**Nama :**____________________________________________ **Tanggal:** ________________

**Tingkat:** ____________

**Pokok Bahasan/ Pembelajaran :**

**Sasaran Pembelajaran:**

Di akhir modul, mahasiswa dapat:

1. Menjelaskan tentang Transformasi Linear umum, kernel dan range
2. Menyelesaikan tentang Transformasi Linear umum, kernel dan range

**Materi:**
Transformasi Linear Umum, kernel dan range

**Referensi:**

1. Anton, Howard. (2000). Dasar-dasar Aljabar Linear Jilid 1 Edisi 7. Interaksara: Batam
2. Rainarli, E dan Dewi, K. E. (2011). *Diktat Perkuliahan Aljabar Linear dan Matriks Edisi 1.* Unikom: Bandung [Online]
3. Gozali, S. M. (2010). *Aljabar Linear.* UPI: Bandung [Online]

## A. TINJAUAN PENDAHULUAN

**Pendahuluan**

Dalam subbab sebelumnya kita telah mendefinisikan transformasi linear dari $R^n$ ke $R^m$ . Dalam subbab ini kita akan memperluas gagasan tersebut dengan mendefinisikan konsep transformasi linear yang lebih umum ke satu ruang vector ke ruang vector lainnya.

**Definisi dan Terminologi** Ingat kembali bahwa sebuah transformasi linear dan $R^n$ ke $R^m$ pertama-tama didefinisikan sebagai sebuah fungsi

$$T(x_{1,}\ x_{2.} \dots \dots \dots x_n) = (w_{1,}\ w_{2,} \dots \dots \dots w_m)$$

Dimana persamaan-persamaan yang menghubungkan $w_{1,}w_{2,} \dots \dots \dots w_m$ dengan $x_{1,}x_{2,} \dots \dots \dots x_n$ adalah linear. Selanjutnya, kita telah menunjukkan bahwa sebuah transformasi $T{:}R^n \rightarrow R^m$ adalah linear jika dan hanya jika kedua hubungan

$$T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\ ) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}) \text{ dan } T\ (c\boldsymbol{u}) = cT(\boldsymbol{u})$$

Berlaku untuk semua vector **u** dan **v** pada $R^n$ dan setiap skalar c. Kita akan menggunakan sifat-sifat ini sebagai titik awal pendefinisian tranformasi linear umum.

## B. MATERI PEMBELAJARAN

**Konten/Isi**

**Transformasi Linear Umum**

**Definisi:**

Jika *T*: V → W adalah sebuah fungsi yang memetakan sebuah ruang vektor V ke sebuah ruang vektor W, maka *T* disebut sebagai **transformasi linear** *(linear transformation)* dan *V* ke *W* jika semua vektor **u** dan **v** pada *V* dan semua skalar c

(a) $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$ (b) $T(c\boldsymbol{u}) = cT(\boldsymbol{u})$

Dalam kasus yang spesifik dimana *V=W,* tranformasi linear *T*: *V* → *V* disebut sebagai **operator linear** *(linear operation)* pada V.

**CONTOH 1. Tranformasi Matriks**

Karena definisi tranformasi linear diatas didasarkan pada Teorema transformasi linear dari $R^n$ ke $R^m$, sebagaimana didefinisikan dalam subbab sebelumnya, juga merupakan tranformasi linear yang berada dalam ruang lingkup definisi yang lebih umum ini. Kita akan menyebut tranformasi linear dari $R^n$ ke $R^m$ sebagai ***transformasi matriks*** *(matriks transformation),* karena transformasi semacam ini dapat dilakukan melalui perkalian matriks.

**CONTOH 2. Transformasi Nol**

Misalkan *V* dan *W* adalah dua buah ruang vektor. Pemetaan *T: V* → *W* sedemikian rupa sehingga *T(**v**)* **= 0** untuk setiap **v** pada V adalah sebuah transformasi linear yang disebut ***transformasi nol*** *(zero transformation).* Untuk membuktikan bahwa T adalah linear, perhatikan bahwa

$$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}, \quad T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}, \; T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \quad dan\, T(k\boldsymbol{u}) = 0$$

Maka,

$$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}) \quad dan \quad T(k\boldsymbol{u}) = kT(\boldsymbol{u})$$

**CONTOH 3. Operator Identitas**

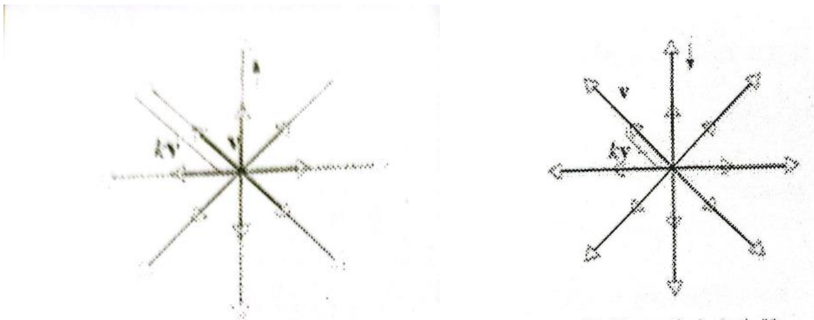
Misalkan *V* adalah ruang vektor sebarang pemetaan I: *V* → *V* yang didefinisikan oleh $l(v) = \boldsymbol{v}$ disebut sebagai **operator identitas** *(identity operator)* pada *V.* Pembuktian bahwa I linear diserahkan kepada anda.

**CONTOH 4. Operator Dilasi dan Operator Kontraksi**

Misalkan *V* adalah ruang vektor sebarang dan k adalah skalar tetap sebarang. Kami menyerahkan kepada anda sebagi latihan untuk membuktikan bahwa fungsi *T: V* → *V* yang didenfinisikan sebagai oleh

$$T(\boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{v}$$

Adalah sebuah operator linear pada *V.* operator linear ini disebut sebagai **dilasi** *(dilation)* dari V dengan faktor k jika k > 1 dan disebut **kontruksi** *(contraction)* dari *V* dengan faktor k jika 0 < k < 1. Secara geometrik, dilasi "memperbesar" setiap vektor pada *V* dengan faktor sebesar k, dan kontraksi pada *V* "memperkecil" setiap vektor dengan faktor sebesar k (Gambar 8.1.1).




(a) Dilasi dari *V*

(b) Kontraksi dari *V*

Gambar 8.1.1

**CONTOH 6. Transformasi Linear dari Ruang V ke $R^n$**

Misalkan $S = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots \dots \dots \boldsymbol{w_n}\}$ adalah sebuah basis untuk suatu ruang vektor *V* berdimensi n, dan misalkan

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle_s = (k_1, k_2, \dots \dots \dots k_n)$$

Adalah vektor koordinat dari vektor **v** pada V relatif terhadap S, maka

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{w}_1 + k_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots \dots \dots k_n\boldsymbol{w_n}$$

Didefinisikan *T: V → $R^n$* sebagai fungsi yang memetakan **v** ke vektor koordinatnya relatif terhadap S; jelasnya,

$$T(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{s}} = (k_1, k_2, \dots \dots \dots k_n)$$

Fungsi *T* adalah sebuah transformasi linear. Untuk membuktikan hal ini, misalkan **u** dan **v** adalah vektor-vektor pada *V* dan

$$\mathbf{u} = c_{\mathbf{1}}\mathbf{w_1} + c_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots \dots \dots + c_n\mathbf{w}_n \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{v} = d_{\mathbf{1}}\boldsymbol{w_1} + d_2\mathbf{w}_2 + \cdots \dots \dots d_n\boldsymbol{w}_n$$

Dengan demikian,

$$(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{s}} = (c_1, c_2, \dots \dots \dots c_n) \qquad \text{dan} \qquad (\boldsymbol{v})_s = (d_{\mathbf{1}}, d_{\mathbf{2}}, \dots \dots \dots d_{\boldsymbol{n}})$$

Akan tetapi

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (c_{\mathbf{1}} + d_{\mathbf{1}})\boldsymbol{w_1} + (c_{\mathbf{2}} + d_{\mathbf{2}})\boldsymbol{w_2} + \cdots \dots \dots (c_{\boldsymbol{n}} + d_{\boldsymbol{n}})\boldsymbol{w_n}$$

$\boldsymbol{ku} = (kc_1)\boldsymbol{w_1} + (kc_2)\boldsymbol{w_2} + \cdots \dots \dots (kc_n)\boldsymbol{w_n}$

Sehingga

$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{s}} = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots \dots \dots, c_n + d_n)$

$(k\boldsymbol{u})_s = (kc_1, kc_2, \dots \dots \dots kc_n)$

Dengan demikian,

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{s}} = (\boldsymbol{u})_s + (\boldsymbol{v})_s \qquad \text{dan} \qquad (k\boldsymbol{u})_s = k(\boldsymbol{u})_s$$

Dengan menyatakan kedua persamaan ini dalam bentuk *T* akan menghasilkan

$$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}) \qquad \text{dan} \qquad T(k\boldsymbol{u}) = kT(\boldsymbol{u})$$

Yang menunjukkan bahwa *T* adalah sebuah tranformasi linear.

CATATAN. Perhitungan-perhitungan pada contoh diatas dapat juga dilakukan dengan menggunakan matriks koordinat dan bukannya menggunakan vektor koordinat: yaitu,

$$[\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{s}} = [\boldsymbol{u}]_s + [\boldsymbol{v}]_s \qquad \text{dan} \qquad [k\boldsymbol{u}]_s = k[\boldsymbol{u}]_s$$

**CONTOH 7. Tranformasi Linear dari $P_n$ ke $P_{n+1}$**

Misalkan $\boldsymbol{p} = p(x) = c_0 + c_1^x + \cdots \dots \dots + c_n x^n$ adalah sebuah polinomial dalam $P_n$ dan misalkan *a* dan *b* adalah skalar sebarang. Kami menyerahkan kepada anda untuk membuktikan bahwa fungsi *T* yang didefinisikan oleh

$$T(\boldsymbol{p}) = T\big(p(x)\big) = xp(x) = c_0 x + c_1 x^2 + \cdots \dots \dots + c_n x^{n+1}$$

Fungsi *T* adalah sebuah transformasi linear, karena untuk skalar sebarang *k* dan polinomial sebarang $\mathbf{p_1}$ dan $\mathbf{p_2}$ pada $\mathbf{p_n}$ kita memperoleh

$$T(\boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p_2}) = T\big(p_1(x)+p_2(x)\big) = x\big(p_1(x)+p_2(x)\big)$$

$$= xp_1(x) + xp_2(x) = T(\boldsymbol{p_1}) + T(p_2)$$

Dan

$$T(k\boldsymbol{p}) = T\big(k\boldsymbol{p}(x)\big) = x\big(kp(x)\big) = k\big(xp(x)\big) = kT(\boldsymbol{p})\backslash$$

**CONTOH 8. Operator Linear pada $R_n$**

Misalkan $\boldsymbol{p} = p(x) = c_0 + c_1^x + \cdots \dots \dots + c_n x^n$ adalah sebuah polinomial dalam $P_n$ dan misalkan *a* dan *b* adalah skalar sebarang. Kami menyerahkan kepada anda untuk membuktikan bahwa fungsi *T* yang didefinisikan oleh

$$T(\boldsymbol{p}) = T\big(p(x)\big) = p(ax+b) = c_0 + c_1(ax+b) + \cdots \dots \dots + c_n(ax+b)^n$$

Adalah sebuah operator linear. Sebagai contoh, jika $ax + b = 3x - 5$, maka $T: P_2 \rightarrow P_2$ akan merupakan sebuah operator linear yang dirumah oleh

$$T(c_0 + c_1x + c_2x^2) = c_0 + c_1(3x - 5) + c_2(3x - 5)^2$$

**CONTOH 9. Transformasi Linear Menggunakan sebuah Hasil kali Dalam**

Misalkan *V* adalah sebuah ruang hasilkali dalam dan misalkan $\mathbf{v_0}$ adalah vektor tetap sebaramg pada *V*. misalkan $T: V \rightarrow R$ adalah transformasi yang memetakan sebuah vektor **v** hasilkali dalamnya dengan $\mathbf{v_0}$**:** yaitu

$$T\langle \boldsymbol{v} \rangle = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v_0})$$

Dari sifat-sifat hasilkali dalam kita mengetahui

$$T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v_0} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v_0} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v_0} \rangle = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$$

Dan

$$T(k\boldsymbol{u}) = \langle k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v_0} \rangle = k\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v_0} \rangle = kT(\boldsymbol{u})$$

Sehingga *T* adalah sebuah tranformasi linear

**CONTOH 10. Transformasi yang tidak linear**

Misalkan $T: M \rightarrow R$ adalah transformasi yang memetakan sebuah matriks $n \times n$ ke determinannya; yaitu.

$$T(A) = \det(A)$$

Jika $n>1$, maka transformasi ini tidak memenuhi kedua sifar yang dipersyaratkan untuk sebuah transformasi linear. Sebagai contoh, kita telah melihat pada contoh 1 Subbab 2.3 bahwa

$$\det(A_1 + A_2) \neq \det(A_1) + \det(A_2)$$

Secara umum. Selanjutnya, det(cA) $c^n$ det(A), sehingga

$$\det(cA) \neq c \det A$$

Secara umu. Dengan demikian, *T* bukan sebuah transformasi linear

**Sifat-sifat Transformasi Linear** jika $T: V \rightarrow W$ adalah sebuah tranformasi linear, maka untuk vektor $\boldsymbol{v_1}\ dan\ \boldsymbol{v}_2$ sebarang pada *V* dan skalar $c_1$ dan $c_2$ sebarang kita memperoleh

$$T(c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2}) = T(c_1\boldsymbol{v_1}) + T(c_2\boldsymbol{v_2}) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2)$$

Dan secara lebih umum, jika $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \dots \dots \dots, \boldsymbol{v_n}$ adalah vektor-vektor pada *V* dan $c_1, c_2, \dots \dots \dots, c_n$ adalah skalar, maka

$$T(c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots \dots \dots . + c_n\boldsymbol{v_n}) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \cdots \dots \dots + c_nT(v_n) \qquad (1)$$

Rumus (1) terkadang diuraikan dengan sebuatn *transformasi linear yang mempertahankan kombinasi linear.*

Teorema berikut ini mencantumkan tiga sifat dasar yang umum untuk transformasi linear.

**Teorema 8.1.1**

Jika *T: V → W adalah sebuah transformasi linear, maka:*

(a) T(**0) = 0**
(b) T(-**v)** = -T(**v)** untuk semua **v** pada *V*
(c) T(**v – w) =** T(**v) –** T(**w)** untuk semua **v** dan **w** pada *W*

***Bukti.*** Misalkan **v** adalah vektor sebarang pada *V* . karena 0**v = 0,** kita memperoleh

$$\boldsymbol{T}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{T}(\mathbf{0}\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$$

Yang membuktikan bagian (a). juga,

$$T(-v) = T\big((-1)v\big)T(v) = -T(v)$$

Yang membuktika bagian (b). akhirnya, **v – w = v + (-1)w;** sehingga

$$T(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = T(\boldsymbol{v} + (-\mathbf{1})\boldsymbol{w})$$

$$= T(v) + (-1)T(w)$$

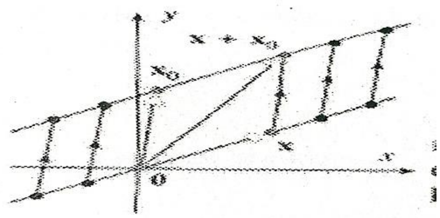
$$= T(v) - T(w)$$

Yang membuktikan bagian (c)

Dengan kata lain, bagian (a) dari teorema diatas menyatakan bahwa sebuan trnasformasi linwar memetakan dari **0** ke **0.** Sifat ini sangat bermanfaat untuk mengidentifikasikan transformasi-transformasi yang *tidak linear.* Sebagai contoh, jika $\mathbf{x_0}$ adalah sebuah vektor taknol tetap pada $R^2$, maka transformasi

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x_0}$$

yang membuktikan bagian (c).




**Gambar 8.1.4**
$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$ mentranslasikan setiap titik **x** sepanjang garis yang sejajar dengan $\mathbf{x}_0$ sejauh $\|\mathbf{x}_0\|$.

Memiliki efek geometrik untuk mentranslasikan setiap titik pada x ke arah yang sejajar dengan $\boldsymbol{x}_0$ sejauh $\|\boldsymbol{x}_0\|$ (Gambar 8.1.4). Hal ini bukan merupakan sebuah transformasi linear, karena $T(0) = x_0$ sehingga 7 tidak memetakan **0** ke **0**.

**Menentukan Transformasi Linear dari Bayangan Vektor Basis** Teorema 4.3.3 menunjukkan bahwa jika *T* adalah sebuah transformasi matriks, maka matriks standar untuk *T* dapat diperoleh dari bayangan vektor basis standar. Dengan kata lain, *sebuah transformasi matriks sepenuhnya ditentukan oleh bayangan vektor basis standarnya*. Hal ini adalah kasus yang spesifik dari sebuah hasil yang lebih umum: Jika *T: V → W* adalah sebuah transformasi linear, dan jika $\{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots\ v_n\}$adalah basis sebarang untuk *V*, maka bayangan T(**v**) dari vektor **v** dapat dihitung dari bayangan

$$T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$$

vektor basis tersebut. Hal ini dapat dilakukan dengan terlebih dahulu menyatakan v sebagai sebuah kombinasi linear dari vektor-vektor basis, misalnya

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$$

dan kemudian dengan menggunakan Rumus (1) untuk menuliskan

$$T(v) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \ldots + c_n T(v_n)$$

Dengan kata lain, sebuah transformasi linear sepenuhnya ditentukan oleh bayangannya dori vektor hasis sebarang.

**CONTOH 11. Menghitung dengan Menggunakan Bayangan Vektor Basis**

Perhatikan basis $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ untuk $R^3$ di mana dan $v_1 = (1, 0, 0)$, dan $v_3 = (1, 0, 0)$ Misalkan *T*: $R^3 \rightarrow R^2$ adalah transformasi linear sedemikian rupa sehingga

$$T(v_1) = (1, 0)\ T(v_2) = (2, -1)\ \ T(v_3) = (4, 3)$$

Tentukan sebuah rumus untuk $T(x_1, x_2, x_3)$ kemudian gunakan rumus tersebut untuk menghitung $T(2, -3, 5)$.

Penyelesaian.

Pertama-tama kita menyatakan $x = (x_1, x_2, x_3)$ sebagai sebuah kombinasi linear dari $v_1 = (1, 1, 1) v_2 = (1, 1, 0)\ dan\ v_3 = (1, 0, 0)$ Jika kita menuliskan

$$(x_1, x_2, x_3) = c_1(1, 1, 1) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, 0)$$

maka dengan menyusun persamaan dari komponen-komponen yang bersesuaian, kita memperoleh

$$c_1 + c_2 + c_3 = x_1$$

$$c_1 + c_2 = x_1$$

$$c_1 = x_3$$

yang menghasilkan $c_1 = x_3, c_2 = x_2 - x_3, c_3 = x_1 - x_2$,sehingga

$$(x_1, x_2, x_3) = x_3(1, 1, 1) + (x_2 - x_3)(1, 1, 0) + (x_1 - x_2)(1, 0, 0)$$

$$= x_3 v_1 + (x_2 - x_3) v_2 + (x_1 - x_1) v_3$$

Dengan demikian,

$$T(x_1, x_2, x_3) = x_3 T(\boldsymbol{v_1}) + (x_2 - x_3) T(\boldsymbol{v_2}) + (x_1 - x_2) T(\boldsymbol{v_3})$$

$$= x_3(1, 0) + (x_2 - x_3)(2, -1) + (x_1 - x_1)(4, 3)$$

$$= (4x_1 - 2x_2 - x_3, 3x_1 - 4x_2 + x_3)$$

Dari rumus ini kita memperoleh

$$T(2, -3, 5) = (9, 23)$$

Pada Subbab 4.2 kita telah mendefinisikan komposisi transformasi matriks. Definisi berikut ini memperluas konsep tersebut hingga mencakup transformasi linear umum.

**Definisi**

Jika $T_1 : U \rightarrow V\ dan\ T_2 : V \rightarrow W$ adalah transformasi linear, **komposisi $\boldsymbol{T_2}$ dengan $\boldsymbol{T_1}$** (*composition of $T_2$ with $T_1$*) dinotasikan dengan $T_2 o T_1$ (dibaca "$T_2$lingkaran $T_1$") adalah fungsi yang didefinisikan oleh rumus

$$(T_2\ o\ T_1)(\boldsymbol{u}) = T_2(T_1(\boldsymbol{u})) \qquad (2)$$

di mana **u** adalah sebuah vektor pada U.

CATATAN. Perhatikan bahwa definisi ini mempersyaratkan bahwa domain $T_2$ (yaitu V) mengandung range $T_1$ hal ini sangat penting agar rumus $T_2$ ($T_1$(**u**)) masuk akal (Gambar 8.1.5). Anda sebaiknya membandingkan (2) dengan Rumus Subbab 4.2.

Hasil berikut ini menunjukkan bahwa komposisi dari dua transformasi linear juga merupakan transformasi linear itu sendiri.

**Teorema 8.1.2**

Jika $T_1$:U → V dan $T_2$: V → W adalah transformasi linear, maka ( $T_2$ o $T_1$) : U → W juga merupakan transformasi linear.

Bukti. Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor pada U dan c adalah sebuah skalar, maka dari (2) dan sifat kelinearan $T_1$ dan $T_2$ kita memperoleh

$$(T_2\ o\ T_1\ )\,(\boldsymbol{u}\ +\ \boldsymbol{v})\ =\ T_2\ (T_1(\boldsymbol{u}\ +\ \boldsymbol{v}))\ =\ T_2(T_1(\boldsymbol{u})\ +\ T_1\ (\boldsymbol{v}))$$

$$=T_2\ (T_1(\boldsymbol{u}))\ +\ T_2(T_1(\boldsymbol{v}))$$

$$=(T_2\ o\ T_1)\ (\boldsymbol{u})\ +\ (T_2 o T_1)(\boldsymbol{v})$$

dan

$$(T_2\ o\ T_1\ )\ (c\boldsymbol{u})\ =\ T_2(T_1(c\boldsymbol{u}))\ =\ T_2(cT_1(\boldsymbol{u}))$$

$$=\ cT_2(T_1(\boldsymbol{u}))\ = c(T_2\ o\ T_2\ )(u)$$

Sehingga, $T_2$ o $T_1$ memenuhi kedua persyaratan dari sebuah transformasi linear. dan

**CONTOH 12. Komposisi Transformasi Linear**

Jika $T_1$: $P_1$ → $P_2$ dan $T_2$: $P_2$ → $P_2$ adalah transformasi linear yang dirumuskan oleh

$$T_1(p(x))\ =\ xp(x)\ dan\ T_2(p(x))\ =\ p(2x\ +\ 4)$$

Maka komposisi ( $T_2$ o $T_1$ ): $P_1$ → $P_2$ diberikan oleh rumus

$$(T_2\ o\ T_1\ )\ (p(x))\ =\ T_2(T_1(p(x)))\ =\ T_2(xp(x))\ =\ (2x\ +\ 4)\ p(2x\ +\ 4)$$

Secara spesifik, jika $p(x) = c_0 + c_1x$, maka

$$(T_2\ o\ T_1\ )(p(x)) = (\ T_2\ o\ T_1\ )\ (c_0 + c_1x)\ =\ (2x\ +\ 4)(c_0 + c_1(2x\ +\ 4))\ =\ c_0(2x\ +\ 4)\ +\ c_1(2x\ +\ 4)^2$$

**CONTOH 13. Komposisi dengan Operator Identitas**

Jika T_1 : V → V adalah suatu operator linear sebarang, dan jika $l:\ V -> \ V$ adalah operator identitas (Contoh

3), maka untuk semua vektor **v** pada V kita memperoleh

$$(T\ o\ I)\ (\boldsymbol{v})\ =\ T(I(\boldsymbol{v}))\ =\ T(\boldsymbol{v})$$

$$(I\ o\ T)\ (\boldsymbol{v})\ =\ I(T(\boldsymbol{v}))\ =\ T(\boldsymbol{v})$$

Dengan demikian $ToI$ dan $ToI$ keduanya sama dengan $T$; yaitu

$$T\ o\ I\ =\ T \quad dan \quad I\ o\ T\ =\ T$$

Kita menutup subbab ini dengan sebuah catatan bahwa komposisi dapat didefinisikara untuk lebih dari dua transformasi linear. Sebagai contoh, jika

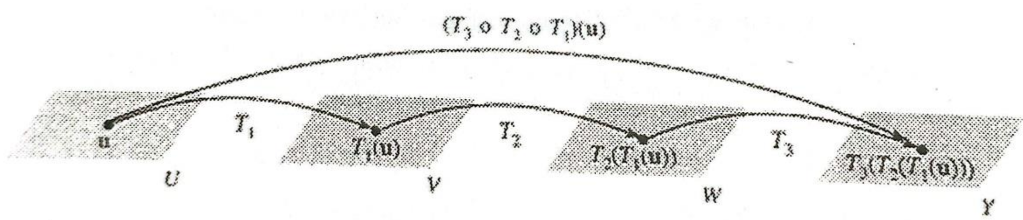
$$T_2 : U -> \ V\ T_2\ :\ V -> \ W \quad dan \quad T_j\ :\ W -> \ Y$$

adalah transformasi-transformasi linear, maka komposisi $T_3 o\ T_2\ o\ T_1$, didefinisikan dengan

$$(T_3 o\ T_2\ o\ T_1\ )\ (\boldsymbol{u})\ =\ T_3\ (T_2(\ T_1(\boldsymbol{u})))$$

(Gambar 8.1.6)

$$(T_3 o\ T_2\ o\ T_1\ )\ (\boldsymbol{u})$$




**Gambar 8.1.6** Komposisi tiga transformasi linear.



## Kernel dan Range

**Definisi**

Jika $T: V\ \rightarrow\ W$ adalah sebuah transformasi linear, maka himpunan vektor-vektor pada V yang dipetakan oleh $T$ ke **0** disebut *kernel* dari $T$ (*kernel of T*), dan dinotasikan dengan ker($T$). Himpunan semua vektor pada $W$ yang merupakan bayangan karena $T$ dari setidaknya satu buah vektor pada $V$ disebut range dari $T$ (*range of T*), dan dinotasikan dengan *R(T)*.

**CONTOH 1. Kernel dan Range sebuah Transformasi Matriks**

Jika $T: R^n \rightarrow R^n$ adalah perkalian dengan sebuah matriks A, *m x n*, maka dari definisi di atas dapat diketahui bahwa kernel dari $T_A$, adalah ruang nul dari matriks *A*, dan range dari $T_A$ adalah ruang kolom dari matriks *A*.

**CONTOH 2. Kernel dan Range Transformasi Nol**

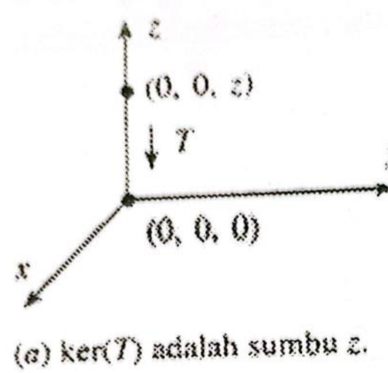
Misalkan $T: V \rightarrow W$ adalah transformasi nol (Contoh 2 Subbab 8.1). Karena *T* menetakarı setiap vektor pada *V* ke **0**, maka ker(*T*) = *V*. Selanjutnya, karena **0** adalah *satu-satunya* bayangan dari vektor-vektor pada *V* karena *T*. maka *R(T)* = (**0**).

**CONTOH 3. Kernel dan Range Operator Identitas**

Misalkan $I: V \rightarrow V$ adalah operator identitas (Contoh 3 Subbab 8.1). Karena $l(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ untuk semua vektor pada *V*. setiap vektor pada *V* adalah bayangan dari suatu vektor (yaitu, bayangan dirinya sendiri); sehingga, *R(I)* = *V.* Karena *satu-satunya* vektor yang dipetakan I ke **0** adalah **0**, maka ker(*I*) = (**0**).

**CONTOH 4. Kernel dan Range Proyeksi Ortogonal**

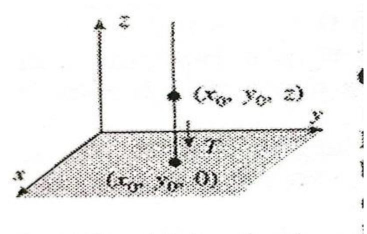
Misalkan $T: R^3 \rightarrow R^3$ adalah proyeksi ortogonal pada bidang xy. Kernel dari *T* adalah himpunan titik-titik yang dipetakan *T* ke **0** = (0, 0, 0); titik-titik ini adalah titik-titik yang terletak pada sumbu *z* (Gambar 8.2.1a). Karena *T* menetakan setiap titik pada $R^3$ ke bidang xy, range dari *T* haruslah merupakan suatu subhimpunan dari bidang ini. Akan tetapi setiap titik $(x_0, y_0, 0)$ pada bidang xy adalah bayangan dari suatu titik karena *T*; pada kenyataannya, titik itu adalah bayangan dari semua titik yang terletak pada garis vertikal yang melewati $(x_0, y_0, 0)$ (Gambar 8.1.2b). Sehingga, *R(T)* adalah seluruh bidang xy itu sendiri.



(a) ker(*T*) adalah sumbu z.

**CONTOH 5. Kernel dan Range Rotasi**

Misalkan $T: R^2 \rightarrow R^2$ adalah operator linear yang merotasikan setiap vektor pada bidang xy sebesar sudut $\theta$ Gambar 8.2.2). Karena setiap vektor pada bidang xy dapat diperoleh dengan cara merotasikan suatu vektor sebesar sudut $\theta$ (mengapa demikian?), kita memperoleh *R(T)* = $R^2$. Selanjutnya, satu-satunya vektor yang dirotasikan ke **0** adalah **0**, sehingga ker(*T*) = $\{\mathbf{0}\}$.

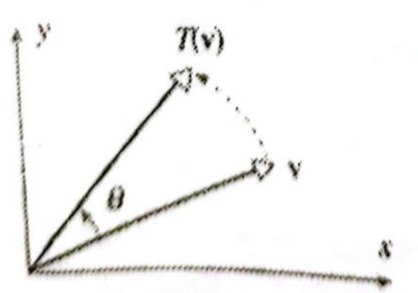


(*b*) *R*(*T*) adalah seluruh bidang *xy*.

Gambar 8.2.1

**CONTOH 6. Kernel sebuah Transformasi Diferensiasi**

Misalkan $V = \boldsymbol{C^1}(-\infty, \infty)$ adalah ruang vektor yang terdiri dari fungsi-fungsi dengan turunan pertama kontinu pada $(-\infty, \infty)$, dan misalkan $W = F(-\infty, \infty)$ adalah ruang vektor yang terdiri dari semua fungsi bernilai real yang terdefinisi pada $(-\infty, \infty)$, dan misalkan *D: V → W* adalah transformasi diferensiasi *D(f) = f(x)*. Kernel dari *D* adalah himpunan fungsi-fungsi pada *V* yang turunannya adalah nol. Dari kalkulus diketahui bahwa himpunan ini adalah himpunan fungsi-fungsi konstan pada $(-\infty, \infty)$.



Gambar 8.2.2

**Sifat-sifat Kernel dan Range** Dari semua contoh di atas, ker(*T*) dan *R(T)* ternyata diketahui sebagai subrnang. Dalam Contoh 2. 3. dan 5 subruang-subruang itu adalah subruang nol atau seluruh ruang vektor itu sendiri. Dalam Contoh 4 kernelnya adalah sebuah garis yang melewati titik asal dan rangenya adalah sebuah bidang yang juga melewati titik asal, di mana keduanya adalah subruang dari R. Semua hal ini bukan merupakan suatu kebetulan, melainkan sebuah konsekuensi dari hasil umum berikut ini

**Teorema 8.2.1**

*Misalkan T: V → W adalah transformasi linear, maka:*

*(a) Kernel dari T adalah sebuah subruang dari V.*

*(b) Range dari T adalah sebuah subruang dari W.*

**Bukti** (a). Untuk membuktikan bahwa ker(*T*) adalah sebuah subruang, kita harus menunjukkan bahwa ker(*T*) mengandung setidaknya satu vektor dan bersifat tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar. Berdasarkan bagian (a) Teorema 8.1.1. vektor **0** berada di dalam ker(*T*), sehingga himpunan ini mengandung setidaknya satu vektor. Misalkan $v_1$ dan $v_2$ adalah vektor-vektor di dalam ker(*T*), dan misalkan k adalah skalar sebarang, maka

$$T(v_1 + v_2) = T(\boldsymbol{v_1}) + T(\boldsymbol{v_2}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

sehingga $v_1 + v_2$terletak pada ker(*T*). Dan juga,

$$T(k\boldsymbol{v}_1) = kT(\boldsymbol{v_1}) = k0 = 0$$

sehingga k$\mathbf{v}_1$, terletak pada ker(*T*).

Bukti (b). Karena *T*(**0**) = **0**, terdapat setidaknya satu vektor pada *R(T)*. Misalkan $\mathbf{w_1}$ dan $\mathbf{w_2}$ adalah vektor-vektor di dalam range dari *T*. dan k adalah skalar sebarang. Untuk membuktikan bagian ini kita harus menunjukkan bahwa $\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$ dan k$\mathbf{w}_1$, terletak di dalam range dari *T*; jelasnya, kita harus menemukan vektor **a** dan vektor **b** pada *V* sedemikian rupa sehingga *T*(a) $\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$ dan *T*(b) = k$\mathbf{w_1}$.

Karena **w, dan w,** berada di dalam range dari *T*, terdapat vektor-vektor $\mathbf{a_1}$ dan $\mathbf{a_2}$ pada *V* sedemikian rupa sehingga *T*($\mathbf{a_1}$) = $\mathbf{w_1}$ dan *T*($\mathbf{a_2}$)= $\mathbf{w_2}$. Jika $\mathbf{a = a_1 + a_2}$ dan $\mathbf{b = ka}_1$, maka

$$T(a) = (a_1 + a_2) = T(a_1) + T(a_2) = w_1 + w_2$$

dan

$$T(b) = T(ka_1)\, kT(a_1) = kw_1$$

yang melengkapi pembuktian ini.

Pada Subbab 5.6 kita telah mendefinisikan rank sebuah matriks sebagai dimensi ruang kolom (atau ruang baris)-nya dan nulitas sebagai dimensi ruang nulnya. Definisi berikut ini memperluas definisi tersebut hingga mencakup transformasi linear umum.

**Definisi**

Jika $T: V \rightarrow W$ adalah sebuah transformasi linear, maka dimensi range dari $T$ disebut sebagai rank dari $T$ (*rank of T)* dan dinotasikan dengan rank($T$); dimensi kernelnya disebut nulitas dari $T$ (*nullity of 7*) dan dinotasikan dengan nulitas($T$).

Jika A adalah sebuah matriks *m* × *n* dan $T_A: R^n \rightarrow R^m$ adalah perkalian dengan *A*. maka kita dapat mengetahui dari Contoh I bahwa $T_A$adalah ruang nul dari matriks *A* dan range dari $T_A$ adalah ruang kolom dari matriks *A*. Sehingga, kita memperoleh hubungan antara rank dan nulitas sebuah matriks dengan rank dan nulitas transformasi linear yang terkait dengannya, seperti tercantum di bawah ini.

**Teorema 8.2.2**

Jika A adalah sebuah matriks $m \times n$ dan $T_A: R^n \rightarrow R^m$ adalah perkalian dengan $A$, maka:

(a) nulitas($T_A$) = nulitas ($A$)

(b) rank($T_A$) = rank ($A$)

**CONTOH 7. Menentukan Rank dan Nulitas**

Misalkan $T_A: R^6 \rightarrow R^4$adalah perkalian dengan

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Tentukan rank dan nulitas dari $T_A$

*Penyelesaian.*

Dalam Contoh 1 Subbab 5.6 kita telah menunjukkan bahwa rank *(A)* = 2 dan nulitas *(A)* = 4. Maka, dari Teorema 8.2.2 kita memperoleh rank *(T)* = 2 dan nulitas ($T_A$)= 4

**CONTOH 8. Menentukan Rank dan Nulitas**

Misalkan $T: R^3 \rightarrow R^3$ adalah proyeksi ortogonal pada bidang xy. Dari Contoh 4, kernel *T* adalah sumbu *z* yang berdimensi satu; dan range *T* adalah bidang xy, yang berdimensi dua. Sehingga

$$nulitas\ (T)\ =\ 1\ dan\ rank(T)\ =\ 2$$

Teorema Dimensi untuk Transformasi Linear Ingat kembali dari Teorema Dimensi untuk Matriks (Teorema 5.6.3) bahwa jika A adalah sebuah matriks yang memiliki a kolom, maka

Rank(*A*) + nulitas(*A*) = *n*

Teorema berikut ini, yang pembuktiannya ditunda hingga akhir subbab ini, memperluas hasil di atas hingga mencakup transformasi linear umum.

Teorema 8.2.3

**Teorema Dimensi untuk Transformasi Linear**

Jika *T: V* → *W* adalah sebuah transformasi linear dari suatu ruang vektor *V* berdimensi n ke suatu ruang vektor *W*, maka

rank(*T*) + nulitas(*T*) (1)

Dengan kata lain, teorema ini menyatakan bahwa untuk transformasi linear, rank ditambah nulitas sama dengan dimensi dari domain yang bersangkutan.

CATATAN. Jika A adalah sebuah matriks mn dan $T_A: R^n \rightarrow R^m$ adalah perkalian dengan *A*, maka domain memiliki dimensi n, sehingga dalam kasus ini Teorema 8.2.3 $T_A$konsisten dengan Teorema 5.6.3.

**CONTOH 9. Menggunakan Teorema Dimensi**

Misalkan $T: R^2 \rightarrow R^2$ adalah operator linear yang merotasikan setiap vektor pada bidang xy sebesar sudut 8. Kita telah menunjukkan di dalam Contoh 5 bahwa ker(*T*) = (**0**) dan R(*T*) = R $^2$ Sehingga,

rank(*T*) + nulitas(*T*) = 2+0 =2

yang konsisten dengan fakta bahwa domain *T* berdimensi dua.

**Bukti Tambahan**

Bukti Teorema 8.2.3. Kita harus menunjukkan bahwa

dim(*R(T)*) + dim(ker(*T*)) = *n*

Kita akan mengetengahkan pembuktian untuk kasus di mana 1 ≤ dim(ker(*T*)) < n Kasus-kasus di mana dim(ker(*T*)) = 0 dan dim(ker(*T*)) = *n* ditinggalkan sebagai latihan untuk Anda. Asumsikan bahwa lim (ker(*T*)) = r , dan $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ adalah sebuah basis untuk kernel tersebut. Karena $|\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}|$bebas linearTeorema 5.4.6b menyatakan bahwa terdapat *n* - *r* vektor, $\boldsymbol{v_{r+1}}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ sedemikian rupa sehingga himpunan yang diperluas $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}, \boldsymbol{v_{r+1}}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ sebuah basis untuk *V*. Untuk melengkapi pembuktian bahwa *n* - *r* vektor di dalam himpunan $S = \{T(\boldsymbol{v_{r+1}}), \ldots, T(\boldsymbol{v_n})\}$ membentuk sebuah basis untuk range dari *T*. Dari sini kita

dim(*R(T))* + dim(ker(*T*)) = *(n-r)* + *r* = *n*

Pertama-tama kita menunjukkan bahwa *S* merentang range dari *T*. Jika b adalah vektor sebarang di dalam range dari *T*, maka **b** = *T*(**v**) untuk suatu vektor **v** pada *V*. Karena $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}, \boldsymbol{v_{r+1}}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ }adalah sebuah untuk *V*, vektor **v** dapat dituliskan dalam bentuk

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c_1 v_1} +, \ldots, + \boldsymbol{c_r v_r} + \boldsymbol{c_{r+1}}\, \boldsymbol{v_{r+1}} +, \ldots, + \boldsymbol{c_n v_n}$$

Karena $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ berada di dalam kernel dari *T*. kita memperoleh $T(v_1) = \cdots \ldots \ldots = T(v_r) = 0$ sehingga

$$b = T(v) = \boldsymbol{c_{r+1} T}(\, \boldsymbol{v_{r+1}}) +, \ldots, + \boldsymbol{c_n T}(\boldsymbol{v_n})$$

Dengan demikian. *S* merentang range dari *T*.

Akhirnya, kita menunjukkan bahwa S adalah sebuah himpunan bebas linear dan sebagai konsekuensinya membentuk sebuah basis untuk range dari *T*. Misalkan beberapa kombinasi linear dari vektor-vektor di dalam *S* adalah nol; yaitu,

$$\boldsymbol{k_{r+1} T}(\, \boldsymbol{v_{r+1}}) +, \ldots, + \boldsymbol{k_n T}(\boldsymbol{v_n}) = \boldsymbol{0}$$

Kita harus menunjukkan bahwa $k_{r+1} = \cdots \ldots \ldots = k_n = 0$. Karena *T* adalah linear, (2) dapat dituliskan kembali sebagai

$$T(\boldsymbol{k_{r+1} v_{r+1}} + \ldots + k_n v_n) = \boldsymbol{0}$$

yang menyatakan bahwa $\boldsymbol{k_{r+1} v_{r+1}} + \ldots + k_n v_n$berada di dalam kernel dari *T*. Vektor ini oleh karenanya dapat sebuah kombinasi linear dari vektor-vektor basis $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ misalnya

$$\boldsymbol{k_{r+1} v_{r+1}} + \ldots + k_n v_n = \boldsymbol{k_1 v_1} + \ldots + k_r v_r$$

sehingga

$$k_1\boldsymbol{v_1}+\ldots+k_r v_r - k_{r+1}\boldsymbol{v_{r+1}}-\ldots-k_n v_n = \boldsymbol{0}$$

Karena $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ bebas linear, semua konstanta k adalah nol; secara spesifik $k_{r+1} = \cdots \ldots \ldots . = k_n = 0$ yang melengkapi pembuktian ini.

## C. MENGECEK PEMAHAMAN

Untuk meningkatkan pemahaman kalian tentang Transformasi Linear Umum saatnya latihan mandiri. Silakan kerjakan soal berikut!

**<u>SOAL LATIHAN</u>**

1. Tunjukkan bahwa fungsi $T : R^3 \to R^2$ yang dirumuskan oleh $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3)$ adalah sebuah transformasi linear
2. Perhatikan Basis $S = \{v_1, v_1\}$ untuk $R^2$ dimana $v_1 = (1,1)$ dan $v_1 = (1,0)$ dan misalkan $T : R^2 \to R^3$ adalah operator linear sedemikian rupa sehingga $T(v_1) = (1,-1)$ dan $T(v_1) = (-4,1)$ tentukan sebuah rumus untuk $T(x_1, x_1)$ dan gunakan rumus tersebut untuk menentukan $T(5-3)$

3. Tentukan basis dan dimensi dari $\ker(T_A)$ dan $R(T_A)$ dari transformasi linear $T_A : R^3$ dengan $T_A(\bar{u}) = A\bar{u}$ dengan $\bar{u} \in R^3$ dan $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

4. Diketahui transformasi linear $T : R^4 \to R^3$ didefinisikan oleh

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ c-2d \\ -a-b+c-2d \end{bmatrix}$$

Tentukan basis kernel dari $T$ dan nulitasnya