Nama :____ **Tanggal:** ________________

Tingkat: ____________

Pokok Bahasan/ Pembelajaran :

Sasaran Pembelajaran:

Di akhir modul, mahasiswa dapat:

1. Menjelaskan tentang Matriks-matriks Transformasi Linear Umum
2. Menyelesaikan soal berkaitan Matriks-matriks Transformasi Linear Umum

Materi:
Matriks-matriks Transformasi Linear Umum

Referensi:

1. Anton, Howard. (2000). Dasar-dasar Aljabar Linear Jilid 1 Edisi 7. Interaksara: Batam
2. Rainarli, E dan Dewi, K. E. (2011). *Diktat Perkuliahan Aljabar Linear dan Matriks Edisi 1.* Unikom: Bandung [Online]
3. Gozali, S. M. (2010). *Aljabar Linear.* UPI: Bandung [Online]

A. TINJAUAN PENDAHULUAN

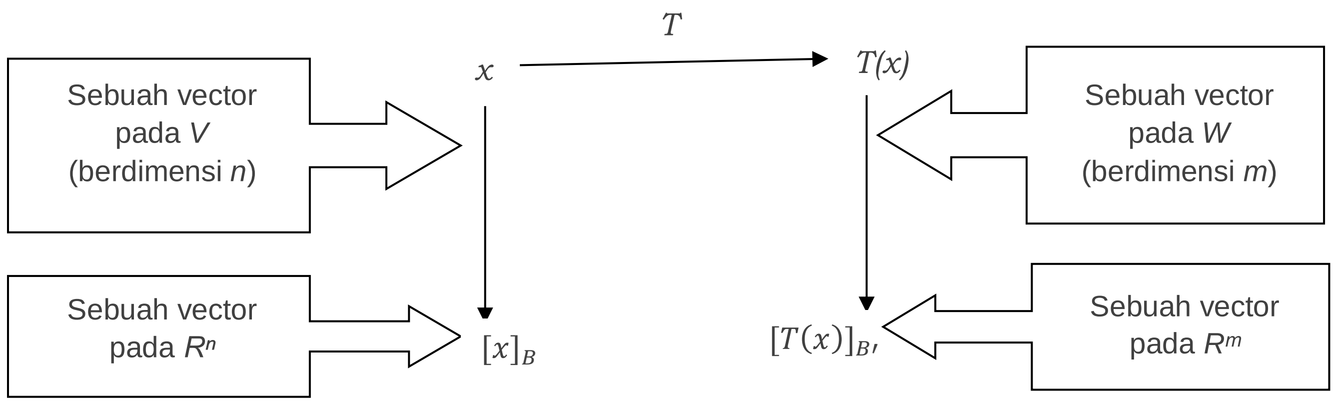
Pendahuluan

Pada subbab ini kita akan menunjukkan bahwa jika V dan W adalah ruang vector berdimensi terhingga (tidak harus R^n dan R^m), maka dengan sedikit manipulasi transformasi linear sebarang $T: V \rightarrow W$ dapat dipandang sebagai sebuah transformasi matriks. Gagasan dasarnya adalah bekerja dengan matriks koordinat dari verktor dan bukannya dengan vector itu sendiri.

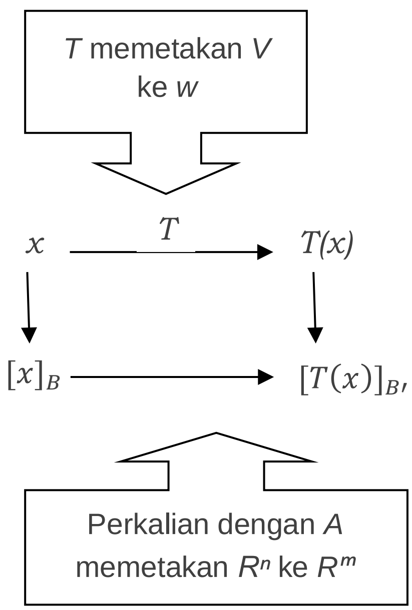
B. MATERI PEMBELAJARAN

Konten/Isi

Matriks Transpormasi Linear Misalkan V adalah sebuah ruang vektor berdimensi n dan W adalah sebuag ruang vector berdimensi m. Jika kita memilih basis B dan basis B' masing-masing untuk V dan W, maka untuk setiap vector x pada V, matriks koordinat $[x]_B$ akan merupakan sebuah vector pada R^n, dan matriks koordinat $[T(x)]_{B'}$ akan merupakan sebuah vector pada R^m (Gambar 8.4.1)



Gambar 8.4.1



Gambar 8.4.2

Apabila kita melengkapi segi empat yang diilustrasikan pada Gambar 8.4.1, kita akan memperoleh suatu pemetaan dari R^n ke R^m, yang dapat dibuktikan merupakan sebuah transformasi linear. Jika kita memisalkan A sebagai matriks standar untuk transformasi ini, maka

$$A[x]_B = [T(x)]_{B'}$$

Matriks A pada Persamaan (1) disebut ***matriks untuk T berkenaan dengan basis B dan basis B'*** (*matrix for T with respect to the bases B and B'*).

Selanjutnya pada subbab ini, kita mengetengahkan beberapa penggunaan matriks A yang diberikan kepada (1), namun sebelumnya, marilah kita menunjukkan bagaimana perhitungannya. Untuk tujuan ini, misalkan $B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ adalah sebuah basis untuk ruang V yang berdimensi n dan $B' \approx \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah sebuah basis untuk ruang W yang berdimensi m. Kita ingin mendapatkan sebuah matriks $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sedemikian rupa sehingga (1) berlaku untuk semua vector *x* pada *V*. Secara spesifik, kita menginginkan agar persamaan ini berlaku untuk vector basis $u_1, u_2, \dots, u_n$: yaitu

Sedemikian rupa sehingga (1) berlaku untuk semua vector *x* pada *V*. Secara spesifik, kita menginginkan agar persamaan ini berlaku untuk vector basis $u_1, u_2, \dots, u_n$: yaitu

$$A[u_1]_B = [T(u_1)]_B, \qquad A[u_2]_B = [T(u_2)]_B, \dots \qquad A[u_n]_B = [T(u_n)]_B,$$

Namun

$$[u_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [u_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \quad [u_n]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$A[u_1]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$$

$$A[u_2]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A[u_n]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dengan mensubtitusikan hasil ini ke dalam (2) menghasilkan

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = [T(u_1)]_B, \qquad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = [T(u_2)]_B, \dots \qquad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = [T(u_n)]_B,$$

yang menunjukkan bahwa kolom-kolom matriks *A* secara berturut-turut adalah matriks-matriks koordinat dari

$$T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)$$

Berkenaan dengan basis *B'*. Dengan demikian, matriks untuk *T* berkenaan dengan basis *B* dan *B'* adalah

$$A = [[T(u_1)]_{B'} | [T(u_2)]_{B'} | \ldots | [T(u_n)]_{B'}]$$

Matriks ini secara umum dinotaskan dengan simbol

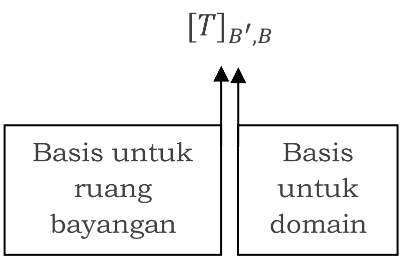
$$[T]_{B',B}$$

sehingga rumus di atas dapat juga dituliskan sebagai

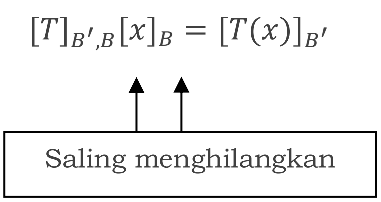
$$[T]_{B',B} = [[T(u_1)]_{B'} | [T(u_2)]_{B'} | \ldots | [T(u_n)]_{B'}]$$

Dan dari (1) dapat diketahui bahwa matriks ini memiliki sifat

$$[T]_{B',B}[x]_B = [T(x)]_{B'}$$



Gambar 8.4.3



Gambar 8.4.4

CATATAN. Perhatikan pada notasi $[T]_{B',B}$ subskrip sebelah kanan adalah sebuah basis untuk domain *T*, dan subskrip sebelah kiri adalah sebuah basis untuk ruang bayangan dari *T* (Gambar 8.4.3). Selanjutnya, perhatikan bagaimana subskrip *B* tampak "saling menghilangkan" dalam Rumus (4a) (Gambar 8.4.4).

Matriks Operasional Linear Dalam kasus yang spesifik di mana *V* = *W* (sehingga *T: V* → *V* adalah sebuah operator linear) merupakan suatu hal yang umum untuk menganggap bahwa *B* = *B'* Ketika membentuk sebuah matriks untuk *T*. Dalam kasus ini, matriks yang dihasilkan disebut ***matriks untuk T berkenaan dengan basis B*** (*matriks for T with respect to the basis B*) dan umumnya dinotasikan dengan $[T]_B$ dan bukannya dengan $[T]_{B',B}$. Jika *B* = {u_1, u_2, …, u_n } maka dalam kasus ini Rumus (4) dan (4a) berubah menjadi

$$[T]_B = [[T(u_1)]_{B'} | [T(u_2)]_{B'} | \ldots | [T(u_n)]_{B'}]$$

dan

$$[T]_B[x]_B = [T(x)]_B$$

Secara informal, (4a) dan (5a) menyatakan bahwa *matriks untuk T dikalikan dengan matriks koordinat untuk x adalah matriks koordinat untuk T(x)*.

CONTOH 1. Matriks untuk Transformasi Linear

Misalkan $T: P_1 \rightarrow P_2$ adalah transformasi linear yang didefinisikan oleh

$$T(p(x)) = xp(x)$$

Tentukan matriks untuk T berkenaam dengan basis standar

$$B = \{u_1, u_2\} \text{ dan } B' = \{v_1, v_2, v_3\}$$

di mana

$$u_1 = 1, \quad u_2 = x; \qquad v_1 = 1, \quad v_2 = x, \quad v_3 = x^2$$

Penyelesaian

Dari rumus yang diberikan untuk T kita memperoleh

$$T(u_1) = T(1) = (x)(1) = x$$

$$T(u_2) = T(x) = (x)(x) = x^2$$

Dari kedua persamaan di atas, kita dapat menentukan matriks koordinat untuk $T(u_1)$ dan $T(u_2)$ berkenaan dengan B'; matriks-matriks tersebut adalah

$$[T(u_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [T(u_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga, matriks untuk T berkenaan dengan B dan B' adalah

$$[T]_{B',B} = [[T(u^1)]_{B'} | [T(u^2)]_{B'}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CONTOH 2. Membuktikan Kebenaran rumus [4a]

Misalkan $T: P_1 \rightarrow P_2$ adalah transformasi linear yang diberikan dalam Contoh 1. Tunjukkan bahwa matriks

$$[T]_{B',B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(diperoleh dalam Contoh 1) memenuhi (4a) untuk setiap vector $x = a + bx$ pada P_1.

Penyelesaiaan

Karena $x = p(x) = a + bx$, kita memperoleh

$$T(x) = xp(x) = ax + bx^2$$

Untuk basis B dan basis B' dalam Contoh 1, kita dapat mengetahui bahwa

$$[x]_B = [ax+b]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [T(x)]_{B'} = [ax+bx^2] = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

Dengan demikian,

$$[T]_{B'.B}[x]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix} = [T(x)]_{B'}$$

Sehingga (4a) terbukti berlaku.

CONTOH 3. Matriks untuk Transformasi Linear

Misalkan $T: R^2 \to R^3$ adalah transformasi linear yang didefinisikan oleh

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -5x_1 + 13x_2 \\ -7x_1 + 16x_2 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks untuk transformasi T berkenaan dengan basis $B = \{u_1, u_2\}$ untuk R^2 dan basis B' = $\{v_1, v_2, v_3\}$ untuk R^3, di mana

$$u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ u_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}; \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaiaan

Dari rumus untuk T,

$$T(u_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad T(u_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Dengan menyatakan kedua vaktor ini sebagai kombinasi linear dari v_1, v_2, dan v_3 kita memperoleh (buktikan)

$$T(u_1) = v_1 - 2v_3, \qquad T(u_1) = 3v_1 + v_2 - v_3$$

Dengan demikian,

$$[T(u_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad [T(u_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$[T]_{B'.B}=[[T(u_1)]_{B'}|[T(u_2)]_{B'}]=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

CONTOH 4. Membuktikan Kebenaran Rumus [5a]

Misalkan $T: R^2 \rightarrow R^3$ adalah operator linear yang didefinisikan oleh

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\ -2x_1+4x_2\end{bmatrix}$$

dan misalkan $B = \{u_1, u_2\}$ adalah basisnya, di mana

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\qquad u_2=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

a) Tentukan $[T]_{B'}$
b) Buktikan bahwa (5a) berlaku untuk setiap vector *x* pada R^2.

Penyelesaiaan (a). Dari rumus yang diberikan untuk *T*,

$$T(u_1)=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}=2u_1,\qquad T(u_2)=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix}=3u_2$$

sehingga

$$[T(u_1)]_B=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}\quad \text{dan}\quad [T(u_2)]_B=\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}$$

Sebagai konsekuensinya,

$$[T]_B=[[T(u_1)]_B|[T(u_2)]_B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

Penyelesaiaan (b). Jika

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{6}$$

adalah vector sebarang pada R^2, maka dari rumus yang diberikan untuk *T*

$$T(x)=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\ -2x_1+4x_2\end{bmatrix} \tag{7}$$

Untuk menentukan $[x]_B$ dan $[T(x)]_B$, kita harus menyatakan (6) dan (7) sebagai kombinasi linear dari u_1 dan u_2. Hal ini menghasilkan persamaan vector

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

Dengan mengubah entri-entri yang bersesuaian ke dalam bentuk persamaan akan menghasilkan sistem linear berikut ini

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= x_1 \\ k_1 + 2k_2 &= x_2 \end{aligned} \qquad (10)$$

dan

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= x_1 + x_2 \\ c_1 + 2c_2 &= -2k_1 + 4k_2 \end{aligned} \qquad (11)$$

Dengan menyelesaikan (10) untuk memperoleh k_1 dan k_2 menghasilkan

$$k_1 = 2x_1 - x_2, \qquad k_2 = -x_1 + x_2$$

sehingga

$$[x]_B = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

dan dengan menyelesaikan (11) untuk memperoleh c_1 dan c_2 menghasilkan

$$c_1 = 4x_1 - 2x_2, \qquad c_2 = -3x_1 + 3x_2$$

sehingga

$$[T(x)]_B = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian

$$[T]_B[x]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = [T(x)]_B$$

sehingga (5a) terbukti berlaku.

Matriks Operator Identitas

CONTOH 5. Matriks Operator Identitas

Jika $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ adalah sebuah basis untuk ruang vektor berdimensi terhingga V dan $I: V \to V$ adalah operator identitas pada V, maka

$$I(u_1) = u_2, \qquad I(u_2) = u_2, \ldots, \qquad I(u_n) = u_n$$

Sehingga

$$[I(u_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [I(u_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad [I(u_n)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian,

$$[I]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

Sebagai konsekuensinya, matriks dari operator identitas berkenaan dengan suatu basis sebarang adalah matriks identitas $n \times n$. Hasil ini dapat diperkirakan dari Rumus (5a), karena rumus ini menghasilkan

$$[I]_B[x]_B = [I(x)]_B = [x]_B$$

Yang konsisten dengan fakta bahwa $[I]_B = I$

Teorema 8.4.1

Jika $T: R^n \to R^m$ adalah sebuah transformasi linear dan jika B dan B' masing-masing adalah basis-basis standar untuk R^n dan R^m, maka

$$[T]_{B'.B} = [T]$$

Teorema ini memberitahukan kita bahwa dalam kasus yang spesifik di mana T memetakan R^n ke R^m, matriks untuk T berkenaan dengan basis standar adalah matriks standar untuk T. Dalam kasus yang spesifik ini Rumus (4a) pada subbab ini dapat disederhanakan menjadi

$$[T]x = T(x)$$

Mengapa Matriks Transformasi Linear Dianggap Penting Terhadap dua alasan penting untuk mempelajari matriks transformasi linear umum, yang satu bersifat teoritis dan yang lainnya lebih bersifat praktis:

- Jawaban bagi pernyataan teoritis mengenai struktur transformasi linear umum pada ruang vector berdimensi terhingga seringkali dapat diperoleh hanya dengan mempelajari transformasi matriks. Hal ini dibahas secara lebih mendalam pada kuliah aljabar linear lanjutan, namun kita akan sedikit membahas permasalahan ini pada subbab selanjutnya.
- Matriks ini memungkinkan kita untuk menghitung bayangan dari berbagai vector dengan menggunakan perkalian matriks. Perhitungan semacam ini dapat dilakukan secara cepat dengan menggunakan computer.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\text{Perhitungan}", "\text{langsung}"'] \arrow[d, "(1)"'] & T(x) \\
{[x]_B} \arrow[r, "\text{Kalikan dengan } {[T]_{B'.B}}", "(2)"'] & {[T(x)]_B} \arrow[u, "(3)"']
\end{tikzcd}
$$

Gambar 8.4.2

Untuk lebih mengfokuskan perhatian kita pada gagasan kedua, misalkan $T: V \rightarrow W$ sebagai sebuah transformasi linear. Sebagaimana ditunjukkan dalam Gambar 8.4.5, matriks $[T]_{B'.B}$ dapat digunakan untuk menghitung $T(x)$ dalam tiga langkah dengan mengikuti prosedur *tidak langsung* sebagai berikut:

1) Hitung matriks koordinat $[x]_B$.
2) Kalikan $[x]_B$ pada sisi kiri dengan $[T]_{B'.B}$ sehingga menghasilkan $[T(x)]_{B'}$.
3) Bentuk Kembali $T(x)$ dari matriks koordinatnya $[T(x)]_{B'}$.

CONTOH 6. Operator linear pada P_2

Misalkan T: $P_2 \rightarrow P_2$ adalah operator linear yang didefinisikan oleh

$$T\big(p(x)\big) = p(3x - 5)$$

Yaitu, $T(c_0 + c_1x + c_2x^2) = c_0 + c_1(3x - 5) + c_2(3x - 5)^2$.

a. Tentukan $[T]_B$ berkenaan dengan basis B = (1, x, x^2).

b. Gunakan prosedur tidak langsung untuk menghitung T(1+2x+3x^2).

c. Periksalah hasil yang diperoleh pada bagian (b) dengan cara menghitung T(1+2x+3x^2) secara langsung.

Penyelesaian (a). Dari rumus untuk T.

T(1)=1, T(x) = 3x-5, T(x^2) = $(3x-5)^2$ = $9x^2$-30x+25

Sehingga

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [T(x)]_B = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [T(x^2)]_B = \begin{bmatrix} 25 \\ -30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian,

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian (b). Matriks koordinat bagi vektor $p = 1 + 2x+3x^2$. Relatif terhadap *B* adalah

$$[p]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga, dari (5a)

$$[T(1 + 2x + 3x^2)]_B = [T(p)]_B = [T]_B[p]_B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ -84 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Dari mana kita memperoleh

$$T(1 + 2x + 3x^2) = 66 - 84x + 27x^2$$

Penyelesaian (c). melalui perhitungan langsung

$$T(1 + 2x + 3x^2) = 1 + 2(3x - 5) + 3(3x - 5)^2$$

$$= 1 + 6x - 10 + 27x^2 - 90x + 75$$

$$= 66 - 84x + 27x^2$$

Yang konsisten dengan hasil bagian (b).

Matriks Komposisi dan Matriks Transformasi Invers kita akan mengetengahkan dua teorema yang merupakan generalisasi dari rumus (21) subbab 4.2 dan rumus (1) subbab 4.3. pembuktian untuk kedua teorema ini diabaikan.

Teorema 8.4.2

Jika $T_1 = U \rightarrow V$ dan $T_2 = V \rightarrow W$ adalah transformasi linear, dan jika B, B", dan B' masing-masing adalah basis untuk U, V, dan W, maka

$$[T_2 o T_1]_{B',B} = [T_2]_{B',B"}[T_1]_{B",B}$$

Teorema 8.4.3

Jika $T = U \rightarrow V$ adalah sebuah operator linear, dan jika B, adala sebuah basis untuk V, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen.

a). T adalah satu ke satu

b). $[T]_B$ dapat dibalik

selanjutnya, dengan syarat ekuivalensi tersebut berlaku.

$$[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}$$

CATATAN. Pada (13), perhatikan bagaimana subskrip bagian dalam *B"* (basis untuk ruang vektor antara *V*) terlihat "saling menghilangkan", sehingga hanya menyisahkan basis-basis untuk domain dan ruang bayangan komposisi sebagai subskrip (gambar 8.4.6). Hilangnya subskrip bagian dalam ini memungkinkan kita memperluas. Rumus (13) hingga mencakup komposisi dari tiga transformasi linear (Gambar 8.4.7).

CONTOH 7. Menggunakan Teorema 8.4.2

Misalkan $T_1: P_1 \to P_2$ adalah transformasi linear yang didefinisikan oleh

$$T_1(p(x)) = xp(x)$$

dan misalkan $T_2: P_2 \to P_2$ adalah operator linear yang didefinisikan oleh

$$T_2(p(x)) = p(3x - 5)$$

Maka konposisi $(T_2\ o\ T_1): P_1 \to P_2$ diberikan oleh

$$(T_2\ o\ T_1)\big(p(x)\big) = T_2(T_1(p(x))) = T_2(xp(x)) = (3x-5)p(3x-5)$$

Sehingga, jika $p(x) = c_0 + c_1$, maka

$$\begin{aligned}(T_2\ o\ T_1)(c_0 + c_1x) &= (3x-5)(c_0 + c_1(3x-5)\\ &= c_0(3x-5) + c_1(3x-5)^2 \qquad (16)\end{aligned}$$

Pada contoh ini, P_1 memainkan peran *U* dalam Teorema 8.4.2 dan P_2 memainkan peran *V* dan *W*; dengan demikian kita dapat menganggap bahwa *B' = B"* dalam (13) sehingga rumus tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$[T_2oT_1]_{B',B} = [T_2]_{B',B"}[T_1]_{B",B} \qquad (17)$$

Marilah kita memilik *B* = {1, x} sebagai basis untuk P_1 dan *B'* = (1, *x*, x^2} sebagai basis untuk P_2. Kita telah menunjukkan dalam Contoh 1 dan Contoh 6 bahwa

$$[T]_{B'.B} = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [T_2]_{B'} = \begin{bmatrix}1 & -5 & 25\\0 & 3 & -30\\0 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

Sehingga, dari (17) kita memperoleh

$$[T_2oT_1]_{B',B} = \begin{bmatrix}1 & -5 & 25\\0 & 3 & -30\\0 & 0 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & 25\\3 & -30\\0 & 9\end{bmatrix} \qquad (18)$$

Untuk memeriksa kebenaran hasil ini, kita akan menghitung $[T_2oT_1]_{B',B}$ secara langsung dengan menggunakan Rumus (4). Karena *B* = {1, *x*}, maka dengan $u_1 = 1$ dan $u_2 = x$ diperoleh

$$[T_2 o T_1]_{B',B} = [\{[T_2 o T_1]\}_{B'} | [(T_2\ o\ \ T_1)(x)]_{B'}] \qquad (19)$$

Dengan menggunakan (16) menghasilkan

$$(T_2\ o\ T_1)(1) = 3x - 5 \quad \text{dan} \quad (T_2\ o\ T_1)(x) = (3x-5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

Karena *B*' = {1, *x*, *x*²}, kita dapat mengetahui bahwa

$$[(T_2 o T_1)(1)]_{B'} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [(T_2 o T_1)(x)]_{B'} = \begin{bmatrix} 25 \\ -30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan kedua hasil di atas ke dalam (19) menghasilkan

$$[T_2 o T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 3 & -30 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Yang konsisten dengan (18).

C. MENGECEK PEMAHAMAN

Untuk meningkatkan pemahaman kalian tentang Matriks Transformasi linear Umum saatnya latihan mandiri. Silakan kerjakan soal berikut!

SOAL LATIHAN

1. Misalkan $T : R^2 \to R^2$ adalah Suatu Transformasi Linear yg didefinisikan Oleh $T(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2, 4x_1 + x_2)$
   a) Tentukan matriks yang merepresantasikan transformasi linear T
   b) Hitung hasil transformasi dari vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. Di berikan Transformasi linear $T : R^2 \to R^3$ dengan definisi

   $$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 0 \\ 2x + 3y \end{bmatrix}$$

   Tentukan matriks representase T relatif terhadap basis standar dari B di R^2
   Kebasis standar B' di $R3$