Nama :____ **Tanggal:** ________________

Tingkat: ____________

Pokok Bahasan/ Pembelajaran :

Sasaran Pembelajaran:

Di akhir modul, mahasiswa dapat:

1. Memahami konsep dasar nilai eigen dan vektor eigen.
2. Menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks.

Materi:

Nilai dan Vektor Eigen

Referensi:

1. Anton, Howard. (2000). Dasar-dasar Aljabar Linear Jilid 1 Edisi 7. Interaksara: Batam
2. Rainarli, E dan Dewi, K. E. (2011). *Diktat Perkuliahan Aljabar Linear dan Matriks Edisi 1.* Unikom: Bandung [Online]
3. Gozali, S. M. (2010). *Aljabar Linear.* UPI: Bandung [Online]

A. TINJAUAN PENDAHULUAN

Pendahuluan

Nilai eigen dan **vektor eigen** memberikan wawasan yang mendalam tentang sifat dasar dari transformasi linear yang diwakili oleh matriks. Secara intuitif, jika kita memikirkan suatu matriks sebagai operator yang memetakan vektor dari suatu ruang vektor ke ruang vektor yang lain, maka vektor-vektor yang tidak berubah arah oleh operator ini (hanya berubah panjangnya) disebut sebagai vektor eigen, dan faktor perubahan panjang tersebut adalah nilai eigen yang sesuai.

B. MATERI PEMBELAJARAN

Konten/Isi

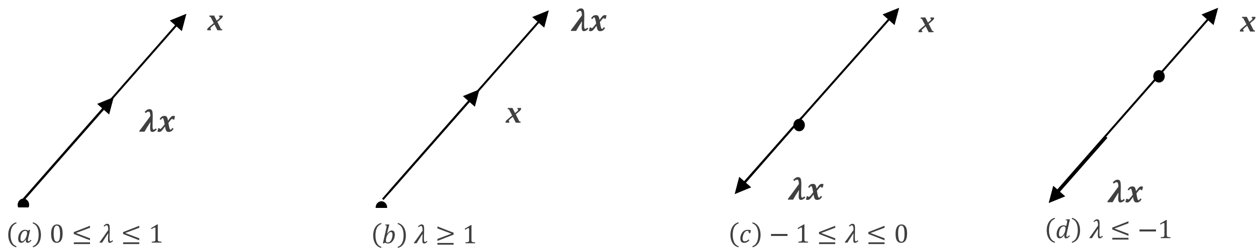
Definisi

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vector taknol $\boldsymbol{x}$ pada R^n disebut ***vector eigen*** (*eigenvector*) dari A jika $\boldsymbol{Ax}$ adalah sebuah kelipatan scalar dari $\boldsymbol{x}$; jelasnya,

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$$

untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut ***nilai eigen*** (*eigenvalue*) dari A, dan $\boldsymbol{x}$ disebut sebagai vector eigen dari A yang ***terkait*** dengan λ.

Dalam R^2 dan R^3, perkalian dengan $\boldsymbol{A}$ memetakan setiap vector eigen $\boldsymbol{x}$ dari $\boldsymbol{A}$ (jika memang ada) ke garis yang sama melewati titik asal tempat di mana $\boldsymbol{x}$ berada. Bergantung pada tanda dan besarnya nilai eigen $\boldsymbol{\lambda}$ yang berkaitan dengan ***x***, operator linear ***Ax* = $\boldsymbol{\lambda x}$** akan memperkecil atau memperbesar ***x*** dengan vector $\boldsymbol{\lambda}$, dan membalikkan arahnya apabila $\boldsymbol{\lambda}$ adalah negatif (Gambar 7.1.1).



Gambar 7.1.1

CONTOH 1. Vektor Eigen dari Matriks 2×2

Vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vector eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

yang terkait dengan nilai eigen $\lambda = 3$, karena

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{3x}$$

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks *A*, *n* × *n*, kita menuliskan kembali ***Ax* = $\boldsymbol{\lambda x}$** sebagai

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda I x}$$

atau secara ekuivalen

$$(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad \textbf{(1)}$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi taknol dari persamaan ini. Akan tetapi, Persamaan (1) memiliki Solusi taknol jika dan hanya jika

$$\boldsymbol{det(\lambda I - A)x = 0}$$

Persamaan ini disebut ***persamaan karakteristik*** (*characteristic equation*) matriks *A*; skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen *A*. Apabila diperluar lagi, determinan $det(\lambda I - A)$ adalah sebuah polinomalia *p* dalam variabel λ yang disebut sebagai ***polynomial karakteristik*** (*characteristic polynomial*) matriks *A*.

Dapat ditunjukkan (Latihan 15) bahwa jika *A* adalah sebuah matriks *n* × *n*, maka polynomial karakteristik *A* memiliki derajat *n* dan koefisien variabel λ^n adalah 1; jelasnya, polynomial karakteristik *p(x)* dari sebuah matriks *n* × *n* memiliki bentuk

$$p\lambda = det(\lambda I - A) = \lambda^n - c^{1\lambda^{n-1}} + \cdots + c_n$$

Berdasarkan Teorema Dasar Aljabar bahwa persamaan karakteristik

$$\lambda^n - c^{1\lambda^{n-1}} + \cdots + c_n = 0$$

memiliki sebanyak-banyaknya *n* solusi yang berbeda, sehingga sebuah matriks $n \times n$ memiliki sebanyak-banyaknya *n* nilai eigen yang berbeda.

CONTOH 2. Nilai Eigen dari Matriks 3 × 3

Tentukan nilai-nilai eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

Polynomial karakteristik *A* adalah

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

Nilai-nilai eigen dari *A* oleh karenanya harus memenuhi persamaan kubik

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0 \qquad (2)$$

Untuk menyelesaikan persamaan ini, kita akan mulai dengan mencari solusi-solusi bilangan bulatnya. Pekerjaan ini dapat jauh disederhanakan apabila kita memanfaatkan fakta bahwa semua solusi bilangan bulat (jika memang ada) bagi sebuah persamaan polynomial dengan koefisien-koefisien bilangan bulat.

$$\lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

haruslah merupakan faktor-faktor pembagi dari konstanta c_n. Sehingga, Solusi bilangan bulat yang mungkin dari (2) hanyalah faktor-faktor pembagi dari bilangan -4, yaitu ± 1, ± 2, ± 4. Dengan mensubstitusikan secara berturut-turut nilai-nilai ini kedalam (2), akan menghasilkan $\lambda = 4$ sebagai sebagai solusi bilangan bulatnya. Sebagai konsekuensinya, $\lambda - 4$ haruslah merumakan salah satu faktor dari sisi kiri (2). Dengan membagi $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$ dengan $\lambda - 4$ akan menunjukkan bahwa (2) dapat dituliskan sebagai

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

Sehingga, solusi-solusi dari (2) yang masih belum diketahui memenuhi persamaan kuadratik

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

yang dapat diselesaikan dengan rumus kuadratik. Dengan demikian, nilai-nilai eigen dari *A* adalah

$$\lambda = 4, \qquad \lambda = 2 + \sqrt{3}, \qquad \text{dan} \qquad \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

CONTOH 3. Nilai Eigen dari Matriks Segitiga Atas

Tentukan nilai-nilai eigen dari matriks segitiga atas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian.

Dengan mengingat bahwa determinan sebuah matriks segitiga adalah hasilkali entri-entrinya yang terletak pada diagonal utama (Teorema 2.2.2), kita memperoleh

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{44} \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44})$$

Sehingga, persamaan karakteristiknya

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0$$

dan nilai-nilai eigennya adalah

$$\lambda = a_{11}, \qquad \lambda = a_{22}, \qquad \lambda = a_{33}, \qquad \lambda = a_{44}$$

yang tepat merupakan entri-entri diagonal dari matriks *A*.

Teorema 7.1.1

Jika A adalah sebuah matriks segitiga n × n (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka nilai-nilai eigen dari A adalah entri-entri yang terletak pada diagonal utama matriks A.

CONTOH 4. Nilai Eigen dari Matriks Segitiga Bawah

Dengan memeriksa secara seksama, nilai-nilai eigen dari matriks segitiga bawah

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

adalah $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{2}{3}$, dan $\lambda = -\frac{1}{4}$.

CATATAN. Dalam soal-soal aplikatif, matriks *A* seringkali berukuran sedemikian besar sehingga perhitungan persamaan karakteristiknya menjadi tidak praktis. Sebagai akibatnya, berbagai metode aproksimasi digunakan untuk memperoleh nilai-nilai eigennya.

Nilai Eigen Kompleks Bukanlah hal yang mustahil apabila persamaan karakteristik sebuah matriks yang entri-entrinya bilangan real memiliki Solusi yang kompleks. Sebahai contoh, polynomial karakteristik dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

adalah

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

sehingga persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^2 + 1 = 0$, dan solusinya adalah bilangan imajiner $\lambda = i$ dan $\lambda = -i$. Dengan demikian, kita terpaksa berurusan dengan nilai eigen yang kompleks, bahkan untuk matriks real sekalipun. Hal ini, pada gilirannya akan membawa kita untuk mempertimbangkan kemungkinan terdapat ruang vector kompleks, yaitu ruang vector semacam ini akan dibahas dalam Bab 10. Untuk saat ini, kita hanya akan membahas nilai eigen kompleks, sedangkan pembahasan mengenai vector eigen akan dibatasi hanya pada matriks-matriks yang memiliki nilai eigen real.

Teorema berikut ini merangkumkan pembahasan kita sejauh ini.

Teorema 7.1.2 Pernyataan-pernyataan yang Ekuivalen

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$ dan λ adalah sebuah bilangan real, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen.

a) λ adalah sebuah nilai eigen dari A.
b) Sistem persamaan $(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ memiliki Solusi nontrivial.
*c) Terdapat sebuah vector taknol $\boldsymbol{x}$ pada **R**^{n} sedemikian rupa sehingga $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda x}$.*
d) λ adalah sebuah solusi dari persamaan karakteristik $det(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Menentukan Basis untuk Ruang Eigen Setelah kita mengetahui bagaimana cara menentukan nilai eigen, kita akan mengalihkan perhatian kepada masalah penentuan vector eigen. Vector-vektor eigen matriks *A* yang terkait dengan sebuah nilai eigen λ adalah vector-vektor taknol x yang memenuhi persamaan $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda x}$. Dengan kata lain, vector-vektor eigen yang berkaitan dengan λ adalah vector-vektor taknol di dalam ruang solusi $(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Kita menyebut ruang solusi ini sebagai ***ruang eigen*** (*eigenspace*) dari matriks *A* yang berkaitan dengan λ.

CONTOH 5. Basis untuk Ruang Eigen

Tentukan basis-basis untuk ruang eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaiaan

Persamaan karakteristik matriks *A* adalah $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$, atau dalam bentuk terfaktorkan, $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$ (buktikan); sehingga, nilai-nilai eigen dari *A* adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$, dan dengan demikian terdapat dua ruang eigen dari *A*.

Menurut definisinya,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah vector eigen dari matriks *A* yang terkait dengan λ jika dan hanya jika ***x*** adalah sebuah nolusi nontrivial dari $(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, yaitu

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Jika $\lambda = 2$, maka (3) menjadi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan sistem ini akan menghasilkan (buktikan)

$$x_1 = -s, \qquad x_2 = t, \qquad x_3 = s$$

Sehingga, vector eigen dari *A* yang terkait dengan $\lambda = 2$ adalah vector-vektor taknol yang berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{dan} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bebas linear, vector-vektor ini membentuk sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = 2$.

Jika $\lambda = 1$, maka (3) menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan sistem ini akan menghasilkan (buktikan)

$$x_1 = -2s, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = s$$

Dengan demikian, vector eigen yang terkait dengan $\lambda = 1$ adalah vector-vektor taknol yang berbentuk

$$\begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sehingga} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = 1$.

Pangkat Suatu Matriks Setelah nilai eigen dan vector eigen suatu matriks *A* diperoleh, adalah hal yang mudah untuk menentukan nilai eigen dan vector eigen dari pangkat bilangan bulat positif sebarang dari matriks *A*; sebagai contoh, jika λ adalah nilai eigen dari *A* dan *x* adalah vector eigen yang terkait dengan λ, maka

$$\boldsymbol{A^2x} = \boldsymbol{A(Ax)} = \boldsymbol{A(\lambda x)} = \boldsymbol{\lambda(Ax)} = \boldsymbol{\lambda(\lambda x)} = \boldsymbol{\lambda^2 x}$$

yang menunjukkan bahwa λ^2 adalah nilai eigen dari A^2 dan x adalah vector eigen yang terkait dengannya. Secara umum, kita memperoleh hasil sebagai berikut.

Teorema 7.1.3

Jika k adalah bilangan bulat positif, λ adalah nilai eigen dari suatu matriks A, dan x adalah vector eigen yang terkait dengan λ, maka λ^k adalah nilai eigen dari A^k dan x adalah vector eigen yang terkait dengannya.

CONTOH 6. Menggunakan Teorema 7.1.3

Dalam Contoh 5 kita telah menunjukkan bahwa nilai-nilai eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

adalah $\lambda = 2$ dan $\lambda = 1$, sehingga dari Teorema 7.1.3 baik $\lambda = 2^7 = 128$ dan $\lambda = 1^7 = 1$ adalah nilai-nilai eigen dari A^7. Kita juga telah menunjukkan bahwa

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

adalah vector-vektor eigen dari *A* yang terkait dengan nilai eigen $\lambda = 2$, sehingga dari Teorema 7.1.3 keduanya juga merupakan vector-vektor eigen dari A^7 yang terkait dengan $\lambda = 2^7 = 128$. Demikian pula, vector eigen

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dari *A* yang terkait dengan nilai eigen $\lambda = 1$ juga merupakan vector eigen dari A^7 yang terkait dengan $\lambda = 1^7 = 1$.

Nilai Eigen dan Keterbalikan Teorema berikutnya menetapkan suatu hubungan antara nilai eigen dengan keterbalikan sebuah matriks.

Teorema 7.1.4

Sebuah matriks bujusangkar A dapat dibalik jika dan hanya jika $\lambda = 0$ bukan merupakan nilai eigen dari A.

Bukti. Asumsikan bahwa *A* adalah matriks $n \times n$ dan perhatian terlebih dahulu bahwa $\lambda = 0$ adalah Solusi dari persamaan karakteristik

$$\lambda^{\mathrm{n}} - c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

jika dan hanya jika konstanta c_n adalah nol. Sehingga, akan cukup bagi kita untuk membuktikan bahwa *A* dapat dibalik jika dan hanya jika $c_1 \neq 0$. Namun

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^{\mathrm{n}} - c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c$$

atau dengan menetapkan $\lambda = 0$,

$$\det(-A) = c_n \qquad \text{atau} \qquad (-1)^n \det(A) = c_n$$

Berdasarkan persamaan terakhir, $\det(A) = 0$ jika dan hanya jika $c_n = 0$, dan hal ini pada gilirannya akan mengimplikasikan bahwa *A* dapat dibalik jika dan hanya jika $c_n \neq 0$.

CONTOH 7. Menggunakan Teorema 7.1.4

Matriks *A* dalam Contoh 5 dapat dibalik karena memiliki nilai-nilai eigen $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$, yang mana keduanya adalah bukan nol. Kami akan menyerahkan kepada Anda untuk memastikan kebenaran kesimpulan ini dengan cara menunjukkan bahwa $\det(A) \neq 0$.

Teorema 7.1.5 Pernyataan-pernyataan yang Ekuivalen

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, dan jika $T_A: R^n \rightarrow R^n$ yang adalah sebuah perkalian dengan A, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen.

a) *A dapat dibalik*
b) ***Ax = 0** hanya memiliki solusi trivial.*
c) *Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah I_n.*
d) *A dapat dinyatakan sebagai hasilkali dari matriks-matriks elementer.*
e) ***Ax = b** konsisten untuk setiap matriks **b,** $n \times 1$.*
f) ***Ax = b** memiliki tepat satu solusi untuk setiap matriks **b,** $n \times 1$.*
g) $\det(A) \neq 0$
h) *Range dari T_A adalah R^n.*
i) *T_A adalah satu ke satu.*
j) *Vector-vektor kolom dari A bebas linear.*
k) *Vector-vektor baris dari A bebas linear.*
l) *Vector-vektor kolom dari A merentang R^n.*
m) *Vector-vektor baris dari A merentang R^n.*
n) *Vector-vektor kolom dari A membentuk basis untuk R^n.*
o) *Vector-vektor baris dari A membentuk basis untuk R^n.*
p) *A memiliki rank n.*
q) *A memiliki nulitas 0.*
r) *Komplemen orthogonal ruang nul dari A adalah R^n.*
s) *Komplemen orthogonal ruang baris dari A adalah {0}.*
t) *$A^T A$ dapat dibalik.*
u) *$\lambda = 0$ bukan merupakan sebuah nilai eigen dari A.*

Teorema ini menghubungkan semua topik utama yang telah kita pelajari hingga sejauh ini.

C. MENGECEK PEMAHAMAN

Untuk meningkatkan pemahaman kalian tentang Nilai Eigen dan Vektor eigen saatnya latihan mandiri. Silakan kerjakan soal berikut!

<u>SOAL LATIHAN</u>

1. Tentukan Persamaan karakteristik dari matriks-matriks berikut

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan Nilai eigen dan vektor eigen dari matrik berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$