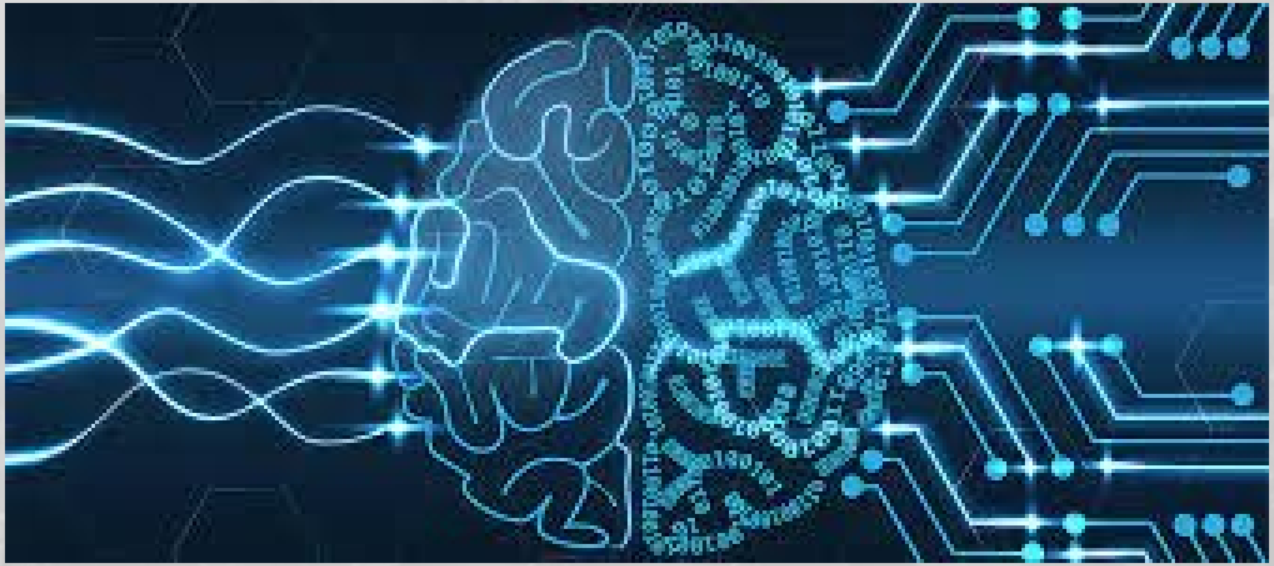
14624533

DEEP LEARNING



Mathematics for Machine Learning -

Probability and InformationTheory

PENGAMPU

Dr. Fajar Astuti Hermawati, S.Kom.,M.Kom.

Bagus Hardiansyah, S.Kom.,M.Si

Andrey Kartika Widhy H., S.Kom., M.Kom.

Capaian Pembelajaran

- **Sub-CPMK-1**: Mampu mengidentifikasi konsep dasar pemelajaran mendalam, konsep matematika dan mesin pemelajar yang mendasari prinsip-prinsip algoritma cerdas serta menentukan karakteristik permasalahan yang dapat diselesaikan dengan algoritma deep learning [C2, A3]

Outline

Random Variable
Probability Mass Function (PMF)
Marginal & Conditional Probability
Probability Density Function (PDF)
Variansi & Kovariansi
Fungsi Padat Peluang
Gaussian Distribution

Why Probability?

- Pembelajaran mesin harus selalu berurusan dengan kuantitas yang tidak pasti dan terkadang kuantitas stokastik (nondeterministik).
  - Ketidakpastian dan stokastik dapat muncul dari banyak sumber.
  - Para peneliti telah membuat argumen yang meyakinkan untuk mengukur ketidakpastian menggunakan probabilitas setidaknya sejak tahun 1980-an.

Why Probability?

- Dalam kasus dokter yang mendiagnosa pasien, kita menggunakan probabilitas untuk mewakili tingkat kepercayaan (***degree of belief***), dengan 1 menunjukkan kepastian mutlak bahwa pasien terkena flu dan 0 menunjukkan kepastian mutlak bahwa pasien tidak terkena flu.
  - Probabilitas yang pertama, terkait langsung dengan tingkat terjadinya peristiwa, dikenal sebagai ***frequentist probability***,
  - sedangkan yang kedua, terkait dengan tingkat kepastian kualitatif, dikenal sebagai **probabilitas Bayesian**.

Why Probability?

- Probabilitas dapat dilihat sebagai perpanjangan dari logika untuk menghadapi ketidakpastian.
- Logika menyediakan seperangkat aturan formal untuk menentukan proposisi apa yang tersirat benar atau salah dengan asumsi bahwa beberapa perangkat proposisi lain benar atau salah.
- Teori probabilitas menyediakan seperangkat aturan formal untuk menentukan kemungkinan (likelihood) suatu proposisi menjadi benar mengingat kemungkinan proposisi lain.

Statistika
Random Variable

Pengertian

- Random variable (variabel acak)
  - suatu fungsi yang didefinisikan pada *sample space*
- Jenis
  - *Discrete random variables*
  - *Continuous random variables*
- Contoh
  - jumlah hari hujan selama 1 tahun → diskrit
  - jumlah (volume) hujan selama 1 tahun → kontinu

Variabel Random

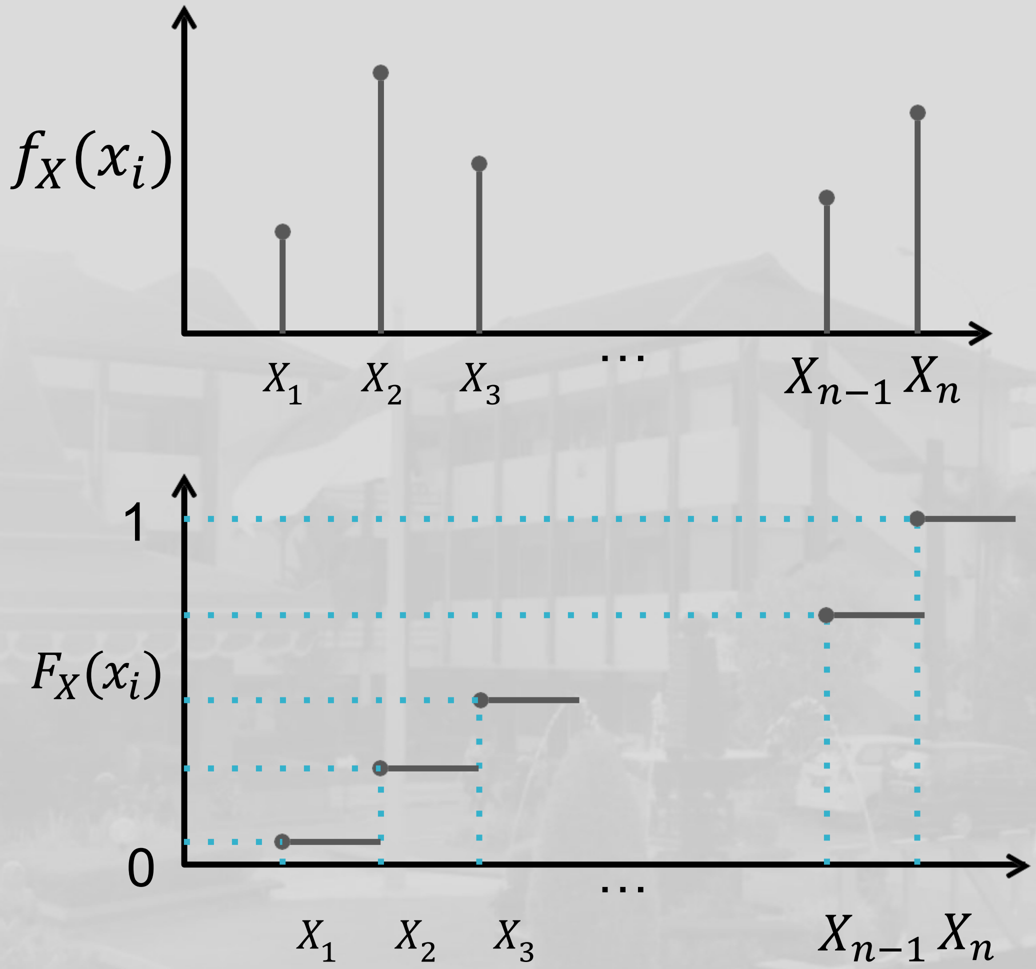
- Notasi
  - $X \rightarrow$ variabel random
  - $x \rightarrow$ nilai variabel random
- Fungsi
  - Suatu fungsi variabel random adalah variabel random pula
  - Jika X adalah variabel random, maka $Z = f(X)$ adalah juga variabel random

Variabel Random Diskrit

- X = *discrete random variables*

  $= x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \rightarrow f_X(x_1) \\ x_2 \rightarrow f_X(x_2) \\ x_3 \rightarrow f_X(x_3) \\ x_n \rightarrow f_X(x_n) \end{array}\right\} \text{probabilitas} \qquad \sum f_X(x_i) = 1$$



distribusi probabilitas diskrit

distribusi probabilitas kumulatif diskrit

probabilitas

$x \leq x_i$

- Distribusi probabilitas kumulatif suatu variabel random X untuk $X = x$

$$F_X(x) = \sum_{x_i \le x} f_X(x_i)$$

- Distribusi probabilitas suatu variabel random X untuk $X = x$

$$f_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_i - 1)$$

- Frekuensi relatif

$$f_{x_i} = F_{x_i} - F_{x_{i-1}}$$

- Probabilitas

$$f_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$$

- Frekuensi relatif kumulatif

$$F_{x_i}(x) = \sum_{j=1}^{i} f_{x_j}$$

$$F_X(x) = \sum_{x_i \le x} f_X(x_i)$$

Variabel Random Kontinu

- Probabilitas

$$\text{prob}(A) = \frac{n_i}{n} = f_{x_i}$$

n_i = jumlah data di klas ke-i

n = jumlah seluruh data

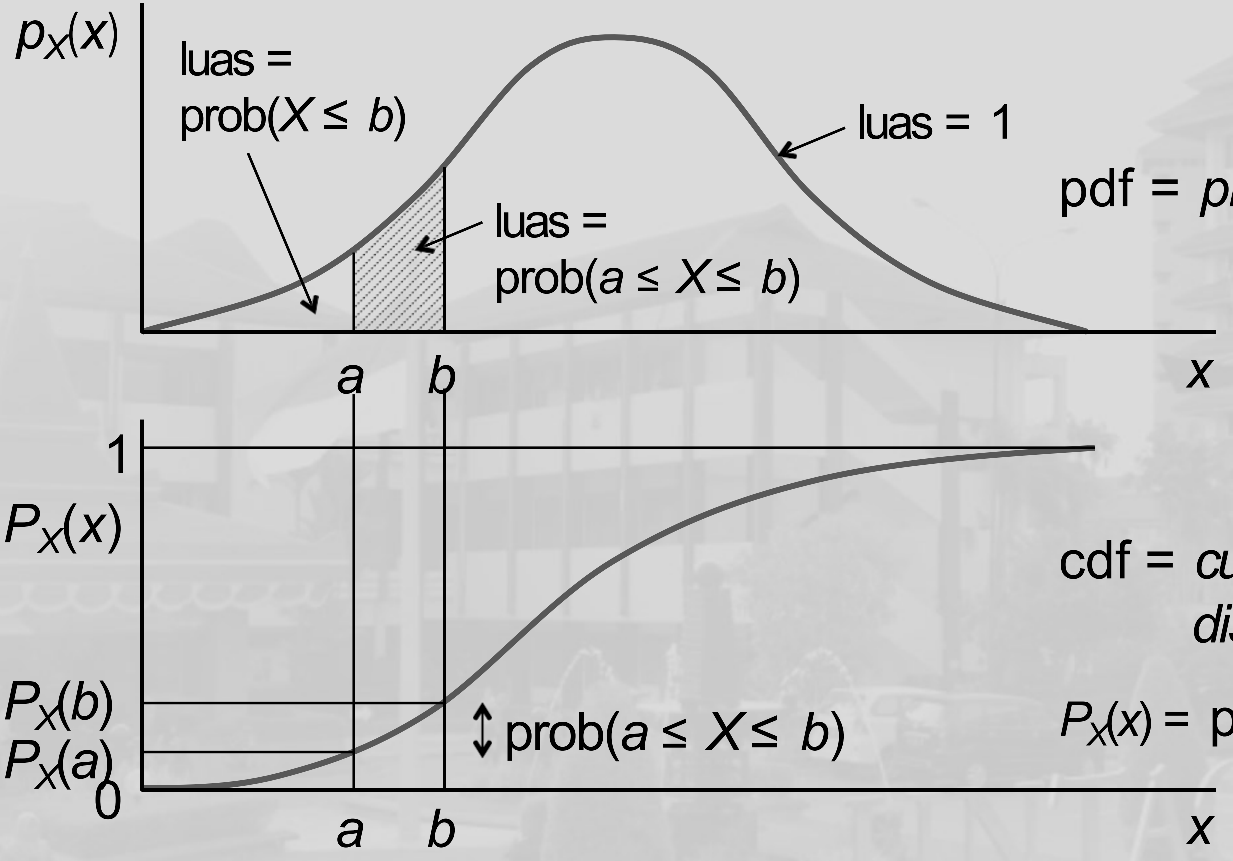
- Dengan demikian f_{xi} dapat dipandang sebagai nilai estimasi probabilitas

f_{xi} → estimasi prob (A)

histogram frekuensi → pendekatan distribusi probabilitas

frekuensi kumulatif → pendekatan distribusi probabilitas kumulatif

variabel random kontinu diperlakukan seolah-olah variabel random diskrit



pdf = *probability density function*

cdf = *cumulative probability distribution function*

$P_X(x) = \text{prob}(X \leq x)$

Statistika
Probability Mass Function (PMF)

Probability Mass Function (PMF)

Jika X adalah diskrit random variable maka range terhadap R_X adalah himpunan yang dapat dihitung, jadi kita dapat membuat daftar elemen di dalam R_X. Dapat ditulis sebagai berikut :

$$R_X = \{x_1, x_2, x_3 \ldots x_n\}$$

Random variable $X = x_k$

$$A = \{X = x_k\}$$

$$A = \{s \in S | X(s) = x_k\}$$

Definition

Definisi dari P_X misalkan X adalah variabel acak diskrit dengan rentang $\boldsymbol{R_X = \{x_1, x_2, x_3 \ldots x_n\}}$ (finite or countably infinite), (terbatas atau tak terbatas yang dapat dihitung). Dapat ditulis sebagai berikut :

$$\boldsymbol{P_X(x_k) = P(X = x_k), for\ k = 1, 2, 3 \ldots n}$$

Maka disebut Probability Mass Function (PMF) dari X

Example

Ketika saya melempar koin dua kali, dan mendefinisikan X sebagai jumlah sisi kepala yang saya amati, maka: cari range dari X, R_x, maupun probability mass function (PMF) dari P_X

Jawaban

Ruang sampel :

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

Jumlah kepala akan menjadi 0, 1, atau 2. Jadi,

$$R_X = \{0, 1, 2\}$$

$$P_X(k) = P = (X = k)\ k = 0, 1, 2$$

Selanjutnya,

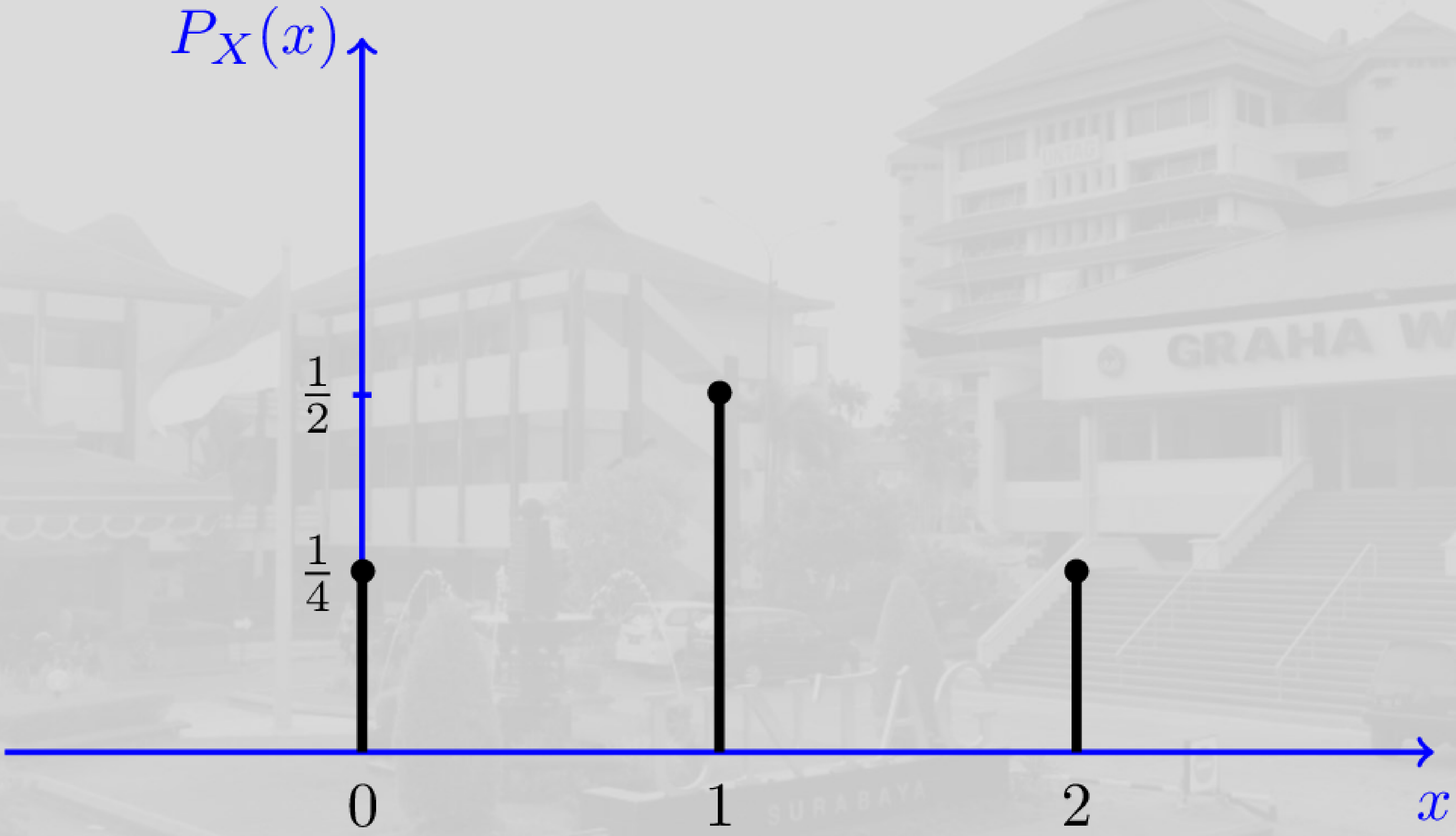
$$P_X(0) = P(X = 0) = P(TT) = \frac{1}{4}$$

$$P_X(1) = P(X = 1) = P(\{HT, TH\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P_X(2) = P(X = 2) = P(HH)\frac{1}{4}$$

Jika $x \notin R_X$, dapat di tulis secara simple $P_X(x) = P(X = x) = 0$. Sehingga, secara umum dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{P_X(x) = \begin{cases} P(X = x) & \textit{jika x ada dalam } R_X \\ 0 & \textit{Sebaliknya} \end{cases}}$$



PMF for random Variable X

Statistika
Marginal & Conditional Probability

Joint Probability Mass Function (PMF)

$$P_{XY}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

$$R_{XY} = \{(x,y) P_{XY}(x,y) > 0 \}$$

$$R_{XY} \subset R_X \times R_Y = \{(x_i, y_i) | x_i \in R_X, y_i \in R_Y\}$$

$$\sum_{(x_i,y_i)} P_{XY}\,(x_i, y_i) = 1$$

$\boldsymbol{P((X,Y) \in A)}$ **untuk setiap himpunan** $\boldsymbol{A \subset \mathbb{R}^2}$

$$\boldsymbol{P\big((X,Y) \in A\big) = \sum_{(x_i,x_j)\in(A\cap R_{XY})} P_{XY}(x_i, y_i)}$$

$\boldsymbol{X = x}$ $\quad \{(\boldsymbol{x_i, y_i}): \boldsymbol{x_i = x, y_i \in R_Y}\}$

$$\boldsymbol{P_{XY}(x,y) = P(X = x, Y = y)}$$
$$\boldsymbol{= P((X = x)\cap(Y = y))}$$

$\boldsymbol{Y = y}$ $\quad \{(\boldsymbol{x_i, y_i}): \boldsymbol{x_i} \in \mathbf{R_X, y_i = y}\}$

Marginal PMFs

- $P_X(x) = P(X = x)$
- $\sum_{y_j \in R_Y} P(X = x, Y = y_i)$ Law of total probability
- $\sum_{y_j \in R_Y} P_{XY}(x_i, y_i)$

- $P_Y(Y) = \sum_{x_i \in R_X} P_{XY}(x_i, y)$

- **Marginal PMFs of X and Y:**

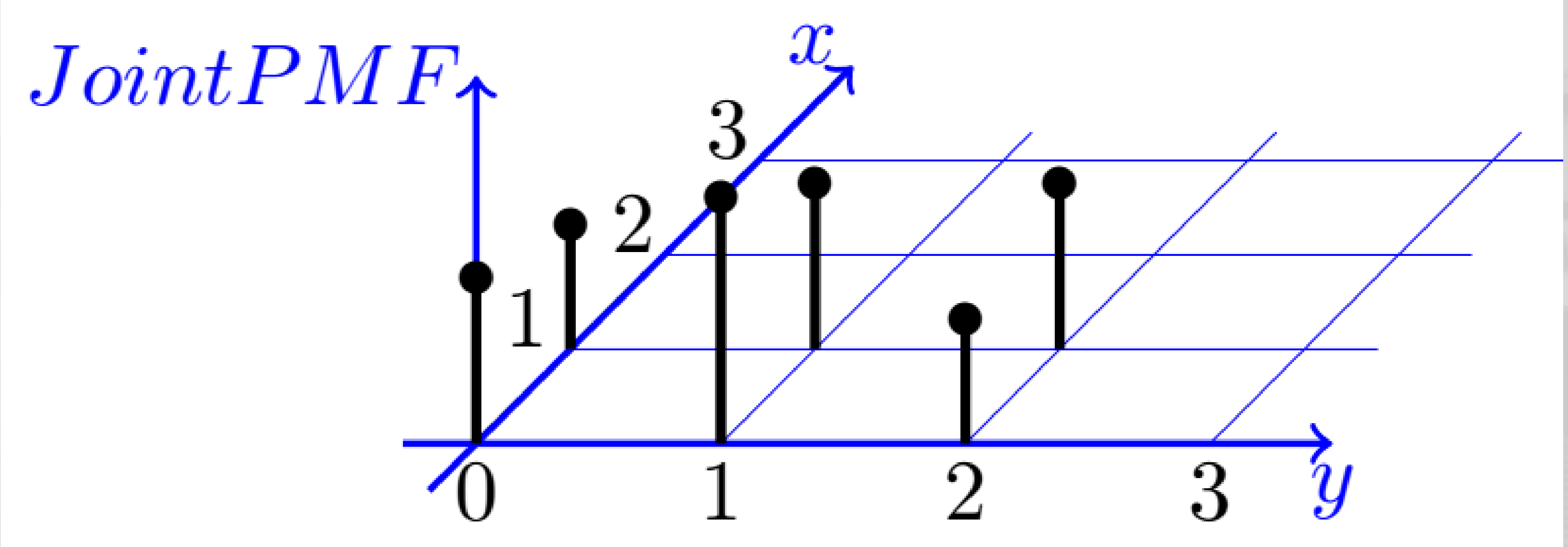
- $P_X(x) = \sum_{y_j \in R_Y} P_{XY}\left(x, y_j\right)$, untuk setiap $x \in R_X$
- $P_Y(y) = \sum_{x_i \in R_X} P_{XY}(x_i, y\ )$, untuk setiap y$\in R_Y$

Example

Misalkan dua variabel acak X dan Y dengan PMF gabungan yang diberikan dalam Tabel.

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$X = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Misalkan $P_{XY}(x, y)$



a) Cari $P(X = 0, Y \leq 1)$
b) Cari Marginal PMF dari X dan Y
c) Cari $P(Y = 1 | X = 0)$
d) Apakah X dan Y Independent?

a. Cari $P(X = 0, Y \leq 1)$

$$P(X = 0,) = P_{XY}(0, 0) + P_{XY}(0, 1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

b. $R_X = \{0, 1\}$ dan $R_Y = \{0, 1, 2\}$

Kita gunakan rumus Marginal PMFs of X and Y:

- $P_X(x) = \sum_{y_j \in R_Y} P_{XY}(x, y_j)$, untuk setiap $x \in R_X$
- $P_Y(y) = \sum_{x_i \in R_X} P_{XY}(x_i, y)$, untuk setiap y$\in R_Y$

Cari $P_X(0)$, Maka

$$P_X = P_{XY}(0, 0) + P_{XY}(0, 1) + P_{XY}(0, 2)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$
$$= \frac{13}{24}$$

Diperoleh :

$$P_X = \begin{cases} \frac{13}{24} & x = 0 \\ \frac{11}{24} & x = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$P_Y = \begin{cases} \frac{7}{24} & y = 0 \\ \frac{5}{24} & y = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

c. Cari $P(Y = 1, 0 = 0)$ Gunakan Rumus untuk conditional probability

$$P(Y = 1|X = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 1)}{P(X = 0)}$$

$$= \frac{P_{XY}(0,1)}{P_X(0)}$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{13}{24}} = \frac{6}{13}$$

d. Apakah X dan Y Independent? X dan Y apakah bukan Independet?

$$P(Y = 1|X = 0) = \frac{6}{13} \neq P(Y = 1) = \frac{5}{12}$$

Jika kita ingin menujukkan X dan Y adalah Independent, kita membutuhkan cek Kembali terhadap $P(X = x_i, Y = y_i) = P(X = x_i)P(Y = y_i)$, untuk semua di $x_i \in R_X$ dan $y_j \in R_Y$. Sehingga, jika pada kejadian (Event) pada perhitungan tersebut kita bisa mendapatkan $P(Y = 1|X = 0) = P(Y = 1)$, belum dapat bisa menyimpulkan bahwa X dan Y adalah bersifat Independent. Untuk itu, kita perlu memeriksa Independence condition untuk semua $x_i \in R_X$ dan semua di $y_i \in R_Y$.

Conditioning and Independence

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, dimana\ P(B) > 0$$

Dalam rumus terkait Conditional Probability dapat diturunkan dari rumus diatas adalah sebagai berikut :

$$P(X \in C|Y \in D) = \frac{P(X \in C, Y \in D)}{P(Y \in D)}, dimana\ C, D \subset \mathbb{R}$$

Conditional Probability Mass Function PMF dan Cumulative Distributive Function CDF

Ukuran Probabilitas (Probability Measure) Yaitu $P(X = x_k)$.

Conditional PMF dari X diberikan kejadian (Event) A, didefinisikan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{P_{X|A}(x_i) = P(X = x_i|A)}$$

$$\boldsymbol{\frac{P(X = x_i \; dan \; A)}{P(A)}}$$

Example

Ketika melempar dadu secara merata dan membiarkan X menjadi angka yang diamati, kita perlu mencari **conditional PMF** dari X diberikan bahwa angka yang diamati kurang dari 5.

Jawab

Maka, Condition pada saat kejadian (Event) $A = \{X < 5\}, dimana\ P(A) = \frac{4}{6}, Dengan\ Demikian\ Maka.$

$$P_{X|A}(A) = P(X = 1|X < 5)$$
$$= \frac{P(X = 1|, dan\ X < 5)}{P(X < 5)}$$
$$= \frac{P(X = 1)}{P(X < 5)} = \frac{1}{4}$$

Demikian pula kita mendapatkan :

$$P_{X|A}(2) = P_{X|A}(3) = P_{X|A}(4) = \frac{1}{4}$$

Juga demikian

$$P_{X|A}(5) = P_{X|A}(6) = 0$$

Aturan (Teorema) Bayes

Teorema. Misalkan $B_1, B_2, \ldots, B_n$ adalah kejadian-kejaian yang terpisah (saling meniadakan) yang gabungannya adalah ruang sampel S, dengan kata lain salah satu dari kejadian tersebut harus terjadi. Jika A adalah kejadian sembarang dalam S dengan $P(A) \neq 0$, maka

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A \cap B_i)}$$

- **Contoh**. Tiga orang dosen dicalonkan menjadi Rektor sebuah perguruan tinggi, yaitu Ahmad, Budi, dan Catur. Peluang Ahmad terpilih adalah 0.3, Budi 0.5, dan Catur 0.2. Bila Ahmad terpilih maka peluang SPP naik adalah 0.8, dan bila Budi yang terpilih peluang SPP naik adalah 0.1, dan bila Catur yang terpilih maka peluang SPP naik adalah 0.4. Bila setelah pemilihan diketahui bahwa SPP telah naik (siapa yang terpilih tidak diketahui informasinya), berapakah peluang bahwa Catur yang terpilih?

  Jawaban:

  Misalkan

  A : kejadian orang yang terpilih menaikkan SPP B_1 : kejadian Ahmad yang terpilih

  B_2 : kejadian Budi yang terpilih

  B_3 : kejadian Catur yang terpilih

  Berdasarkan aturan Bayes, maka

$$\boldsymbol{P(B_3|A) = P(B_3 \cap A) \,/\, \{P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)\}}$$

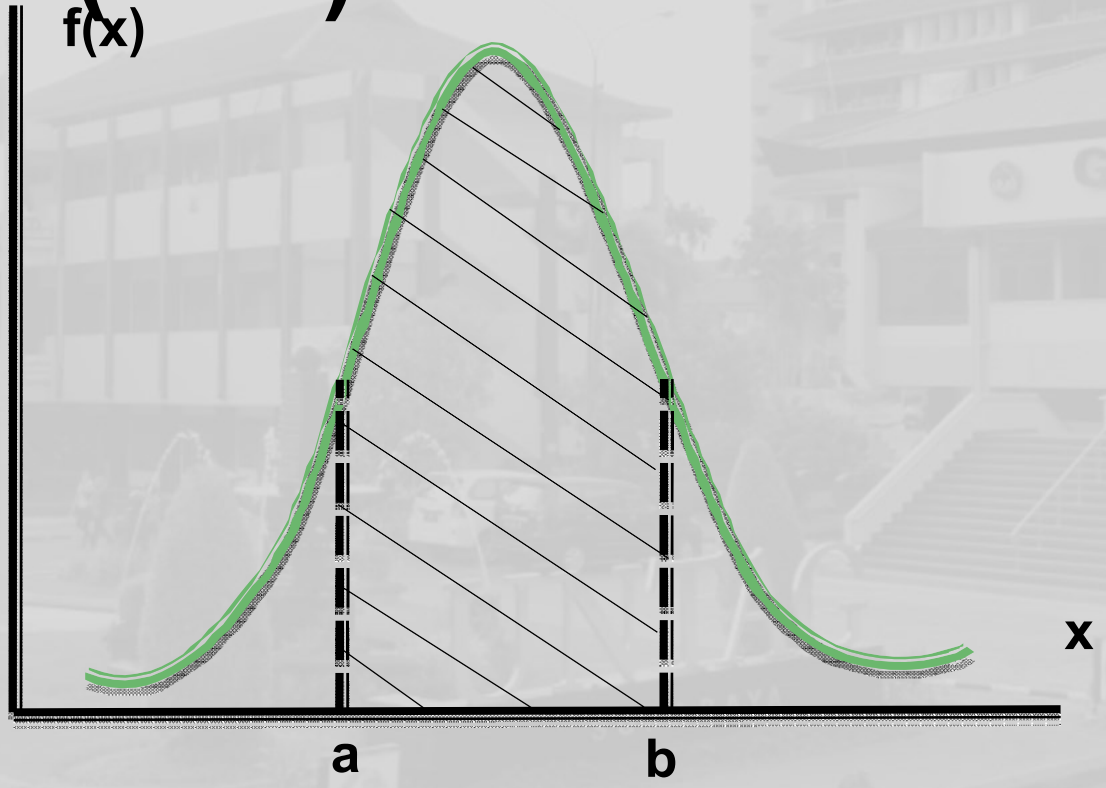
$$P(B_1 \cap A) = P(B_1)P(A|B_1) = 0.3 \times 0.8$$
$$P(B_2 \cap A) = P(B_2)P(A|B_2) = 0.5 \times 0.1$$
$$P(B_3 \cap A) = P(B_3)P(A|B_3) = 0.2 \times 0.4 = 0.08$$

$$P(B_3|A) = P(B_3 \cap A) / \{P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)\}$$
$$= 0.08 / (0.24 + 0.05 + 0.08) = 8/37$$

Karena $8/37 = 0.216 < 0.5$ maka kemungkinan besar bukan Catur yang yang terpilih sebagai rektor.

Statistika
Probability Density Function (PDF)
Fungsi Padat Peluang

Probability Density Function (PDF)



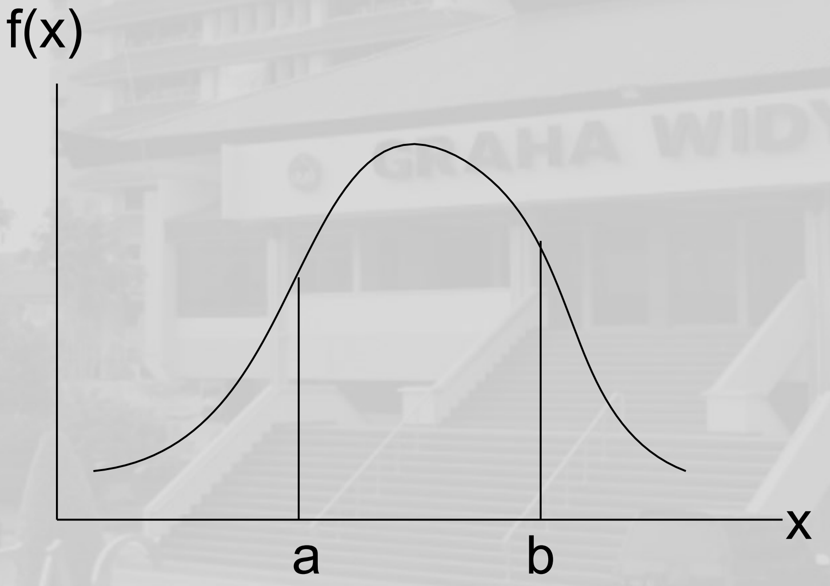
P(*a* < *X* < *b*)

- **Definisi 1**. Fungsi f(x) adalah fungsi padat peluang dari peubah acak kontinu X yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan riil R, bila memenuhi syarat:

  1) $f(x) \geq 0$ untuk semua x $\in$ R

  2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

  3) $P(a < X < b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$



P(a < X < b)

- Perhatikan pula bahwa bila X kontinu,

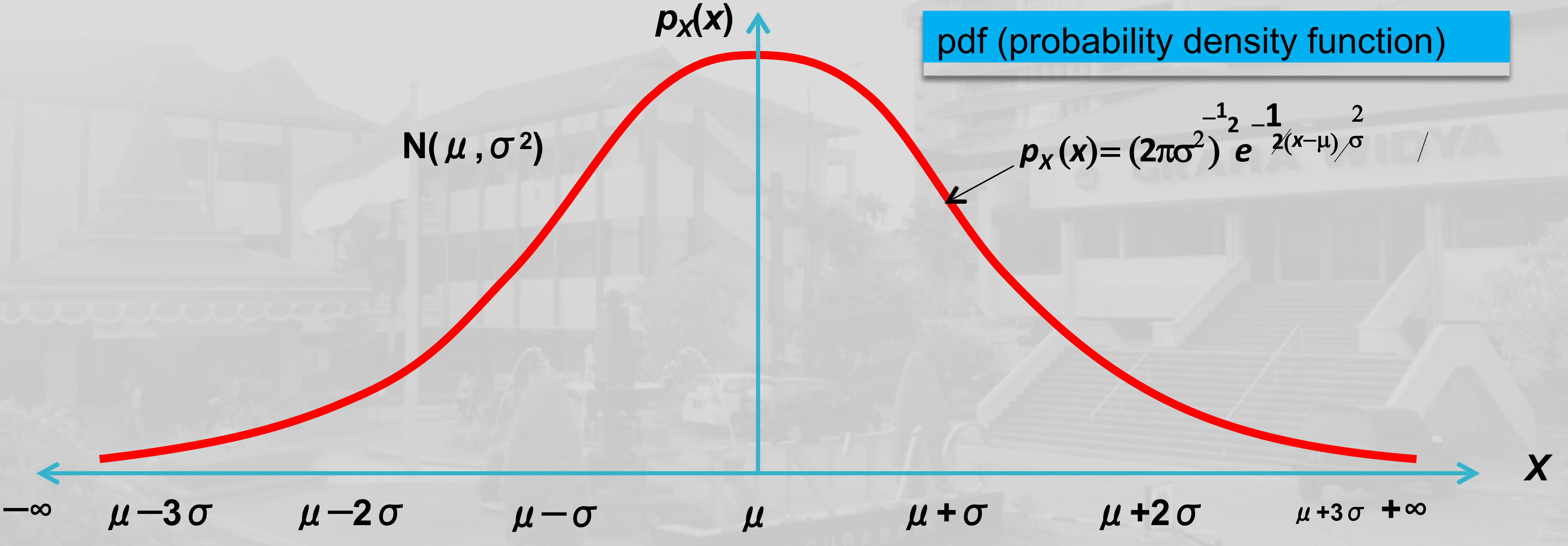
$$P(a < X \leq b) = P(a < X < b) + P(X = b) = P(a < X < b) + 0 = P(a < X < b)$$

Probability Density Function

$$u(x; a, b) = \frac{1}{b - a}$$

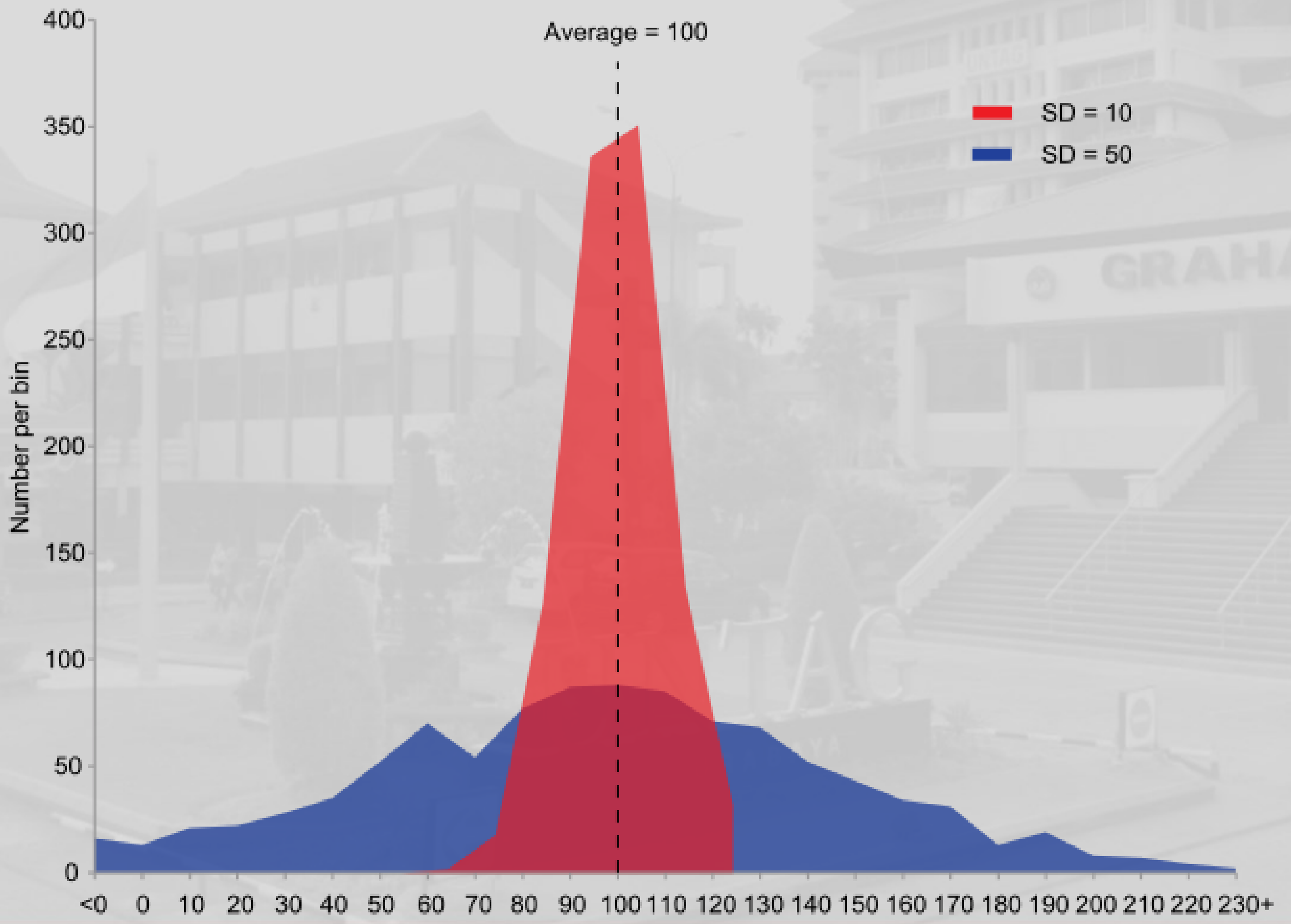
pdf (probability density function)

$$p_X(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}$$



Statistika
Variansi & Kovariansi

Variansi


Average = 100
SD = 10
SD = 50
Number per bin
400
350
300
250
200
150
100
50
0
<0 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 200 210 220 230+

Definisi.

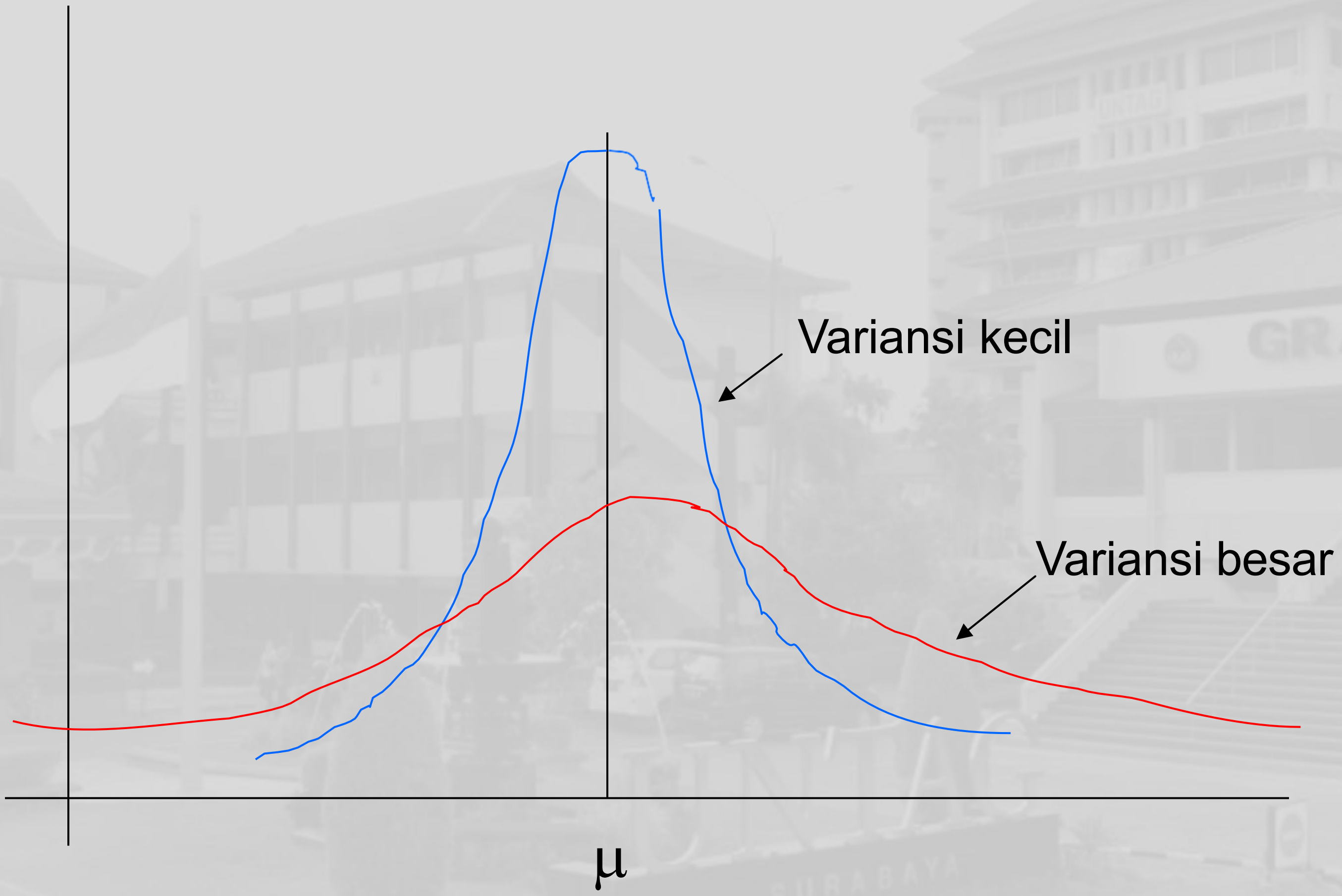
Misalkan $\boldsymbol{X}$ adalah variabel random dengan distribusi peluang $\boldsymbol{f(X)}$ dan rataan $\boldsymbol{\mu}$. Variansi dari $\boldsymbol{X}$ adalah:

$$\boldsymbol{\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)}$$

Jika $\boldsymbol{X}$ Diskrit, dan

$$\boldsymbol{\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \, f(x) dx}$$

Jika $\boldsymbol{X}$ Kontinu


Variansi kecil
Variansi besar
μ

Contoh 1. Diberikan disribusi peluang sbb:

x	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.4	0.3

Hitunglah variansi dari *X.*

Jawaban:

$$\mu = E(X) = 1(0.3) + 2(0.4) + 3(0.3) = 2.0$$

$$\sigma^2 = \sum_{x=1}^{3} (x-2)^2 f(x)$$

$$= (1-2)^2(0.3)(2-2)^2(0.4) + (3-2)^2(0.3) = 0.6$$

$$\boldsymbol{\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2}$$

Contoh 2

Misalkan X menyatakan banyaknya bagian yang cacat dari suatu mesin bila 3 suku cadang diambil secara acak dari proses produksi. Distribusi peluang X.

X	0	1	2	3
$f(X)$	0.51	0.38	0.10	0.01

Hitunglah Variansi dari X

Jawaban:

$$\mu = E(X) = (0)(0.51) + (1)(0.38) + (2)(0.10) + (3)(0.01) = 0.61$$
$$E(X^2) = (0)(0.51) + (1)(0.38) + (4)(0.10) + (9)(0.01) = 0.87$$

$$Jadi, \sigma^2 = 0.87 - (0.61)^2 = 0.4979$$

Contoh.

Sebuah panitia beranggotakan 3 orang dipilih secara acak dari 4 orang mahasiswa Informatika dan 3 orang mahasiswa Robotika dan Kecerdasan Buatan. Hitung variansinya.

Jawaban:

$$\mu = E(X) = (0)(1/35) + (1)(12/35) + (2)(18/35) + (3)(4/35) = 12/7$$
$$E(X^2) = (0)(1/35) + (1)(12/35) + (4)(18/35) + (9)(4/35) = 24/7$$

$$Jadi, \sigma^2 = 24/7 - (12/7)^2 = 24/29$$

Kovariansi

Misalkan X dan Y adalah variabel random dengan distribusi peluang gabungan $f(x, y)$. Kovariansi dari X dan Y adalah

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y)$$

Jika X dan Y Diskrit

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) dxdy$$

Jika X dan Y Kontinu

Interpretasi: Kovariansi antara dua peubah acak menunjukkan sifat asosiasi (hubungan) antara keduanya;

Jika kedua peubah tersebut bergerak kearah yang sama (X membesar dan Y membesar) maka hasil kali $(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$ **Bernilai Positif**

Jika bergerak kearah berlawanan (X membesar dan Y mengecil), maka hasil kali $(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$ Bernilai Negatif.

Tanda kovariansi (+ atau -)

Kovariansi juga dapat dihitung bila dengan rumus yang lebih mudah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y}$$

Contoh

Misalkan $X =$ jumlah ballpoint warna biru, dan $Y =$ jumlah *ballpoint* warna merah. Bila dua ballpoint diambil secara acak dari kotak, distribusi peluang gabungannya sudah dihitung pada contoh terdahulu, yaitu:

f(x,y)	**x=0**	**x=1**	**x=2**	**h(y)**
y=0	**2/28**	**9/28**	**3/28**	**15/28**
y=1	**3/14**	**3/14**		**3/7**
y=2	**1/28**			**1/28**
g(x)	**5/14**	**5/18**	**3/28**	**1**

Hitunglah Kovariansi dari X dan Y

Jawaban

$$\sigma_X = E(X) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xf(x,y) = \sum_{x=2}^{2} xg(x) = (0)\left(\frac{5}{14}\right) + (1)\left(\frac{15}{28}\right) + (2)\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\sigma_y = E(Y) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} yf(x,y) = \sum_{x=2}^{2} yh(x) = (0)\left(\frac{15}{28}\right) + (1)\left(\frac{3}{7}\right) + (2)\left(\frac{1}{28}\right) = \frac{1}{2}$$

Sehingga diperoleh

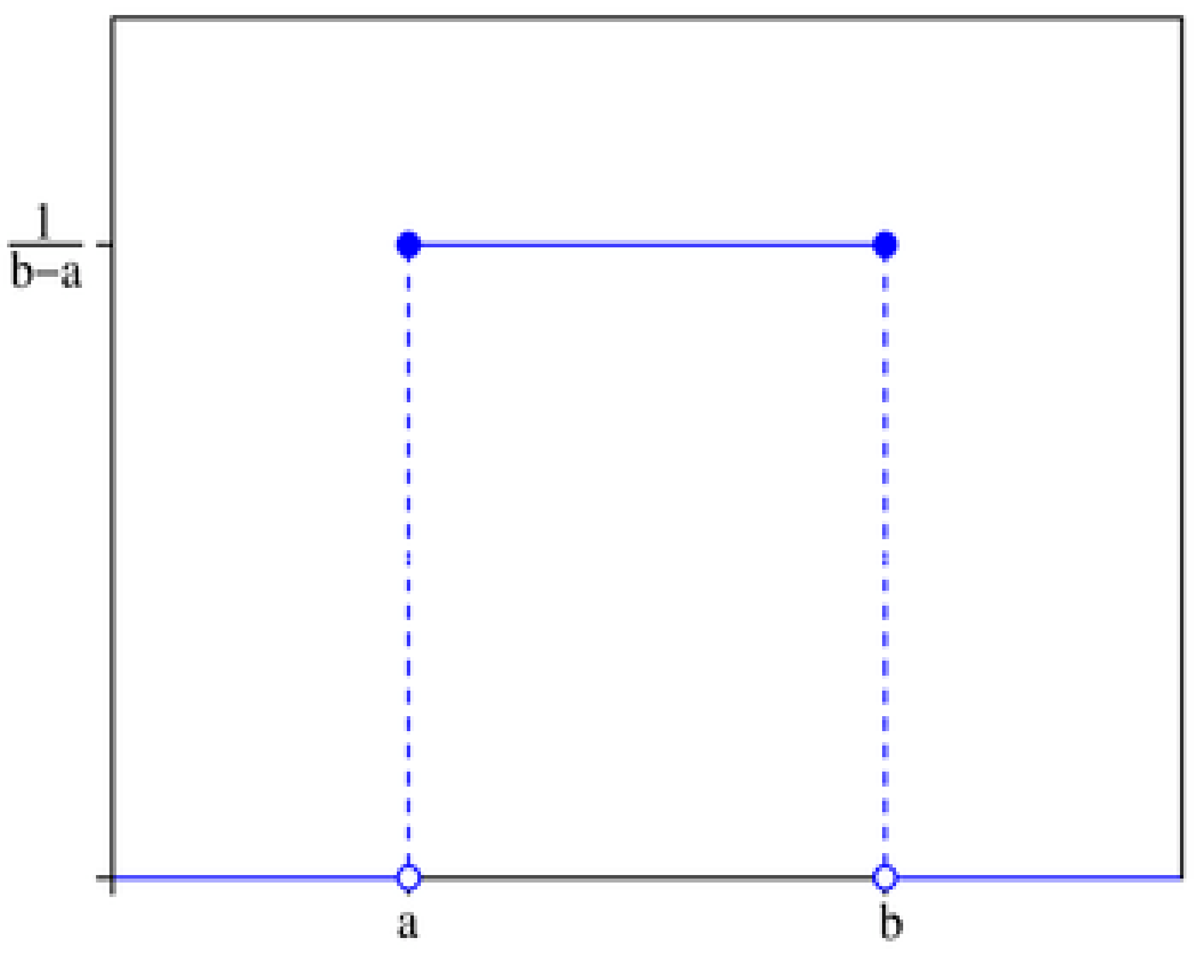
$$\sigma_{xy} = E(XY) - \mu_x\mu_y = \frac{3}{14} - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{56}$$

Statistika
Gaussian Distribution

Distribusi Seragam Kontinu

- Fungsi padat peluang dari peubah acak seragam kontinu X pada selang $[a, b]$ adalah:
- $f(x, a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0 & x \; lainnya \end{cases}$

Kurva fungsi padat peluang →



Contoh

Sebuah ruang konferensi dapat disewa untuk rapat yang lamanya tidak lebih dari 4 jam. Misalkan X adalah peubah acak yang menyatakan waktu rapat, yang mempunyai distribusi seragam.

a) Tentukan fungsi densitas peluang dari X.

b) Tentukan peluang suatu rapat berlangsung 3 jam atau lebih.

Jawab

$$a)\ a = 0, b = 4, \text{Sehingga } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & x\ lainnya \end{cases}$$

$$b)\ P(X \geq 3) = \int_3^4 \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}x\Big|_{x=3}^{x=4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

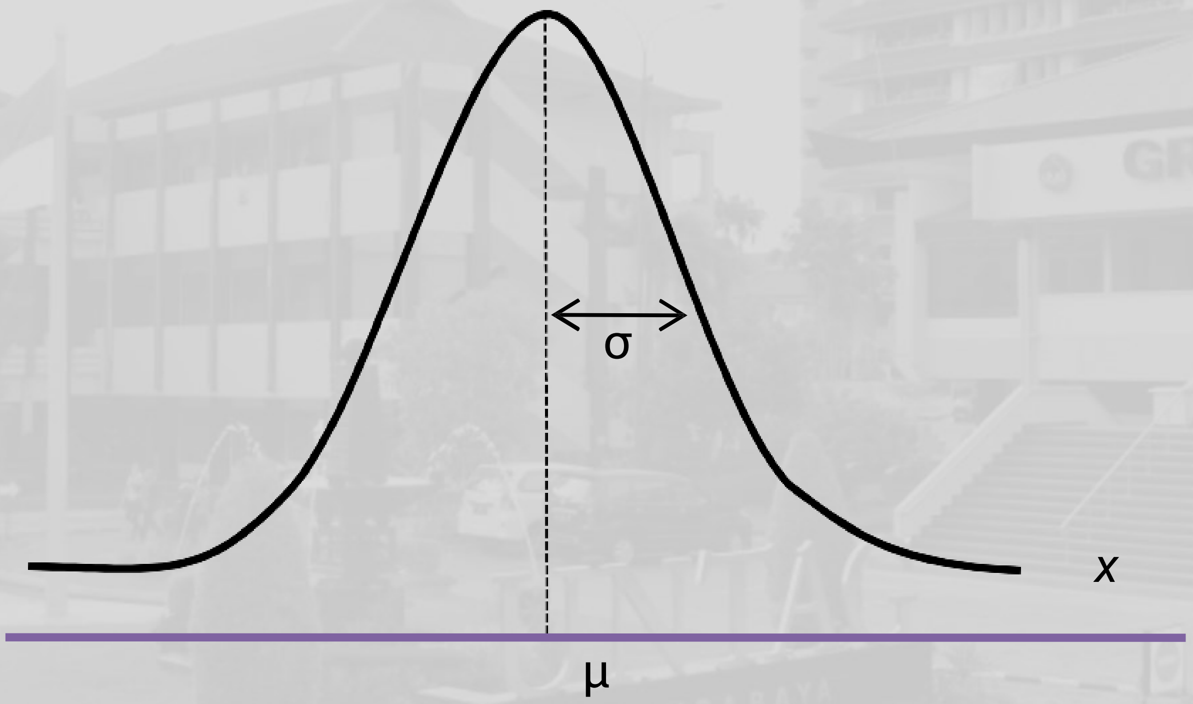
$\mu = \frac{(a+b)}{2}$ dan $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

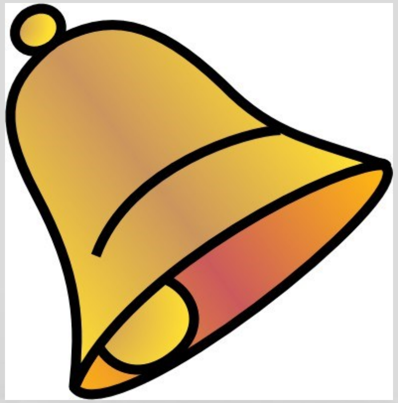
Fungsi Kumulatif

$$F(x) = \begin{cases} 0 & for\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & for\ a \leq x < b \\ 1 & for\ x \geq b \end{cases}$$

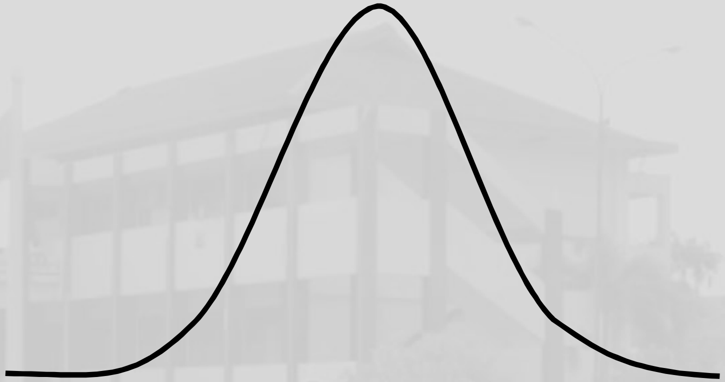
Kasus khusus : jika $a = 0$ dan $b = 1$, maka distribusinya disebut distribusi seragam baku (*standard uniform distribution*), dilambangkan dengan ∪ $(0,1)$

Gaussian Distribution




Lonceng (*bell*)


Lonceng sekolah


Kurva normal

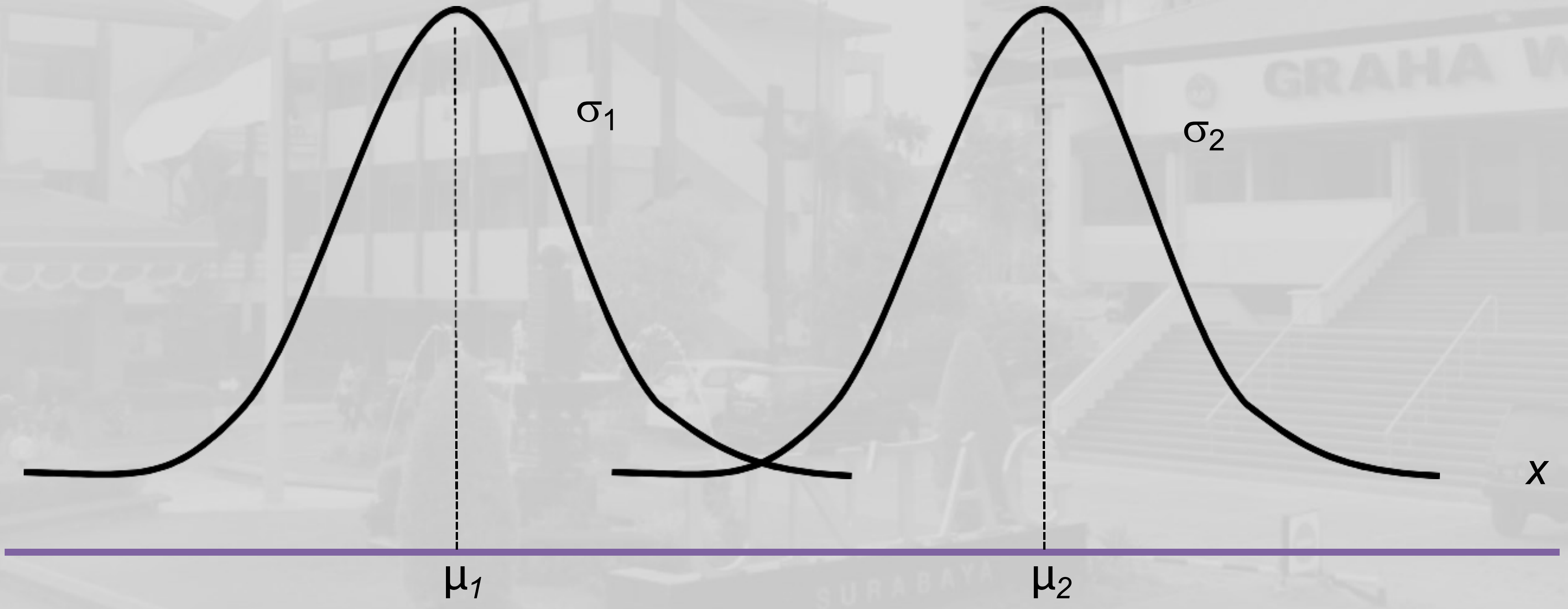

Sombrero, topi orang Meksiko


Sombrero, topi orang Meksiko

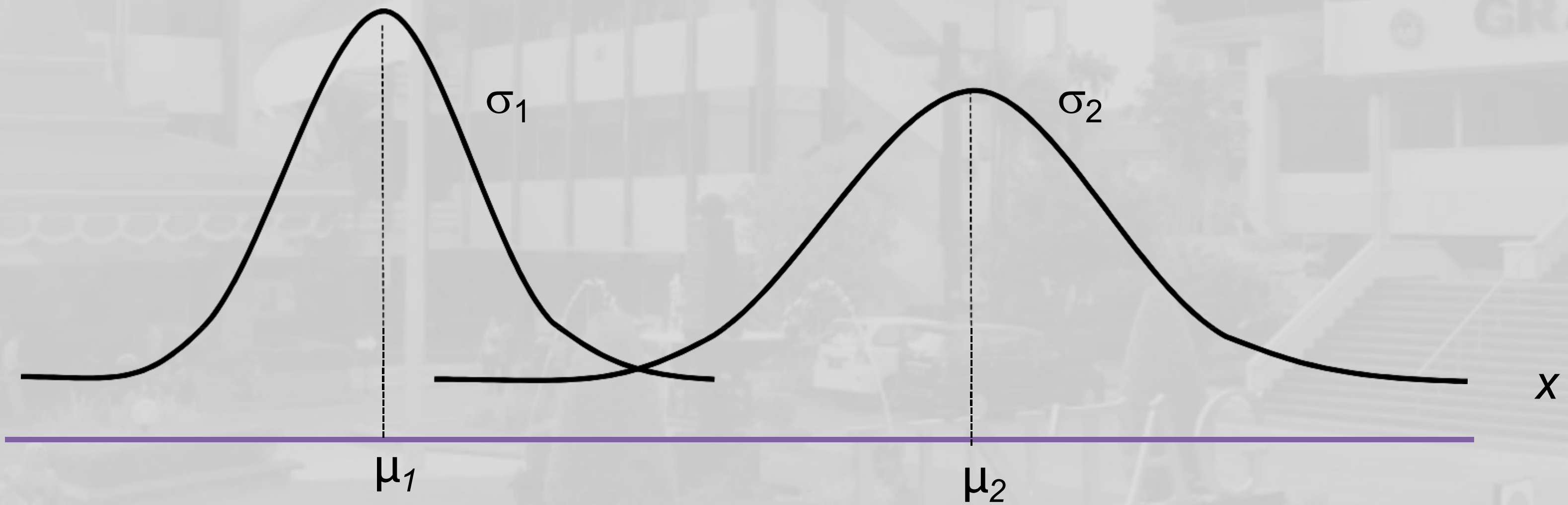
- Fungsi padat peluang (pdf) dari peubah acak normal X, dengan rataan μ dan variansi σ^2 adalah

- $n(x;\mu,\sigma) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2}, -\infty < x < \infty$

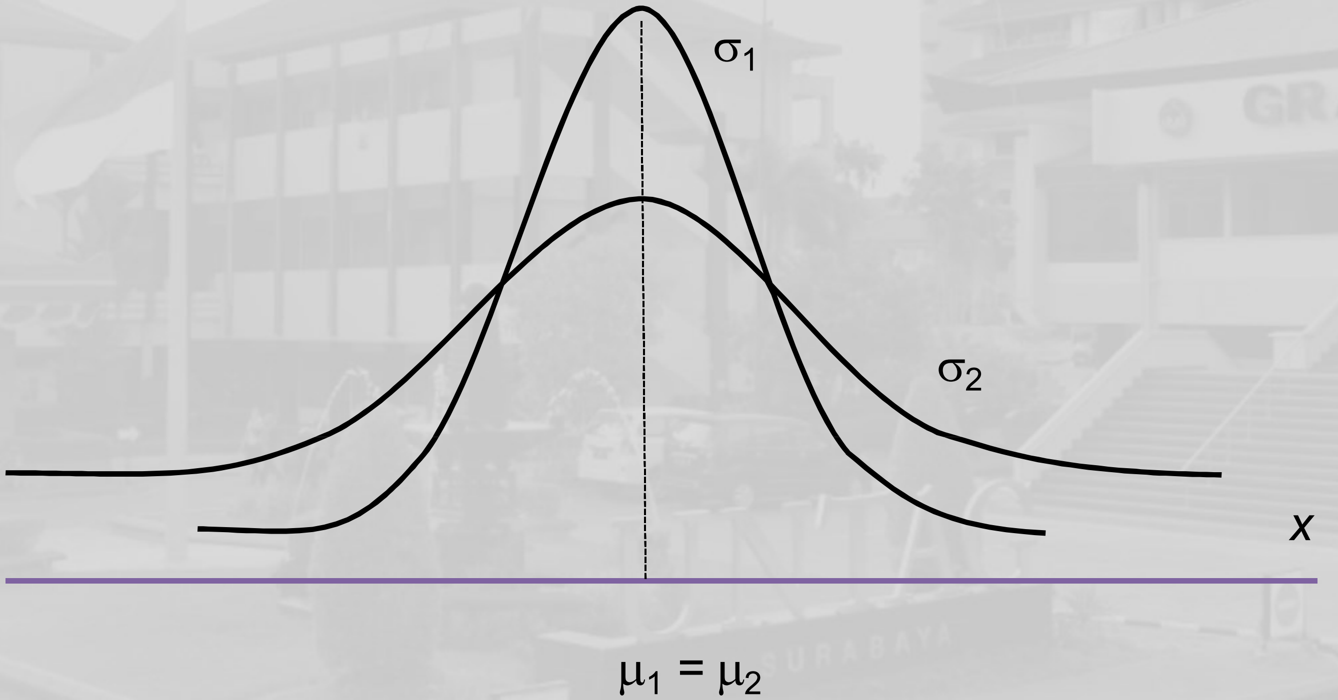
Kurva normal dengan $\mu_1 < \mu_2$ dan $\sigma_1 = \sigma_2$:



Kurva normal dengan $\mu_1 < \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$:



Kurva normal dengan $\mu_1 = \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$:



Luas Daerah di bawah Kurva Normal

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x;\mu,\sigma)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} dx$$

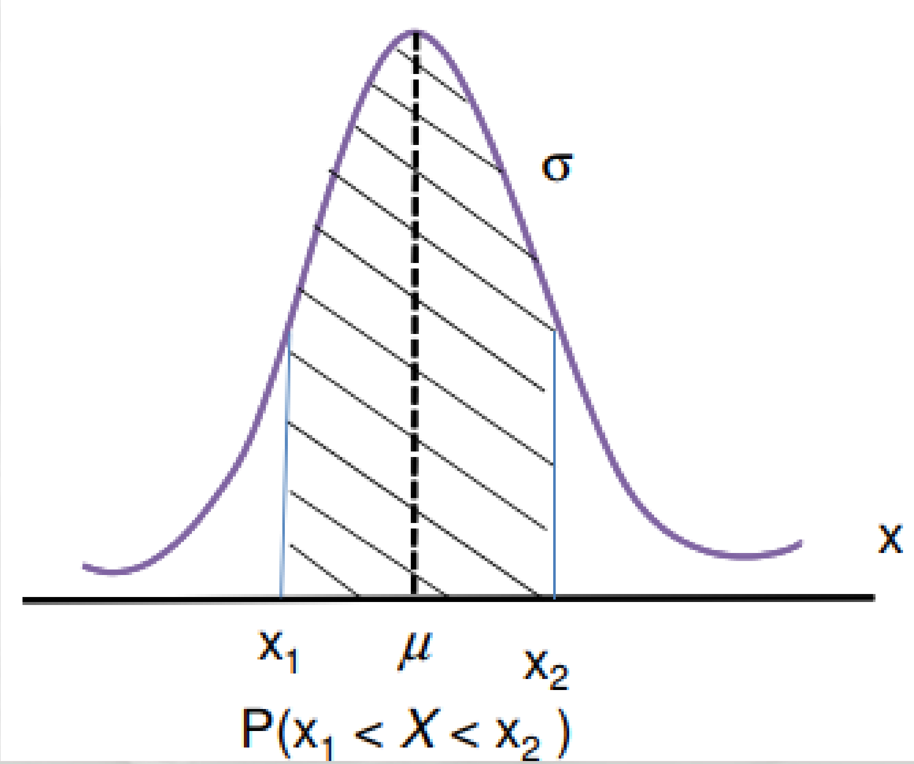
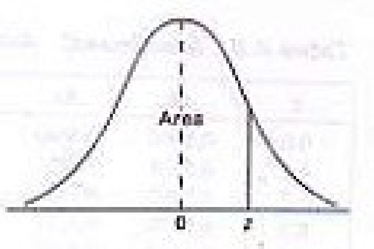


Table A.3 Areas Under the Normal Curve



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Contoh 2.

Diberikan distribusi normal baku, hitunglah daerah di bawah kurva yang dibatasi :

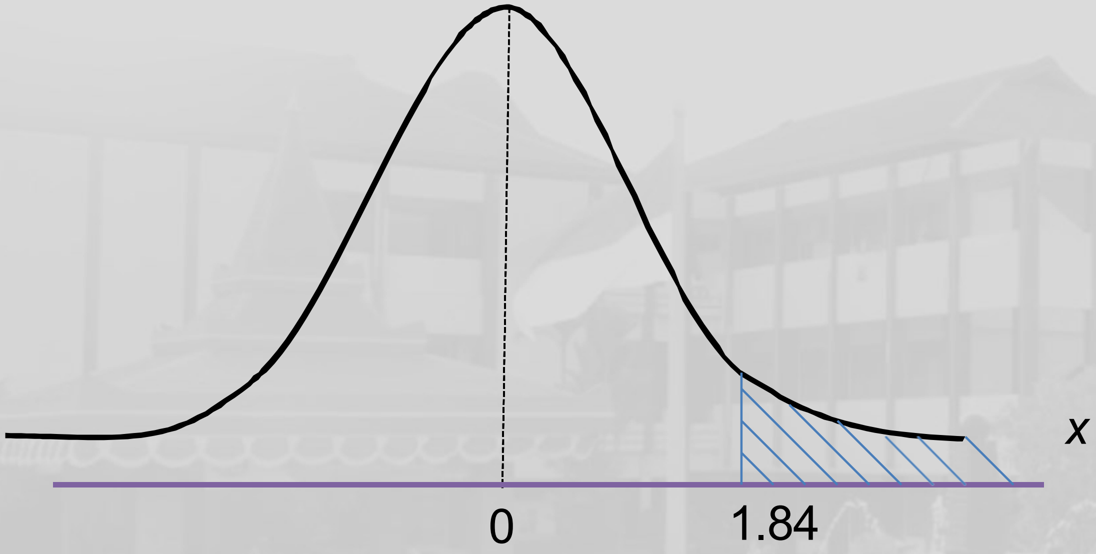
a. sebelah kanan $z = 1.84$

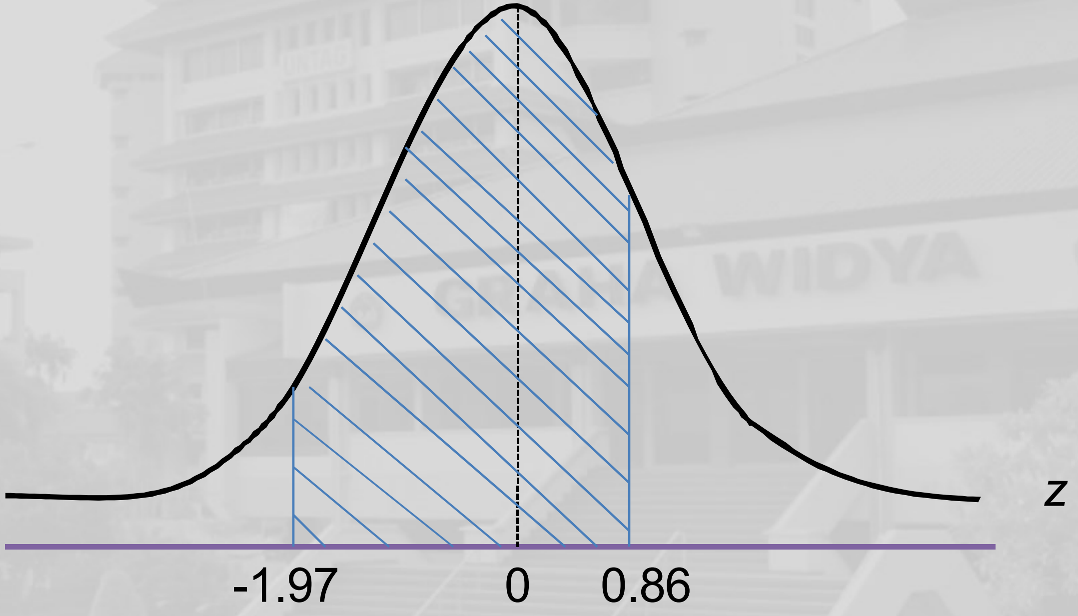
b. antara $z = -1.97$ dan $z = 0.86$

Jawab

a. Luas sebelah kanan = 1 – luas sebelah kiri $z = 1.84$ (lihat gambar di halaman berikut ini). Dari tabel luas sebelah kiri = 0.9671, jadi Luas sebelah kanan = 1-0.9671 = 0.0329

b. Luas daerah antar batas tersebut adalah luas di sebelah kiri $z = 0.86$ dikurangi dengan luas di sebelah kiri $z = -1.97$. Dari tabel diperoleh 0.8051 - 0.0244 = 0.7807


x
0
1.84


z
-1.97
0
0.86

Terima Kasih