INTEGRAL TAK TENTU – **JUMLAH REIMANN** – INTEGRAL TENTU – **LUAS BIDANG DATAR** – APLIKASI LUASAN – **VOLUME BENDA PUTAR** – APLIKASI INTEGRAL – **INTEGRAL SUBSTITUSI** – INTEGRAL PARSIAL

KALKULUS INTEGRAL

BERBASIS ETNO MATEMATIKA

Farid Gunadi ✦ Luthfiyati Nurafifah ✦ Farah Heniyati Santosa ✦ Diki Mulyana

Desember 2024

Universitas Wiralodra
Universitas Nahdlatul Wathan Mataram

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, atas rahmat dan karunia-Nya sehingga buku yang berjudul *Kalkulus Integral Berbasis Etnomatematika* ini dapat terselesaikan dengan baik. Buku ini hadir sebagai salah satu upaya untuk mengintegrasikan konsep matematika modern dengan kearifan lokal melalui pendekatan etnomatematika. Harapan kami, buku ini dapat menjadi panduan yang tidak hanya memperdalam pemahaman pembaca tentang kalkulus integral tetapi juga menumbuhkan apresiasi terhadap budaya dan teknologi.

Isi buku ini mencakup penjelasan materi kalkulus integral yang disajikan secara sistematis, dilengkapi dengan contoh soal dan pembahasannya untuk memudahkan pemahaman. Selain itu, tersedia soal-soal latihan yang dirancang untuk mengasah kemampuan pembaca dalam menerapkan konsep kalkulus integral pada berbagai permasalahan. Pendekatan berbasis etnomatematika yang digunakan dalam buku ini memberikan perspektif baru dalam pembelajaran matematika, di mana konsep-konsep integral dihubungkan dengan pola-pola budaya dan tradisi lokal.

Sebagai inovasi pembelajaran, buku ini juga memanfaatkan teknologi modern seperti aplikasi *GeoGebra* dan *Virtual Reality* untuk memberikan pengalaman belajar yang lebih interaktif dan menarik. *GeoGebra* digunakan untuk membantu visualisasi konsep-konsep kalkulus integral, sementara *Virtual Reality* memungkinkan pembaca untuk menjelajahi konsep-konsep tersebut dalam ruang tiga dimensi secara langsung. Kami yakin pendekatan ini dapat membantu pembaca memahami materi secara mendalam dan memperkuat kemampuan spasial mereka.

Kami menyadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kami sangat menghargai saran dan masukan dari para pembaca untuk perbaikan di masa mendatang. Semoga buku ini bermanfaat bagi mahasiswa, dosen, guru, dan seluruh pihak yang tertarik dalam bidang pendidikan matematika.

Akhir kata, kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan buku ini, terutama kepada Direktorat Pembelajaran dan Kemahasiswaan, Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Riset, dan Teknologi sebagai pemberi dana bantuan sehinga buku ini terselesaikan. Semoga buku ini dapat menjadi salah satu kontribusi positif dalam dunia pendidikan, khususnya dalam bidang matematika berbasis etnomatematika.

DAFTAR ISI

BAB 1
INTEGRAL TAK TENTU

Tujuan Pembelajaran:

1. Menganalisis defenisi integral tak tentu
2. Menganalisis aturan dasar integral tak tentu
3. Menggunakan aturan dasar integral tak tentu untuk menyelesaikan permasalahan.

Indikator:

Setelah pembelajaran mahasiswa diharapkan dapat :

1. Mengidentifikasi fakta pada integral tak tentu fungsi aljabar dan sifat-sifatnya
2. Menjelaskan pengertian integral tak tentu fungsi aljabar
3. Menjelaskan sifat-sifat integral tak tentu fungsi aljabar
4. Menjelaskan penerapan integral tak tentu fungsi aljabar

INTEGRAL TAK TENTU

Dalam matematika terdapat konsep yang saling berkebalikan (invers), semisal penjumlahan kebalikan dari penjumlahan, perkalian kebalikan dari pembagian dan perpangkatan kebalikan dari penarikan akar. Integral merupakan kebalikan (invers) dari turunan. Kegunaan integral dalam kehidupan sehari-hari banyak sekali, diantaranya menentukan luas suatu bidang, menentukan volume benda putar, menentukan panjang busur dan sebagainya. Integral tidak hanya dipergunakan di matematika saja. Banyak bidang lain yang menggunakan integral, seperti ekonomi, fisika, biologi, teknik dan masih banyak lagi disiplin ilmu yang lain yang mempergunakannya.

Integral merupakan antiturunan (lawan dari) turunan, maka untuk menemukan rumus integral kita beranjak dari turunan. Pada saat kalian mempelajari turunan, diberikan suatu fungsi dan kalian diminta untuk menentukan turunan fungsi tersebut. Namun, saat mempelajari integral, kalian akan diberikan turunan suatu fungsi dan kalian diminta untuk menemukan fungsi awal sebelum fungsi itu di turunkan. Unutk memahmi integral lebih mendalam, ayo lakukan kegiatan di bawah ini!

A. Mengidentifikasi dan Mengenal Integral Tak Tentu

Integral merupakan invers dari turunan. Dari argument ini, kita akan mengidentifikan dan mengenai integral tak tentu dari turunan fungsi.

Kegiatan 1

1. Kalian tentu masih ingat, mencari turunan dari suatu fungsi. Lengkapilah Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Identifikasi Turunan Fungsi

F(x)	F'(x) = $f(x)$
$\frac{1}{3}x^3$	x^2
$\frac{1}{3}x^3 + 1$	. . . .
$\frac{1}{3}x^3 + 0{,}5$	. . . .
$\frac{1}{3}x^3 + 3{,}5$	. . . .
$\frac{1}{3}x^3 + 10$	. . . .
$\frac{1}{3}x^3 + C, C \in R$	. . . .
. . . .	$\boldsymbol{x^n}$

2. Amati hasil turunan fungsi F(x) pada kolom ke-2 di atas. Apakah setiap fungsi F(x) pada kolom ke-1 yang berbeda (konstantanya berbeda) memberikan turunan fungsi $f(x)$ yang sama? Mengapa?
3. Bagaimana mengenai banyak integral dari suatu fungsi $f(x) = x^2$?
4. Berdasarkan penjelasan di atas, maka integral dari fungsi $f(x) = x^2$ adalah …. atau dapat dinyatakan oleh

$$\int x^2 \; dx = \ldots . + \ldots .$$

Perhatikan Kembali Tabel 1, Apabila kita ilustrasikan kondisi tersebut, maka dapat dinyatakan seperti bagan di bawah ini.

$$F(x)+\mathrm{C} \quad \underset{\text{Pengintegralan}}{\overset{\text{Pendefrensialan}}{\rightleftarrows}} \quad F'(x)$$

Gambar 1. Konsep Integral Tak Tentu sebagai Anti Turunan

Jika kita mengetahui satu fungsi F(x) yang memenuhi F'(x) = $f(x)$, maka kita dapat mencari semua fungsi yang mempunyai turunan $f(x)$ juga. Fungsi ini berbentuk F(x) + C dengan C konstanta. Fungsi inilah yang disebut dengan integral tak tentu dari $f(x)$. Kata tak tentu perlu ditambahkan karena memuat konstanta sebarang. Integral dari fungsi $f(x)$.

Secara umum, operasi anti turunan menggunakan lambang Leibniz, yakni $\int \ldots . dx$ atau dibaca sebagai integral dari ...... terhadap x. Proses menghitung anti turunan atau integral dari fungsi $f\ (x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

Keterangan:

$\int$	: Lambang Leibniz untuk anti turunan (integral)
$f(x)$	: fungsi Integral
$F(x) + C$	: fungsi primitif
C	: konstanta integral

Kegiatan 2

1. Lengkapilah Tabel 2 berikut ini.

Tebel 2 Indentifikasi Rumus Umum Integral

F'(x) = $f(x)$ (Turunan Fungsi)	F(x) (Antiturunan)	Pola
1	x	$\frac{1}{0+1}x^{0+1}$
$2x$	x^2	$\frac{2}{1+1}x^{1+1}$
$3x^2$	x^3	$\frac{3}{2+1}x^{2+1}$
$8x^3$	$2x^4$	$\frac{8}{3+1}x^{3+1}$
	$5x^5$	$25x^4 \rightarrow \frac{25}{5}x^5 = \frac{25}{4+1}x^{4+1}$
. . . .	. . . .	. . .
$\boldsymbol{anx^{n-1}}$	$\boldsymbol{ax^n}$	$anx^{n-1} \rightarrow \frac{a}{1}x^n = \frac{an}{(n-1)+1}x^{(n-1)+1}$
$\boldsymbol{ax^n}$	?	$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$

2. Amati baris terakhir pada Tabel 2 di atas. Jadi, kesimpulan integral dari sembarang fungsi $f(x) = ax^n$, dengan $n \neq -1$ adalah . . . .

   atau dapat dinyatakan oleh

$$\int ax^n \ dx = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots$$

Contoh

1. Tentukan Integral dari $\int 3x \ dx$!

   Penyelesaian

   Untuk menyesaikan ini kita menggunkan bentuk akhir dari kegiatan sebelumnya, yaitu:

$$\int ax^n \ dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$

Sehingga diperoleh

$$\int 3x\ dx = \int 3x^1\ dx$$

$$= \frac{3}{\ldots\ +\ \ldots} x^{1+1} + C$$

$$= \frac{3}{2} + C$$

2. Lengkapilah proses integral di bawah ini!

a. $\displaystyle\int 5x^4\ dx = \frac{\cdots}{4+1} x^{\cdots + \cdots} + C = \ \ldots\ldots\ldots + C$

b. $\displaystyle\int -x^5\ dx = -\frac{\cdots}{\ldots\ +\ \ldots} x^{\cdots + \cdots}\ +\ \ldots . = \ \ldots.$

c. $\displaystyle\int \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\ dx = \ \ldots.$

d. $\displaystyle\int \frac{2}{x^{-4}}\ dx = \ \ldots.$

B. Mengenal Sifat-sifat integral

Pada bagian A di atas, kalian telah mengidentifikasi dan menganl integral dari sifat turuan fungsi, pada bagain ini kalain akan mengenal sifat-sifat yang berlaku pada integral. Dengan memahami sifat yang berlaku pada integral, kalian akan lebih mudah dalam menentukan integral suatu fungsi.

Sifat-sifat integral tak tentu

Misalkan k bilangan real, $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan fungsi yang dapat ditentukan integralnya, maka:

1. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \rightarrow n \neq -1$
2. $\int k\,dx = kx + C$
3. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
4. $\int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1}\,dx = \ln x + C$
5. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Contoh:
Perhatikan dan lengkapi proses integral berikut.

1. $\int \left(2x - \frac{1}{x} + 3\right)dx = \int 2x\,dx - \int \frac{1}{x}dx + \int 3\,dx$ Sifat ke-5

$= 2\int x^1\,dx - \int x^{-1} + \int 3\,dx$ Sifat ke-3 & 4

$= 2\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right] - \ln x + 3x + C$ Sifat ke-1, 2 & 4

$= 2\left[\frac{x^2}{2}\right] - \ln x + 3x + C$

$= x^2 - \ln x + 3x + C$

2. $\int \left(\frac{3}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right)dx = \int \ldots\,dx + \int \ldots\,dx - \int \ldots\,dx$ Sifat ke-5

$= \frac{3}{2}\int \ldots dx + \ \ldots \int x^2\,dx - \frac{1}{2}\int \ldots\,dx$ Sifat ke-3

$$= \cdots \left[\frac{x^{3+1}}{3+1}\right] + \frac{5}{2}\left[\frac{x^{\cdots+1}}{2+\cdots}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right] + C \quad \text{Sifat ke-1}$$

$$= \frac{\dots}{\dots}x^4 + \frac{\dots}{6}x^3 - \ \dots \ + C$$

Pada proses integral akan dijumpai beberapa kasus, dimana unutk dapat menyelesaikan proses integral tersebut dibutuhkan Teknik-teknik agar dapat mempermudah proses pengintegralan yang dilakukan. Berikut akan dipaparkan terkait beberapa kasus dalam proses integral.

1. Integral melibatkan bentuk perkalian

Untuk menyelesaikan integral bentuk perkalian, sebelum di**integral**kan, perkaliannya diselesaiakan terlebih dahulu.

Contoh:

Perhatikan dan lengkapi proses integral berikut.

1. $\int 3x(5x - x^{-2} + 4x^{-1})dx = \int (15x^2 - 3x^{-1} + 12)\,dx$

$$= 15\int x^2\,dx - 3\int x^{-1}\,dx + \int 12\,dx \qquad \text{Sifat ke-3 \& 5}$$

$$= 15\left[\frac{x^{2+1}}{2+1}\right] - 3\ln x + 12x + C \qquad \text{Sifat ke-1, 2 \& 4}$$

$$= 5x^3 - 3\ln x + 12x + C$$

2. $\int (x+3)(2x-4)dx = \int (2x^2 - 4x + \ \dots - \ \dots)\ dx$

$$= \int (\ \dots + 2x - 12)\,dx$$

$$= 2\int x^2\,dx + 2\int \dots\ dx + \int \dots dx \qquad \text{Sifat ke-3 \& 5}$$

$$= \cdots\left[\frac{x^{\dots+\dots}}{\dots+1}\right] + 2\left[\frac{\dots^{1+\dots}}{\dots + \dots}\right] - 12x + C \qquad \text{Sifat ke-1 \& 2}$$

$$= \ \dots \ + \ \dots \ - \ \dots \ + C$$

3. $\int 2x(x-2)(x-7)dx = \int$ ....

2. Integral Bentuk Pembagian

Untuk menyelesaikan integral bentuk pembagian, sebelum di**integral**kan, pembagiannya diselesaikan terlebih dahulu.

Contoh:

Perhatikan dan lengkapi proses integral berikut.

1. $\int \frac{(6x^3 - 4x^2 + 8x)}{2x^3} dx = \int (3 - 2x^{-1} + 4x^{-2}) dx$

$= \int 3\, dx - 2 \int x^{-1}\, dx + 4 \int x^{-2}\, dx$ Sifat ke-…

$= 3x - 2 \ln x + 4 \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right] + C$ Sifat ke-…

$= 3x - 2 \ln x - 4x^{-1} + C$

2. $\int \frac{(5x^4 + 3x^3 - 2x + 1)}{3x^2} dx = \int (\frac{5}{3}x^2 + \ \ldots - \frac{\ldots}{\ldots}x^{-1} + \frac{1}{3}x^{\cdots}\ )\ dx$

$= \frac{\ldots}{\ldots} \int \ldots dx + \int x\ \ dx - \frac{2}{3} \int \ldots\ dx + \frac{\ldots}{\ldots} \int x^{-2}\, dx$ Sifat ke-…

$= \frac{5}{3}\left[\frac{x^{\cdots + \cdots}}{\ldots\ +\ \ldots}\right] + \left[\frac{x^{1+\cdots}}{\ldots\ + 1}\right] - \frac{2}{3} ln\, x + \frac{1}{3}\left[\frac{x^{\cdots + \cdots}}{-2\ +\ \ldots}\right] + C$ Sifat ke-…

$= \frac{\ldots}{\ldots}\ \ldots\ + \frac{1}{2}x^{\cdots} - \frac{\ldots}{\ldots}\ldots\ \ - \frac{1}{3}x^{-1} + C$

3. $\int \frac{6x^2(3x^5 - x^2 + 2x - 4)}{2x^2} dx = \cdots$

3. Integral Bentuk Pangkat

Untuk menyelesaikan integral bentuk pangkat, sebelum di**integral**kan fungsinya dipangkatkan dulu.

Contoh:

Perhatikan dan lengkapi proses integral berikut.

1. $\int (x+3)^2 dx = \int (x^2 + 6x + 9)\, dx$

$= \int \ldots dx - \ \ldots \int \ldots\ dx + \int 9\, dx$ Sifat ke-…

$$= \left[\frac{\dots^{2+\dots}}{\dots + \dots}\right] - 6\left[\frac{\dots^{\dots+\dots}}{\dots + \dots}\right] + 9x + C$$ Sifat ke-…

$$= \dots - \dots + \dots + C$$

2. $$\int (2x-4)^2 dx = \int (\dots - \dots + \dots)\ dx$$

$$= \dots \int \dots\ dx - \dots \int \dots\ dx + \int \dots\ dx$$ Sifat ke-…

$$= \dots \left[\frac{x^{\dots+\dots}}{\dots + \dots}\right] - \dots \left[\frac{x^{\dots+\dots}}{\dots + \dots}\right] + \dots + C$$ Sifat ke-…

$$= \frac{\dots}{\dots} \dots - \dots + 16x + C$$

3. $$\int (x-4)^3 dx = \cdots$$

4. $$\int \frac{(x-5)^2}{5x} dx = \cdots$$

4. Integral Bentuk Akar

Untuk menyelesaikan integral bentuk akar, akarnya diubah dulu ke bentuk pangkat pecahan.

Contoh:

Perhatikan dan lengkapi proses integral berikut.

1. $$\int x\sqrt{x}\, dx = \int x . x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right] + C$$ Sifat ke-1

$$= \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right] + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

2. $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right) dx = \int \left(\ldots^{\frac{\ldots}{\ldots}} + \ \ldots^{-\frac{\ldots}{\ldots}}\right)\ dx$

$$= \int \ldots^{\frac{\ldots}{\ldots}}\ dx + \int \ldots^{-\frac{\ldots}{\ldots}}\ dx$$ Sifat ke-5

$$= \left[\frac{x^{\frac{2}{3}+\ \ldots}}{\frac{2}{3}+1}\right] + \left[\frac{x^{-\frac{3}{2}+\ \ldots}}{-\frac{3}{2}+1}\right] + C$$ Sifat ke-1

$$= \frac{\ldots}{\ldots}\ x^{\frac{5}{3}} - 2\ x^{-\frac{\ldots}{\ldots}} + C$$

3. $\int 2x\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2x^2}{\sqrt{x}}\right) dx =$

4. $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x} + x\sqrt{2x}\right)}{x^2} dx =$

5. Integral Bentuk dengan Nilai Tentu

Seperti yang diketahui sebelumnya, integral tak tentu selalu memuat C (konstanta). Apakah nilai C ini dapat ditentukan? Tentu dapat, dengan syarat diketahui turunan fungsi $f(x) = F'(x)$ dan nilai fungsi $F(x)$. Hal ini juga dapat digunakan untuk menentukan fungsi $F(x)$ secara utuh (sudah tidak lagi memuat konstanta). Agar lebih jelasnya, lakukan kegiatan di bawah ini.

1. Diketahui $F'(x) = 4x - 3$ dan $F(2) = 9$, tentukan F(x)!

   Penyelesaian

$$F(x) = \int f(x)\ dx$$

$$= \int (4x - 3)\ dx$$

$$= \ \ .....-3x + C$$

$$= \ \ .....-3x + C$$

dan

$$F(2) = \ \ ....-\ 3.2 + C$$

$$9 = \ \ ....-\ 6 + C$$

$9 = \; . \; . \; . \; . + C$

$C = \; . \; . \; . \; .$ Jadi, $F(x) = . \; . \; . \; . \; - 3x + . \; . \; . \; .$

2. Diketahui $f'(x) = 5x - 3$ dan $f(2) = 18$. Tentukan f(x) !

   Penyelesaian

   $$f(x) = \int f'(x)\, dx$$

   $$= \int (5x - 3)\, dx$$

   $$= 5\int x\, dx - \int 3\, dx$$

   $$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

   Diketahui $f(2) = 18$, maka

   $f(2) = \ldots\ldots\ldots.. - 3(2) + C$

   $18 = \ldots\ldots\ldots\ldots.. + C$

   $C = \ldots\ldots$

   Jadi, $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots..\ldots..$

3. Diketahui gradien garis singgung suatu kurva adalah $2x - 7$. Jika kurva tersebut melalui titik (-1, 11), maka persamaan kurva dapat di cari sebagai berikut.

   Penyelesaian

   $F'(x) = f(x) = 2x - 7$

   $$F(x) = \int f(x)\; dx$$

   $$= \int (2x - 7)\, dx$$

   $= \; . \; . \; . \; . \; . - . \; . \; . \; . + C$

   $= \; . \; . \; . \; . \; . - . \; . \; . \; . + C$

   dan kurva melalui titik (-1, 11) artinya $F(-1) = 11$

   $F(-1) = \; . \; . \; . \; . - . \; . \; . \; . \; . \; . + C$

$$11 = \;.\;.\;.\;.-.\;.\;.\;.+C$$

$$11 = \;.\;.\;.\;.\;+C$$

$$C = \;.\;.\;.\;.$$

Jadi, persamaan kurvanya adalah $F(x) = .\;.\;.\;.\; - .\;.\;.\;. + .\;.\;.\;.$

4. Jika gradien garis singgung di titik (x, y) pada sebuah kurva yang melalui titik (3,4) ditentukan $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x + 5$, maka tentukan persamaan kurva tersebut!

   Penyelesaian

   $$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x + 5$$

   $$dy = (3x^2 - 8x + 5)dx$$

   $\int dy = \int (3x^2 - 8x + 5)dx$ integralkan kedua ruas

   $y =$ ….

   Diketahui titik $(x, y) = (3, 4)$, maka

   $4 = \ldots^3 - \ldots(\ldots.^2) + \ldots(\ldots) + C$

   $4 =$ … … … … … … … … … … ….

   $C =$ ….

   Jadi persamaan kurva adalah $y =$ …

Latihan

Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan baik dan benar!

1. Tentukan hasil dari:
   a. $\int (3x - 2)^2 dx$
   b. $\int \left(\frac{x^2+5x+4}{3x^3}\right) dx$
   c. $\int 2x\left(\sqrt{x^3} - \sqrt{x}\right)dx$
   d. $\int \left(5x + \frac{3}{x^3}\right) dx$
   e. $\int \frac{2x^3+x}{x^2} dx$

2. Tentukan rumus $f(x)$, jika diketahui:
   a. $f'(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}\ dan\ f(1) = \frac{1}{3}$
   b. $f'(x) = x - \sqrt{x}\ dan\ f(4) = -3$
   c. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}\ dan\ f(4) = 1$
3. Diketahui titik (3,2) terletak pada kurva f(x) dan gradien garis singgung di titik (x, y) pada kurva tersebut didefinisikan $y = 2x - 3$. Tentukan nilai $f(\frac{1}{2})$!
4. Gradien suatu kurva pada setiap titik (x, y) ditentukan oleh $\frac{dy}{dx} = 3ax^2 - ax$ dan kurva itu melalui titik $(0, -1)$ dan $(5,1)$. Tentukan nilai a.
5. Mengapa suatu fungsi memiliki banyak antiturunan dengan konstanta yang berbeda?tunjukkan dengan sebuah ilustrasi dari jawaban kalian!

BAB 2
JUMLAH REIMANN

Kompetensi Dasar :

1. Menganalisis defenisi notasi sigma dan integral tentu dengan tepat.
2. Menggunakan sifat – sifat notasi sigma dalam penyelesaian masalah yang berkaitan dengan integral tentu.
3. Memahami Jumlah Reimann sebagai dasar integral tentu
4. Menentukan integral tentu dengan menggunakan Jumlah Reimann

Indikator :

Setelah pembelajaran mahasiswa diharapkan dapat :

1. Mengidentifikasi notasi sigma
2. Menerapkan sifat-sifat notasi sigma dalam menyelesaikan masalah
3. Memahami Jumlah Reimann sebagai dasar integral tentu
4. Menentukan integral tentu dengan menggunakan Jumlah Reimann

A. NOTASI JUMLAH DAN SIGMA

Sebelum kita mempelajari integral tentu, sangat penting untuk memahami konsep dasar notasi jumlah dan sigma. Konsep ini menjadi pondasi utama dalam pengembangan integral tentu, karena integral tentu pada dasarnya melibatkan penjumlahan area di bawah kurva yang dapat direpresentasikan dengan notasi sigma. Dengan pemahaman yang baik tentang notasi jumlah dan sigma, proses transisi ke konsep integral tentu akan menjadi lebih mudah dan intuitif.

Mempelajari notasi sigma sebelum membahas integral tentu sangatlah penting karena notasi ini memungkinkan kita untuk merepresentasikan penjumlahan secara kompak dan sistematis, terutama ketika bekerja dengan jumlah yang sangat besar atau tak terhingga. Notasi sigma juga berfungsi sebagai alat untuk menyusun dan memahami konsep-konsep yang lebih kompleks seperti jumlah Riemann, yang merupakan langkah awal dalam pengenalan integral tentu. Tanpa pemahaman yang kuat tentang notasi sigma, siswa mungkin akan kesulitan dalam mengerti bagaimana integral tentu dibangun dan diterapkan dalam berbagai situasi.

1. Definisi Notasi Sigma

Notasi sigma adalah cara penulisan dalam matematika yang digunakan untuk merepresentasikan penjumlahan yang terbatas atau memiliki jumlah yang tertentu.

Perhatikan jumlah bilangan berikut ini.

a. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots\dots\dots + 100^3$

b. $a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots\dots\dots + a_n$

Bentuk jumlah dari a dan b di atas, dalam Matematika dapat dinyatakan dalam bentuk yang lebih kompak sebagai berikut.

a. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots\dots\dots + 100^3 = \sum_{i=1}^{100} i^3$

b. $a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots\dots\dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Dengan cara yang sama, ayo coba nyatakan jumlah dari bentuk-bentuk di bawah ini menjadi suatu bentuk yang lebih kompak.

a. $1^7 + 2^7 + 3^7 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + 50^7 = \dots\dots\dots$

b. $b^1 + b^2 + b^3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + b^n = \dots\dots\dots$

c. $f(c_1) + f(c_2) + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + f(c_n) = \dots\dots\dots$

Perhatikan beberapa bentuk penulisan pada persoalan yang disebutkan di atas. Di sana, Anda akan menemukan simbol $\sum$. Simbol ini adalah huruf besar sigma dalam alfabet Yunani, yang secara fonetik berpadanan dengan huruf 'S'. Simbol $\sum$ digunakan dalam matematika untuk menyatakan proses penjumlahan atau penambahan dari sekumpulan bilangan. Simbol ini menginstruksikan kita untuk menjumlahkan semua bilangan dalam suatu urutan tertentu, dimulai dari bilangan yang ditunjukkan di bawah tanda $\sum$ dan berakhir pada bilangan yang ditunjukkan di atas tanda $\sum$. Proses ini memungkinkan kita untuk menuliskan penjumlahan berurutan dengan cara yang lebih ringkas dan terstruktur. Memperhatikan penjelasan arti dari simbol $\sum$, maka persoalan di bawah ini dapat dinyatakan kembali dalam bentuk penjumlahan.

a. $\sum_{i=2}^{5} c_i = c_2 + c_3 + c_4 + c_5$

b. $\sum_{k=1}^{6} \frac{k^3}{2k-2} = \frac{1^3}{2(1)-2} + \frac{2^3}{2(2)-2} + \frac{3^3}{2(3)-2} + \frac{4^3}{2(4)-2} + \frac{5^3}{2(5)-2} + \frac{6^3}{2(6)-2}$

Dengan cara yang sama, cobalah uraikan bentuk notasi sigma berikut ini.

a. $\sum_{i=2}^{7} 2i - 1 =$ … … … … … … … … … …

b. $\sum_{k=1}^{5} \frac{(6k-1)}{2} =$ … … … … … … … … … …

c. $\sum_{i=2}^{6} 5i^3 =$ … … … … … … … … … … …

d. $\sum_{k=1}^{4} 2(5k^3 - 1) =$ … … … … … … … …

2. Sifat-sifat Notasi Sigma

Pada bagian A di atas, telah menganl notasi sigma, pada bagain ini akan ditunjukkan sifat-sifat yang berlaku pada operasi notasi sigma. Dengan memahami sifat yang berlaku pada notasi sigma, akan memudahkan dalam menentukan penyelesain yang dibutuhkan.

Sifat-sifat Notasi Sigma

Misalkan (a_1) dan (b_1) merupakan dua barisan dan k adalah suatu konstanta, maka berlaku sifat-sifat berikut.

1. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

2. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

3. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

4. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

Perhatikan dan lengkapi proses integral berikut.

1. $$\sum_{i=1}^{6} 2 = 6(\dots)$$ Sifat ke-1

$$= \dots\dots$$

2. $$\sum_{i=1}^{100} 3 = \dots(\dots)$$ Sifat ke- …

$$= \dots\dots$$

Andaikan $\sum_{i=1}^{100} a_i = 75$ dan $\sum_{i=1}^{100} b_i = 35$, maka

3. $$\sum_{i=1}^{100}(5a_i - 3b_i + 7) = \sum_{i=1}^{100} 5a_i - \sum_{i=1}^{100} \dots + \sum_{i=1}^{100} \dots$$ Sifat ke-3 dan 4

$$= \dots \sum_{i=1}^{100} a_i - 3\sum_{i=1}^{100} \dots + \dots(100)$$ Sifat ke-1 dan 2

$$= \dots(75) - 3(\dots) + 7(\dots)$$ Diketahui

$$= \dots$$

Selain sifat-sifat yang telah dipaparkan di atas, notasi sigma juga memiliki beberapa jumlah khusus, diantaranya sebagai berikut.

Sifat-sifat Jumlah Khusus Notasi Sigma

1. $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots\dots\dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots\dots\dots\dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots\dots\dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

4. $$\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots\dots\dots\dots\dots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

Menggunakan sifat jumlah khusus pada notasi sigma lengkapi dan selesaikan permaslahan di bawah ini.

1. $$\sum_{i=1}^{100}(3i-2)=\sum_{i=1}^{100}\ldots-\sum_{i=1}^{100}2$$

$$=3\sum_{i=1}^{100}\ldots-2(\ldots\ldots)$$

$$=3\left(\frac{\ldots\ldots(\ldots\ldots+1)}{2}\right)-\ \ldots\ldots$$ Sifat ke-1

$$=\ \ldots\ldots\ldots$$

2. $$\sum_{i=1}^{10}[(i+2)(5i-2)]=\sum_{i=1}^{10}(5i^2-\ \ldots\ldots+10i-\ \ldots\ldots)$$

$$=\sum_{i=1}^{10}(5i^2+\ \ldots\ldots-\ 4)$$

$$=\sum_{i=1}^{10}5i^2+\sum_{i=1}^{10}\ \ldots\ldots-\sum_{i=1}^{10}\ 4$$

$$=\ \ldots\sum_{i=1}^{10}\ldots+10\sum_{i=1}^{10}\ \ldots\ -4(\ldots\ldots)$$

$$=\ \ldots\sum_{i=1}^{10}\ldots+10\sum_{i=1}^{10}\ \ldots\ -\ \ldots\ldots$$

$$=\ 5\left(\frac{\ldots(\ldots+1)(2(10)+1)}{6}\right)+10\left(\frac{\ldots(\ldots+1)}{2}\right)-\ \ldots\ldots$$ Sifat ke-2 dan ke-1

$$=\ \ldots\ldots$$

3. $$\sum_{k=1}^{10}3k^2(k+5)=\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. $$\sum_{k=1}^{n}(3k^2-2k+1)=\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

5. $$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{7}i-3\right)^2=\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

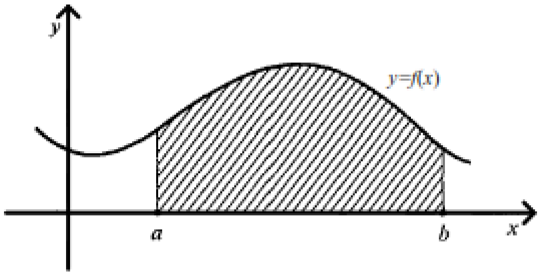
Latihan

1. Tuliskan jumlah yang ditunjukkan di bawah ini dalam bentuk penulisan sigma!
   a. $2 + 4 + 6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 100$
   b. $3 + 5 + 7 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 100$
   c. $f(w_1)\Delta x + f(w_2)\Delta x + f(w_3)\Delta x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + f(w_n)\Delta x$
2. Hitunglah nilai dari jumlah di bawah ini
   $a.$ $\sum_{i=1}^{5}(-1)^i 2^{i-1}$
   b. $\sum_{i=1}^{5} k \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$
   c. $\sum_{i=1}^{5} \frac{(-1)^k}{k(2k+1)}$
3. Andaikan bahwa $\sum_{i=1}^{10} a_i = 40$ dan $\sum_{i=1}^{10} b_i = 50$, maka hitunglah
   a. $\sum_{i=1}^{10}(4a_i - b_i + 2)$
   b. $\sum_{i=1}^{10}(5a_i + 3b_i + 7)$
   c. $\sum_{i=1}^{10}(\frac{3}{7} a_i - \frac{5}{11} b_i + \frac{7}{13})$
4. Tentukan nilai dari masing-masing jumlah berikut ini!
   a. $\sum_{k=1}^{10}(k^3 - k^2)$
   b. $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{3} k(k^2 - 7)$
   c. $\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{3} i^2 - 2i^2 - 1)$
   d. $\sum_{i=1}^{n}(2i - 5)^2$

B. JUMLAH REIMANN

Langkah awal dalam merumuskan definisi integral tentu didasarkan pada konsep jumlah Riemann. Untuk benar-benar memahami definisi integral tentu, penting untuk terlebih dahulu memahami bagaimana konsep jumlah Riemann bekerja. Jumlah Riemann memberikan dasar matematis yang kuat dalam menghitung luas di bawah kurva melalui pendekatan penjumlahan area persegi panjang yang sangat kecil. Dengan mempelajari jumlah Riemann, kita dapat memahami bagaimana penjumlahan ini mendekati nilai integral tentu dan bagaimana metode ini menjadi dasar bagi konsep integral yang lebih kompleks. Cermatilah ilustrasi berikut ini.

Perhatikan gambar 1 di bawah ini. Kita akan mencari luas bisada datar dari daerah di bawah kurva $y = f(x)$ dari a sampai b, dimana f adalah suatu fungsi kontinu.



Gambar 1. Daerah di bawah suatu kurva

Untuk menaksir luas bidang datar, ada beberapa tahapan yang bisa kita lakukan dalam menghitung jumlah Reimann atau integral tentu, sebagai berikut.

a. Bagi atau partisi interval $[a, b]$ menjadi n interval bagian.

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots \dots \dots , [x_{n-1}, x_n]$$

b. Tentukan Δx

Karena interval $[a, b]$ dibagi atau dipartisi menjadi beberapa bagian yang sama besar, maka Δx dapat ditentukan dengan aturan:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}, dimana\ x_i = a + i\Delta x$$

c. Carilah rumus untuk x_i dan $f(x_i)$

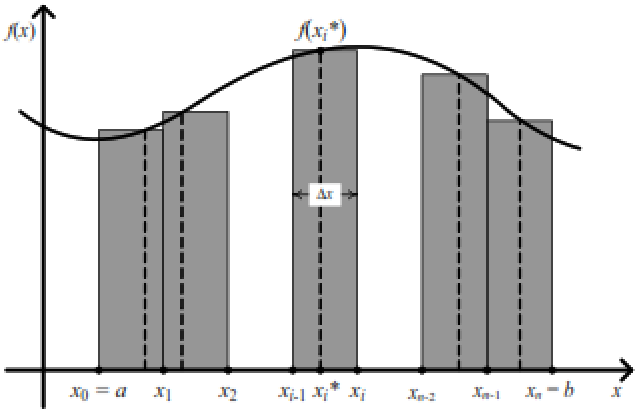
d. Dengan hasil pada poin c, hitung jumlahan Reimann

Pada setiap interval bagian $[x_{i-1}, x_i]$, kita membentuk persegi Panjang dengan tinggi $f(x_i^*)$, dimana $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ (lihat gambar 2). Persegi Panjang ke-i akan mempunyai luas

$$f(x_i^*)\Delta x$$

Dari gambar 2, kita bisa melihat bahwa jumlah dari luas semua persegi Panjang hampir mendekati luas daerah di bawah kurva. Jumlahan ini dinamakan suatu Jumlahan Riemann dan sama dengan:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \ \dots\dots\dots + f(x_n^*)\Delta x$$



Gambar 2. Persegi-persegi Panjang di bawah suatu kurva

e. Hitung luasan sebagai integral tentu dengan mengambil limitnya untuk n menuju tak hingga yaitu:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Ketika f adalah kontinu, nilai limit tifak tergantung dari titik-titik sampel x_i^* yang digunakan.

Limit tersebut dinyatakan oleh $\int_a^b f(x)\,dx$, dan dinamakan integral tentu (*definite integral*) untuk f dari a sampai b.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x}$$

Contoh:

Tentukanlah nilai dari integral tentu

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

Penyelesaian

1. Bagi atau partisi interval $[0,1]$ menjadi n interval bagian.
2. Menentukan terlebih dahulu nilai dari Δx

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n}, ingat\ intervalnya\ adalah\ [0,1]$$

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

3. Menentukan nilai x_i sehingga akan mendapatkan $f(x_i)$

   $x_i = a + i\Delta x$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots \ldots \ldots\ , n$

   $$x_0 = 0 + (0)\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

   $$x_1 = 0 + (1)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

   $$x_2 = 0 + (2)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n}$$

   $$x_i = 0 + (i)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}i$$

   $$\vdots$$

   $$x_n = 0 + (n)\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

   Ingat kembali fungsi pada soal yaitu $f(x) = x^2$; untuk $f(x_i)$ akan di peroleh:

   $$f(x_i) = \left(\frac{1}{n}i\right)^2 = \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{i^2}{n^2}$$

4. Menentukan jumlah riemann dari semua partisi $f(x_i)\Delta x_i$

   $$R = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2}{n^2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

   $$= \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}$$

   $$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right) \quad ingat\ kembali\ jumlah\ khusus\ sigma$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$$

5. Menghitung luasan sebagai integral tentuk dari limit n menuju tak hingga

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n^3}{6n^3}\right] + \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3n^2}{6n^3}\right] + \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{6n^3}\right]$$
$$= \frac{2}{6} + 0 + 0$$
$$= \frac{1}{3}$$

Ayo Perhatikan dan lengkapi proses integral berikut ini untuk memperdalam penjelasan di atas.

1. Evaluate $\int_{-2}^{3} x + 3\,dx$

   Penyelesain:

   Bagi interval $[-2,3]$ menjadi n selang bagian yang sama.

   $$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\ldots - (-2)}{n} = \ \ldots\ldots$$

   Menentukan nilai x_i sehingga akan mendapatkan $f(x_i)$

   $x_i = a + i\Delta x$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ , n$

   $x_0 = \ \ldots + (0)(\ldots) = \ \ldots\ldots$

   $x_1 = \ \ldots\ldots + (\ldots)\left(\frac{5}{n}\right) = \ \ldots\ldots$

   $x_2 = -2 + (2)\left(\frac{5}{n}\right) = \ \ldots\ldots$

   $x_i = \ \ldots\ldots + (\ldots)\left(\frac{5}{n}\right) = -2 + \frac{5}{n}i$

   $\vdots$

   $x_n = \ \ldots + (n)(\ldots) = 3$

$f(x) = x + 3$

$f(x_i) = -2 + \frac{5}{n}i + 3 = \ \dots\dots + \frac{5}{n}i$

$$R = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{5}{n}i\right)\left(\frac{5}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{5}{n} + \ \dots\dots\right)$$

$$= \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{25}{n}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{5}{n}(\dots) + \frac{25}{n^2}\left[\frac{\dots(\dots + 1)}{2}\right]$$

$$= 5 + \frac{25}{2}\left(\frac{n^2 + \ \dots}{n^2}\right)$$

$$= 5 + \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= 5 + \ \dots \ + \frac{25}{2n}$$

$$= \frac{35}{2} + \ \dots$$

Sehingga

$$\int_{-2}^{3} x + 3\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{35}{2} + \frac{25}{2n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{35}{2}\right] + \lim_{n\to\infty}[\dots\dots]$$

$$= \ \dots\dots + \ \dots\dots$$

$$= \ \dots\dots$$

2 Evaluate $\int_{-1}^{3}(2x^2 - 8)\,dx$

Penyelesain:

Bagi interval $[-1,\ \ldots]$ menjadi n selang bagian yang sama.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\ldots - (\ldots)}{n} = \ \ldots\ldots$$

Menentukan nilai x_i sehingga akan mendapatkan $f(x_i)$

$x_i = a + i\Delta x$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ , n$

$x_0 = \ \ldots + (0)(\ldots) = \ \ldots\ldots$

$x_1 = \ \ldots\ldots + (\ldots)\left(\frac{4}{n}\right) = \ \ldots\ldots$

$x_2 = -1 + (2)\left(\frac{4}{n}\right) = \ \ldots\ldots$

$x_i = \ \ldots\ldots + (\ldots)\left(\frac{4}{n}\right) = \ \ldots + \frac{4}{n}i$

$\vdots$

$x_n = \ \ldots + (n)(\ldots) = 3$

$f(x) = 2x^2 - 8$

$$f(x_i) = 2\left(-1 + \frac{4}{n}i\right)^2 - 8 = \ \ldots\left(1 - \frac{8}{n}i + \frac{16}{n^2}i^2\right) - \ \ldots$$

$$= \ 2 - \frac{16}{\ldots}i + \frac{32}{\ldots}i^2 - 8$$

$$= \ -6 - \frac{16}{\ldots}i + \frac{32}{\ldots}i^2$$

$$R = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left(-6 - \frac{16}{n}i + \frac{32}{n^2}i^2\right)(\ldots)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{24}{n} - \frac{64}{\ldots}i + \frac{\ldots}{n^3}i^2\right)$$

$$= -\frac{24}{n}\sum_{i=1}^{n}\ldots - \frac{64}{\ldots}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{\ldots}{\ldots}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \ -\frac{24}{n}(\ldots) - \frac{64}{\ldots}\left[\frac{\ldots(\ldots+1)}{2}\right] + \frac{128}{n^3}\left[\frac{\ldots(\ldots+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= -24 - \frac{64}{2}\left(\frac{\ldots + n}{n^2}\right) + \frac{128}{6}\left[\frac{2n^2 + 3n^2 + n}{\ldots}\right]$$

$$= -24 - 32\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{128}{6}\left[2 + \frac{\ldots}{n} + \frac{1}{\ldots}\right]$$

Sehingga

$$\int_{-1}^{3} 2x^2 - 8\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[-24 - 32\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{128}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right] = \ldots$$

Latihan

Tentukan Jumlah Riemann dari integral berikut ini.

1. $\int_{0}^{4} (2x + 3)\,dx$
2. $\int_{1}^{3} \frac{1}{x}\,dx$
3. $\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}\,dx$
4. $\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$
5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$
6. $\int_{-1}^{2} (x^2 + x + 1)\,dx$

BAB 3
INTEGRAL TENTU

Kompetensi Dasar:

1. Menggunakan teorema dasar integral tentu dalam penyelesaian masalah yang berkaitan dengan integral tentu.
2. Menggunakan sifat-sifat integral tentu dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tentu.

Indikator:

Setelah pembelajaran mahasiswa diharapkan dapat:

1. Mengidentifikasi integral tentu fungsi aljabar.
2. Menerapkan sifat-sifat integral tentu dalam menyelesaikan masalah.

A. TEOREMA DASAR INTEGRAL TENTU

Pada bagian definisi integral tentu, telah dijelaskan bahwa jika $y = f(x)$ adalah fungsi kontinu yang terdefinisi pada interval tertutup $[a, b]$, dan jika limit dari penjumlahan Riemann $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ ada (memiliki nilai tertentu), maka integral tentu dari $f(x)$ terhadap x, dari $x = a$ hingga $x = b$, dapat dinyatakan sebagai

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Namun, jika kita diminta menghitung nilai integral tentu menggunakan definisi ini, prosesnya dapat menjadi kurang praktis. Metode ini seringkali memerlukan waktu yang cukup lama, ketelitian yang tinggi, dan terkadang bisa terasa sulit dan membosankan, terutama ketika menghadapi fungsi yang kompleks atau interval yang besar. Untuk mengatasi kesulitan ini, kita dapat menggunakan Teorema Dasar Kalkulus yang memberikan cara lebih efisien dalam menghitung nilai integral tentu. Menurut teorema ini, **jika $\boldsymbol{f(x)}$ adalah fungsi kontinu pada interval $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, dan $\boldsymbol{F(x)}$ adalah anti-turunan (atau fungsi primitif) dari $\boldsymbol{f(x)}$, maka**

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Penerapan teorema ini tidak hanya lebih cepat, tetapi juga lebih praktis dan dapat diterapkan dengan mudah pada berbagai fungsi.

Selanjutnya, proses menentukan integral tentu, terdapat sifat-sifat yang dapat membantu untuk mempermudah proses perhitungan. Berikut sifat-sifat yang berlaku pada integral tentu.

Misalkan $a, b, c, k \in \mathbb{R}$, $a < b$ dan $c \in [a, b]$. Jika $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan fungsi kontinu dalam interval tertutup $[a, b]$, maka

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
5. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

Ayo Perhatikan dan lengkapi proses integral berikut ini untuk memperdalam penjelasan di atas.

1. $\displaystyle\int_3^3 2\,dx = 2x]_3^3$	Ingat kembali definisi integral
$= 2(3) - 2(3)$	Subsitusikan batas atas lalu kurangkan dengan batas bawah
$= 0$	Bukti sifat $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2. $\int_{0}^{5} 6x^2\,dx = 6\int_{0}^{5} x^2\,dx$ Sifat ke-3

$= 6\left[\frac{x^3}{\dots}\right]_0^5$

$= 6\left[\frac{(\dots)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right]$ Subsitusikan batas atas dan batas bawah

$= 6\left[\frac{125}{3}\right]$

$= \dots$

3. $\int_{-2}^{3} (x-1)^2\,dx = \int_{-2}^{3} (x^2 - \dots + 1)\,dx$ Jabarkan pangkat

$= \int_{-2}^{3} \dots\,dx - 2\int_{-2}^{3} x\,dx + \int_{-2}^{3} 1\,dx$ Sifat ke-3 & 4

$= \left.\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3} - 2\left[\frac{x^2}{\dots}\right]_{-2}^{3} + \dots]_{-2}^{3}$ Tentukan hasil integralnya

$= \left(\frac{(\dots)^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right) - 2\left[\frac{(3)^2}{2} - \frac{(\dots)^2}{2}\right] + (3-(-2))$ Subsituiskan batas atas dan batas bawah

$= \left(\frac{27}{3} - \frac{(\dots)}{3}\right) - 2\left[\frac{\dots}{2} - \frac{4}{2}\right] + (3 + \dots)$

$= \left(\frac{\dots}{3}\right) - 2\left[\frac{5}{2}\right] + \dots$

$= \dots$

4. Diketahui $\int_0^4 f(x)\,dx = 2$ dan $\int_2^4 2f(x)\,dx = 2$. Tentukan nilai $\int_0^2 f(x)\,dx$. Jabarkan pangkat

Penyelesaian:

Diketahui bahwa $\int_2^4 2f(x)\,dx = 2$, selanjutnya bentuk ini disederhanakan menjadi:

$$2\int_2^4 f(x)\,dx = 2$$ Sifat ke-3

$$\int_2^4 f(x)\,dx = 1$$ Kalikan kedua ruas dengan ½

Sehingga penyelesaian diperoleh

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx$$ Sifat ke-5

$$2 = \int_0^2 f(x)\,dx + \ \dots$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \ \dots - \ \dots$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \ \dots$$

5. Jika $\int_1^k (2x-5)\,dx = 18$, untuk $k > 0$ tentukan nilai $k+1$.

Penyelesaian:

$$\int_1^k (2x-5)\,dx = 18$$

$$2\int_1^k x\ dx - \int_1^k 5\,dx = 18$$ Sifat ke-3 & 4

$$2\left[\frac{x^2}{\dots}\right]_1^k - 5\dots]_1^k = 18$$ Tentukan hasil integralnya

$$2\left[\frac{k^2}{2}-\frac{(1)^2}{2}\right]-\big(5(k)-5(1)\big)=18$$

Subsituiskan batas atas dan batas bawah

$$2\left[\frac{k^2-1}{2}\right]-5k+5=18$$

$$k^2-1-5k+5=18$$

$$k^2-5k+4-18=0$$

$$k^2-5k-14=0$$

$$(k-\ \dots\ )(k+\ \dots\ )=0$$

Faktorkan

$$k=\ \dots\ \text{ atau } k=\ \dots\ \text{ (tidak memenuhi)}$$

Sesuaikan syarat untuk nilai $k>0$

Maka nilai $k+1=\ \dots\ +1=8$

Latihan

Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan baik dan benar!

1. Andaikan

$$\int_0^1 f(x)\,dx=2,\quad \int_1^2 f(x)\,dx=3,\quad \int_0^1 g(x)\,dx=-1,\quad \text{dan}\quad \int_0^2 g(x)\,dx=4$$

   Dengan informasi di atas, gunakan sifat-sifat integral unutk menyelesaikan persoalan berikut ini.

   a. $\int_0^2 [f(x)+2g(x)]\,dx$

   b. $\int_0^1 [2f(x)+3g(x)-4]\,dx$

   c. $\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^0 f(x)\,dx$

   d. $\int_1^2 g(x)\,dx+\int_2^0 g(x)\,dx$

2. Tentukan hasil dari:

a. $\int_{0}^{4} 12x\sqrt{x}\, dx$

b. $\int_{-1}^{1} (5 - 2x - 6x^2)\, dx$

c. $\int_0^3 9x - x^2\, dx$

d. $\int_0^4 \sqrt{2t+1}\, dt$

e. $\int_{1}^{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$

3. Tentukan nilai p jika diketahui:

   a. $\int_{-1}^{2p} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2}$

   b. $\int_p^2 (3x^2 - 3x + 7)\, dx = 16$

   c. $\int_0^1 (\sqrt[3]{px^2} + \frac{p}{\sqrt{x^3}})\, dx = -7$

   d. $\int_1^p (1 + x)\, dx = p$

4. Jika $b > 0$ dan $\int_1^b (2x - 3) dx = 12$, tentukan nilai $b^2 - 2$.

5. Diketahui $\int_a^b (3x - 2)\, dx = 8$ dan $\int_c^b (6x - 4)\, dx = 5$ dengan $a < b < c$. Tentukan nilai $\int_a^c (3x - 2)\, dx$.

BAB 4
LUAS BIDANG DATAR

Kompetensi Dasar:

1. Menganalisis penerapan konsep integral tentu dalam menentukan luas bidang datar.
2. Menggunakan konsep integral tentu dalam penyelesaian masalah.

Indikator:

Setelah pembelajaran mahasiswa diharapkan dapat :

1. Menentukan luas daerah di atas atau di bawah sumbu x.
2. Menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu x dan garis $x = a$ dan $x = b$.
3. Menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $x = f(y)$, sumbu y, garis $y = a$ dan $y = b$.
4. Menentukan luas bidang datar antara dua kurva.

Luas Bidang Datar

Salah satu aplikasi utama dari integral dalam kalkulus adalah menentukan luas bidang datar yang dibatasi oleh kurva fungsi tertentu. Dalam geometri dasar, kita mungkin telah terbiasa menghitung luas bentuk-bentuk sederhana seperti persegi panjang, segitiga, atau lingkaran. Namun, ketika kita berhadapan dengan bentuk-bentuk yang lebih kompleks, terutama yang dibatasi oleh kurva yang tidak teratur, metode geometris konvensional tidak lagi memadai.

Integral tentu muncul sebagai alat yang sangat berguna dalam mengatasi tantangan ini. Dengan menggunakan integral, kita dapat menghitung luas area di bawah kurva, bahkan jika kurva tersebut memiliki bentuk yang tidak biasa atau rumit. Misalnya, jika kita memiliki suatu fungsi kontinu $y = f(x)$ yang terdefinisi pada interval tertentu $[a, b]$, kita dapat menghitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva tersebut, sumbu x dan garis $x = a$ serta $x = b$. Dengan memahami bagaimana integral dapat digunakan untuk menghitung luas bidang datar, kita membuka jalan untuk berbagai aplikasi lebih lanjut dalam matematika, fisika, ekonomi, dan bidang-bidang lainnya yang memerlukan analisis area dan akumulasi.

Pada bagian ini akan dipaparkan luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x, sumbu y dan luas daerah antara dua kurva.

A. Luas Daerah yang dibatasi oleh sumbu x

Ketika kita berbicara tentang luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu x, serta garis vertikal $x = a$ dan $x = b$, kita sebenarnya merujuk pada perhitungan luas di bawah atau di atas kurva tersebut dari titik $x = a$ hingga $x = b$. Tergantung pada posisi kurva $y = f(x)$ terhadap sumbu x, luas ini bisa berada di atas sumbu x (positif) atau di bawah sumbu x (negatif).

1. Luas Daerah di Atas Sumbu x

Misalkan $y = f(x)$ sebuah kurva di bidang-xy dan misalkan f kontinu dan tak negarif pada interval $a \leq x \leq b$. Maka luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x), x = a,\ x = b$, dan $y = 0$ atau sumbu x, dapat ditentukan oleh integral tentu:

$$L = \int_a^b f(x)\,dx$$

2. Luas Daerah di Bawah Sumbu x

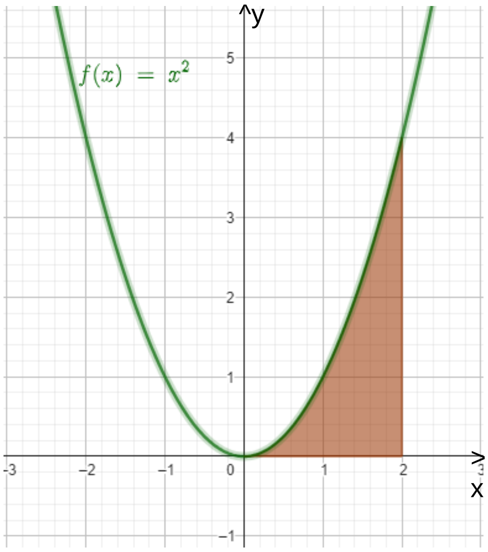
Misalkan $y = f(x)$ sebuah kurva di bidang-xy dan misalkan f kontinu dan negarif pada interval $a \leq x \leq b$. Maka luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x), x = a,\ x = b$, dan $y = 0$ atau sumbu x , maka integral tentu dari fungsi tersebut ditentukan oleh:

$$L = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Contoh Soal: **Luas di Atas Sumbu x**

Lengkapi perhitungan integral untuk mementukan Luas Daerah di atas Sumbu x di bawah ini.

1. Perhatikan gambar di bawah ini.



Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, ruas sumbu x antara $x = 0$ dan $x = 2$.

Penyelesaian:

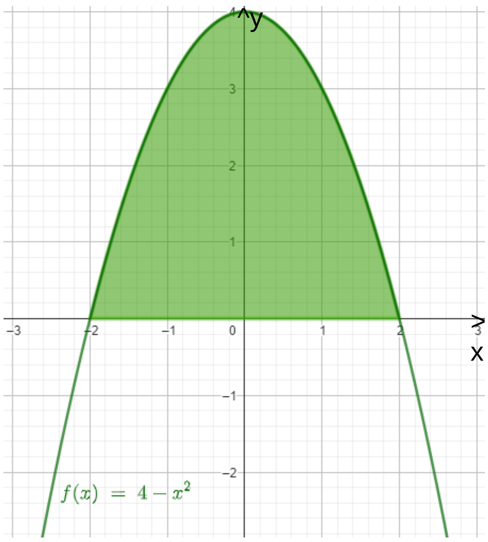
$$L = \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{\dots}\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{(\dots)^3}{3} - \frac{(\dots)^3}{3}\right]$$

$$= \dots$$

Jadi luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu x, dari $x = 0$ sampai $x = 2$ adalah …. .

2. Hitung luas daerah yang ditunjukkan pada gambar!



Penyelesaian

Berdasarkan gambar, terlihat bahwa luas daerah yang dimaksud dibatasi oleh kurva $f(x) = 4 - x^2$, ruas sumbu x antara $x = -2$ dan $x = 2$.

Sehingga luas daerah yang di maksud adalah

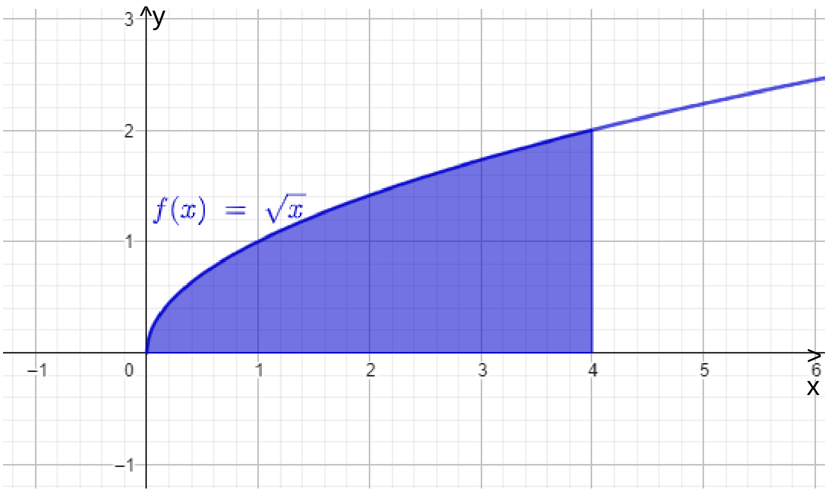
$$L = \int_{-2}^{2} 4 - x^2 \, dx = \left[\dots \dots - \frac{x^3}{\dots} \right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[4(\dots) - \frac{(\dots)^3}{3} \right] - \left[\dots(-2) - \frac{(\dots)^3}{3} \right]$$

$$= \dots \dots - \dots \dots$$

$$= \dots \dots$$

3. Hitung luas daerah yang ditunjukkan pada gambar!



Penyelesaian

Berdasarkan gambar, terlihat bahwa luas daerah yang dimaksud dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, ruas sumbu x antara $x = 0$ dan $x = 4$.

Sehingga luas daerah yang di maksud adalah

$$L = \int_{0}^{4} \sqrt{x} \, dx = \int_{0}^{4} x^{\frac{1}{2}} \, dx$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\dots} \right]_{0}^{4}$$

$$= \left[\frac{(\ldots)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{(\ldots)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]$$

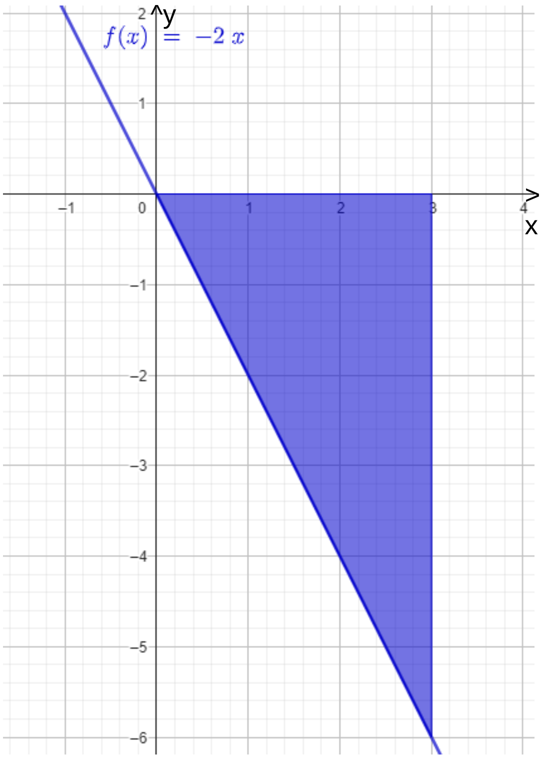
$$= \ldots\ldots - \ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots$$

Contoh Soal: **Luas di Bawah Sumbu x**

Lengkapi perhitungan integral untuk menentukan luas daerah di bawah sumbu x di bawah ini.

1. Perhatikan gambar di bawah ini.



Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = -2x$, ruas sumbu x antara $x = 0$ dan $x = 3$.

Penyelesaian:

$$L = -\int_0^3 (-2x)\,dx = \int_0^3 2x\,dx$$

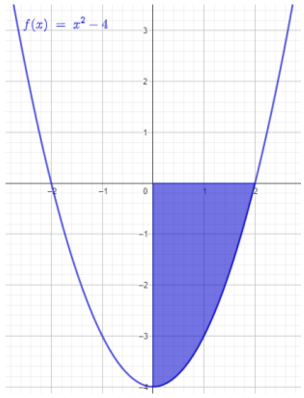
$$= [\ldots]_0^2$$

$$= [(\ldots)^2 - (\ldots)^2]$$

$$= \ldots$$

Jadi luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = -2x$, sumbu x antara $x = 0$ dan $x = 3$ adalah …. .

2. Hitung luas daerah yang ditunjukkan pada gambar!



Penyelesaian

Berdasarkan gambar, terlihat bahwa luas daerah yang dimaksud dibatasi oleh kurva $f(x) = x^2 - 4$, ruas sumbu x antara $x = 0$ dan $x = 2$.

Sehingga luas daerah yang di maksud adalah

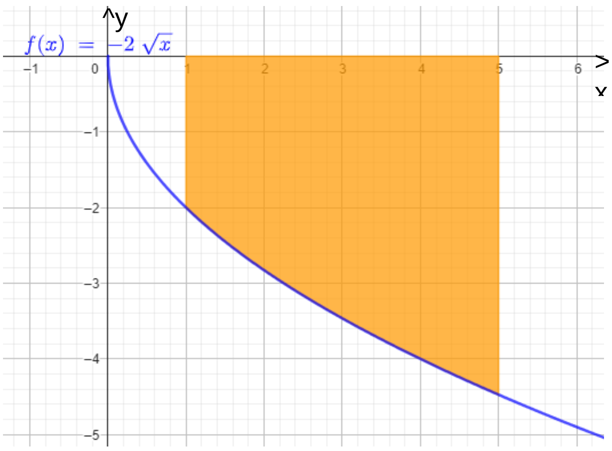
$$L = -\int_0^2 x^2 - 4\,dx = -\left(\left[\frac{x^3}{\dots} - \;\dots\dots\right]_0^2\right)$$

$$= -\left(\left[\frac{(\dots)^3}{3} - 4(\dots)\right] - \left[\frac{(\dots)^3}{3} - 4(\dots)\right]\right)$$

$$= -(\dots\dots - \;\dots\dots)$$

$$= \;\dots\dots$$

3. Hitung luas daerah yang ditunjukkan pada gambar!



Penyelesaian

Berdasarkan gambar, terlihat bahwa luas daerah yang dimaksud dibatasi oleh kurva $y = -2\sqrt{x}$, ruas sumbu x antara $x = 1$ dan $x = 5$.

Sehingga luas daerah yang di maksud adalah

$$L = -\int_1^5 \left(-2\sqrt{x}\right) dx = \int_1^5 2\sqrt{x}\ dx$$

$$= \int_1^5 2(x)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

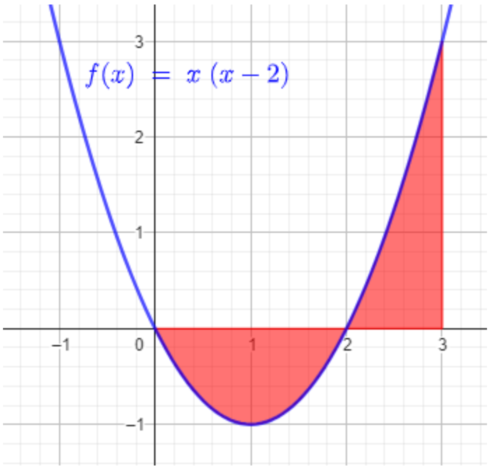
$$= \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\dots}\right]_1^5$$

$$= \left[\frac{2(\dots)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{1(\dots)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \dots\dots - \dots\dots$$

$$= \dots\dots$$

4. Perhatikan gambar di bawah ini.



Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x(x-2)$, ruas sumbu x antara $x = 0$ dan $x = 3$.

Penyelesaian:

Fungsi $y = x(x-2)$ memotong ruas sumbu x antara $x = 0$ dan $x = 2$.

$$Luas = \int_0^3 |x(x-2)|\, dx = \int_0^3 |x^2 - 2x|\, dx$$

$$= -\int_0^2 (x^2 - 2x)\, dx + \int_2^3 x^2 - 2x\, dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{\ldots} - \ \ldots\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{\ldots} - \ \ldots\right]_2^3$$

$$= -\left[\frac{(\ldots)^3}{3} - (\ldots)^2 - \frac{(\ldots)^3}{3} - (\ldots)^2\right]$$

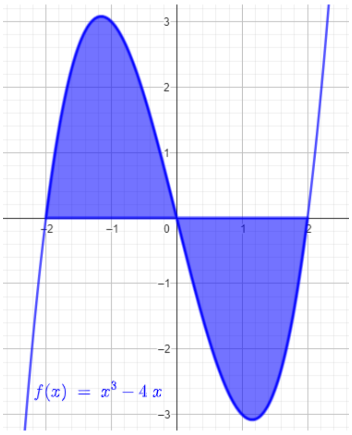
$$+ \left[\frac{(\ldots)^3}{3} - (\ldots)^2 - \frac{(\ldots)^3}{3} - (\ldots)^2\right]$$

$$= \ -(\ldots\ldots\ldots) + (\ldots\ldots\ldots)$$

$$= \ \ldots\ldots$$

Jadi luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x(x-2)$, ruas sumbu x antara $x = 0$ dan $x = 3$ adalah …. .

5. Hitung luas daerah yang ditunjukkan pada gambar!



Penyelesaian

Fungsi $y = x^3 - 4x$ memotong sumbu x di $x = -2$ dan $x = 2$. Kita perlu menghitung luas masing-masing interval dan menjumlahkannya.

$$Luas = \int_{-2}^{2} |x^3 - 4x|\, dx = -\int_{-2}^{0} x^3 - 4x\, dx + \int_{0}^{2} x^3 - 4x\, dx$$

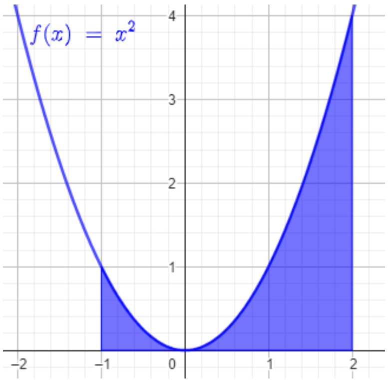
$$= -\left[\frac{x^4}{\ldots} - \frac{4\ldots}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{\ldots} - \frac{4\ldots}{2}\right]_{0}^{2}$$

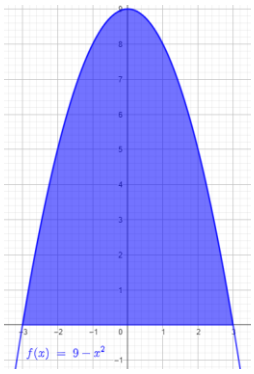
$$= -\left[\frac{(\ldots)^4}{4} - 2(\ldots)^2 - \frac{(\ldots)^4}{4} - 2(\ldots)^2\right]$$
$$+ \left[\frac{(\ldots)^4}{4} - 2(\ldots)^2 - \frac{(\ldots)^4}{4} - 2(\ldots)^2\right]$$
$$= -(\ldots\ldots\ldots) + (\ldots\ldots\ldots)$$
$$= \ldots\ldots$$

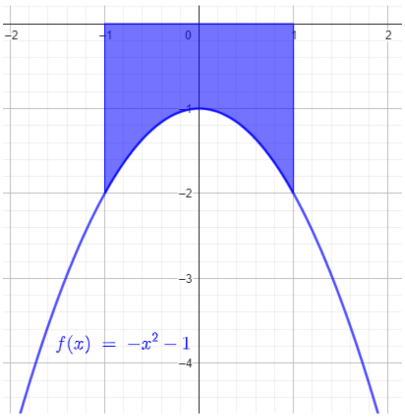
Jadi luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3 - 4x$, ruas sumbu x antara $x = -2$ dan $x = 2$ adalah …. .

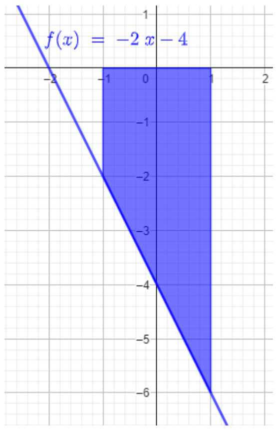
Latihan

Hitunglah masing-masing luas daerah di bawah ini!

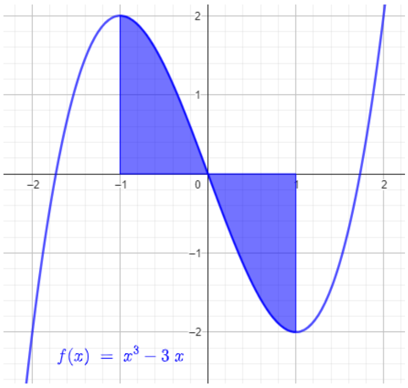
1. 

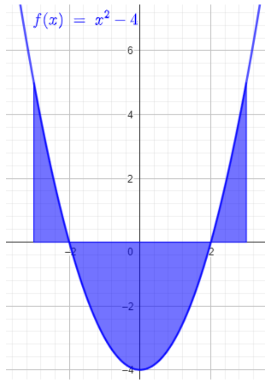
2. 

3. 

4. 

> x

5. 

6. 

B. Luas Bidang Datar antara Dua Kurva

Luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva merupakan konsep yang sering muncul dalam kalkulus integral. Jika kita memiliki dua fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ yang kontinu pada interval $[a, b]$, di mana $f(x)$ selalu lebih besar atau sama dengan $g(x)$ di seluruh interval tersebut ($f(x) \geq g(x)$), maka luas daerah yang terletak di antara kedua kurva tersebut dapat dihitung menggunakan integral.

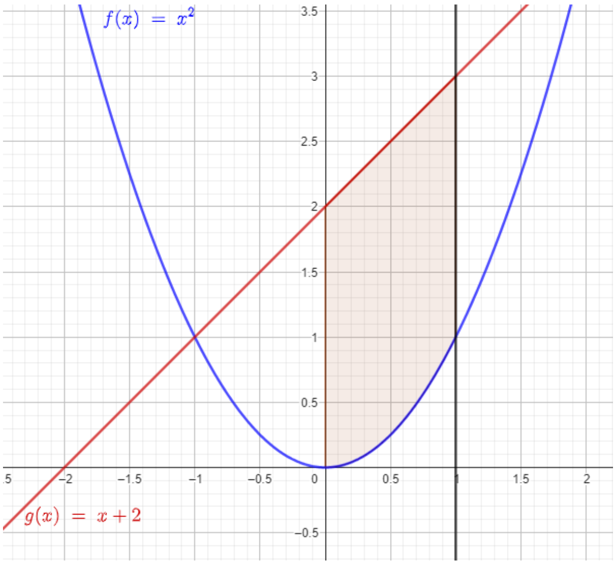
Secara umum, luas daerah antara dua kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ yang dibatasi oleh garis vertikal $x = a$ dan $x = b$ dihitung dengan rumus:

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Di sini, $f(x) \geq g(x)$ dalam interval $[a, b]$.

Ayo perhatikan dan lengkapi proses integral berikut ini untuk memperdalam penjelasan di atas.

1. Perhatikan gambar di bawah ini. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = x + 2$, serta garis $x = 0$ dan $x = 1$.



Penyelesaian:

Berdasarkan gamabr, terlihat bahwa kurva $g(x) = x + 2$ berada di atas kurva $f(x) = x^2$. Sehingga daerah integral yang akan dihitung menjadi:

$$Luas = \int_0^1 [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^1 [(x+2) - x^2]\,dx$$

$$= \int_0^1 (x + 2 - x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{\dots} + \ \dots\dots - \frac{x^3}{\dots}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{(\dots)^2}{2} + \ \dots\dots - \frac{(\dots)^3}{3}\right] - \left[\frac{(\dots)^2}{2} + \ \dots\dots - \frac{(\dots)^3}{3}\right]$$

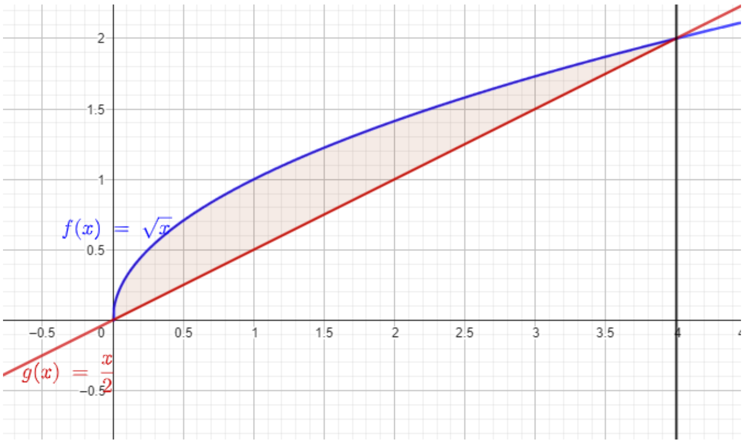
$$= \ \dots\dots - \ \dots\dots$$

$$= \ \dots\dots$$

Jadi luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = x + 2$, serta garis $x = 0$ dan $x = 1$ adalah …. .

2. Perhatikan gambar di bawah ini. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$ dan $y = \frac{x}{2}$, serta ruas sumbu x antara $x = 0$ dan $x = 4$.

Penyelesaian



Berdasarkan gambar, terlihat bahwa kurva $f(x) = \sqrt{x}$ berada di atas kurva $g(x) = \frac{x}{2}$.

Sehingga daerah integral yang akan dihitung menjadi:

$$L = \int_0^4 [f(x) - g(x)]\, dx = \int_0^4 [\sqrt{x} - \frac{x}{2}]\, dx$$

$$= \int_0^4 (x^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{2})\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{\dots}\right]_0^4$$

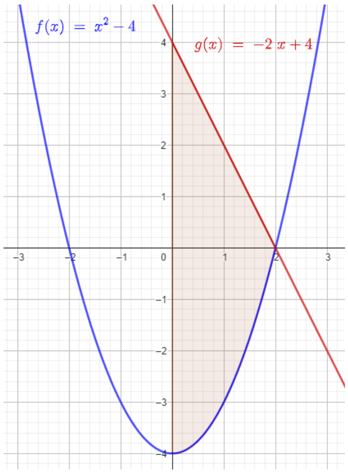
$$= \left[\frac{2}{3}(\dots)^{\frac{3}{2}} - \frac{(\dots)^2}{4}\right] - \left[\frac{2}{3}(\dots)^{\frac{3}{2}} - \frac{(\dots)^2}{4}\right]$$

$$= \dots\dots - \dots\dots$$

$$= \dots\dots$$

Jadi luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$ dan $y = \frac{x}{2}$, serta ruas sumbu x antara $x = 0$ dan $x = 4$ adalah … .

3. Perhatikan Gambar di bawah ini. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 4$ dan $y = -2x + 4$, serta ruas sumbu x antara $x = 0$ dan $x = 2$.



Penyelesaian

Berdasarkan gamabr, terlihat bahwa kurva $g(x) = -2x + 4$ berada di atas kurva $f(x) = x^2 - 4$. Sehingga daerah integral yang akan dihitung menjadi:

$$Luas = \int_0^2 [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^2 [(-2x + 4) - (x^2 - 4)]\,dx$$

$$= \int_0^2 (-x^2 - 2x + 8)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{\dots} - \dots\dots + \dots\dots\right]_0^2$$

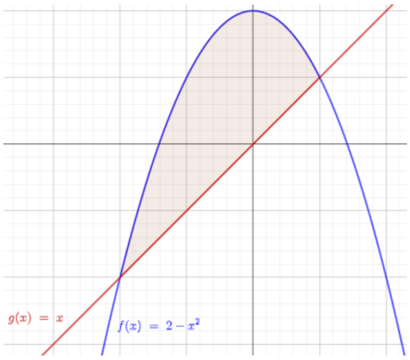
$$= \left[-\frac{(\dots)^3}{3} - (\dots) + 8(\dots)\right]$$

$$- \left[-\frac{(\dots)^3}{3} - (\dots) + 8(\dots)\right]$$

$$= \dots\dots - \dots\dots$$

$$= \dots\dots$$

4. Perhatikan gambar di bawah ini. Tentukan luas daerah yang di arsir.



Penyelesaian:

Perhatikan bahwa gambar yang diberikan hanya menunjukkan dua kurva, yaitu $f(x) = 2 - x^2$ dan $g(x) = x$. Sebelum menentukan luas integral yang dimaksud, terlebih dahulu harus menentukan titik potong kedua kurva yang akan digunakan sebagai batas integral untuk menentukan luas daerah tersebut. Titik potong menunjukkan bahwa titik-titik tersebut memenuhi kedua kurva, sehingga berlaku:

$y = y$

$2 - x^2 = x$

$x^2 + \ldots - \ldots = 0$

Dengan memfaktorkan selanjutnya kita memperoleh

$(x - 1)(x + 2) = 0$

$x = \ldots \quad \text{atau} \quad x = \ldots$

sehingga kita memperoleh integral luas daerah tersebut adalah

$$\int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-2}^{1} [2 - x^2 - x]\, dx$$

$$= \left[\ldots - \frac{x^3}{\ldots} - \frac{x^2}{\ldots}\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left[2(\ldots) - \frac{(\ldots)^3}{3} - \frac{(\ldots)^2}{2}\right] - \left[2(\ldots) - \frac{(\ldots)^3}{3} - \frac{(\ldots)^2}{2}\right]$$

$$= \ldots\ldots - \ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots$$

C. Luas Daerah yang dibatasi oleh sumbu y

Misalkan sebuah kurva diberikan dalam bentuk $x = f(y)$, dan kita ingin menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva tersebut, sumbu y, dan dua garis horizontal $y = a$ dan $y = b$ (dengan $a < b$), maka kita dapat menghitung luas daerah tersebut menggunakan integral.

Konsep ini mirip dengan menentukan luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$, tetapi kali ini kita memandang area dalam arah horizontal, dengan y sebagai variabel bebas. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $x = f(y)$, sumbu y, dan garis $y = a$ serta $y = b$ dapat dihitung dengan integral sebagai berikut:

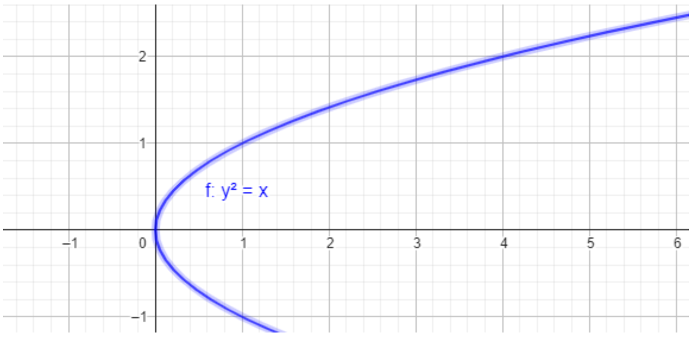
$$L = \int_a^b f(y)\, dy$$

Contoh

Lengkapi perhitungan integral untuk mementukan luas daerah yang dibatasi oleh sumbu y.

1. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $x = y^2$, sumbu y, titik $y = 0$ sampai $y = 2$. Lalu arsirlah luas daerah yang dimaksud pada gambar di bawah!

   Penyelesaian:



$$L = \int_0^2 y^2\, dy = \left[\frac{y^3}{\dots}\right]_0^2$$

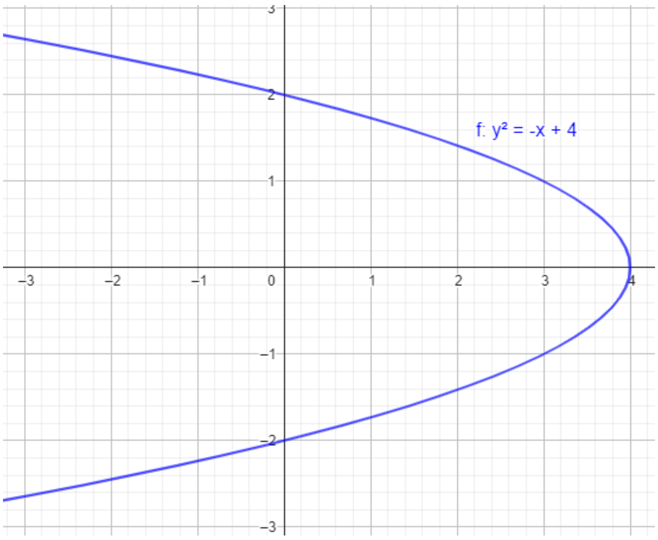
$$= \left[\frac{(\dots)^3}{3} - \frac{(\dots)^3}{3}\right]$$

$$= \dots$$

Jadi luas daerah yang dibatasi oleh kurva $x = y^2$, ruas sumbu y antara $y = 0$ dan $y = 2$ adalah …. .

2. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $x = 4 - y^2$, ruas sumbu y antara $y = -1$ dan $y = 1$. Lalu arsirlah luas daerah yang dimaksud pada gambar di bawah!

   Penyelesaian:



$$L = \int_{-2}^{2} 4 - y^2 \, dy = \left[\dots \dots - \frac{y^3}{\dots} \right]_{-2}^{2}$$

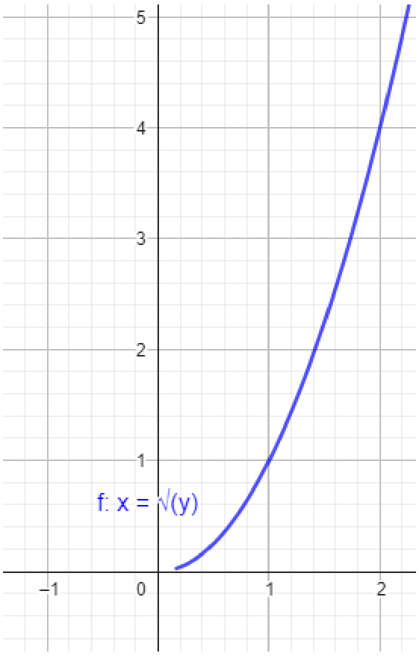
$$= \left[4(\dots) - \frac{(\dots)^3}{3} \right] - \left[\dots(-2) - \frac{(\dots)^3}{3} \right]$$

$$= \dots \dots - \dots \dots$$

$$= \dots \dots$$

3. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $x = \sqrt{y}$, ruas sumbu y antara $y = 1$ dan $y = 4$. Lalu arsirlah luas daerah yang dimaksud pada gambar di bawah!

   Penyelesaian:



$$L = \int_0^4 \sqrt{y}\, dy = \int_0^4 y^{\frac{1}{2}}\, dy$$

$$= \left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\dots}\right]_0^4$$

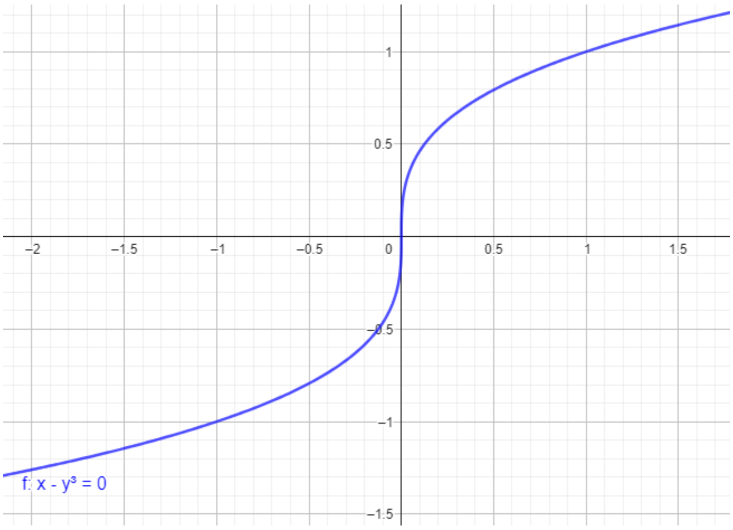
$$= \left[\frac{(\dots)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{(\dots)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \dots\dots - \dots\dots$$

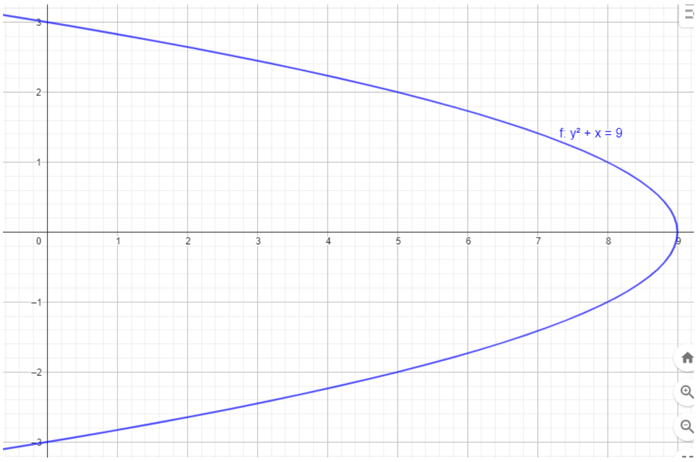
$$= \dots\dots$$

Latihan

1. Arsirlah dan tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $x = y^3$, ruas sumbu y antara $y = -1$ dan $y = 1$.

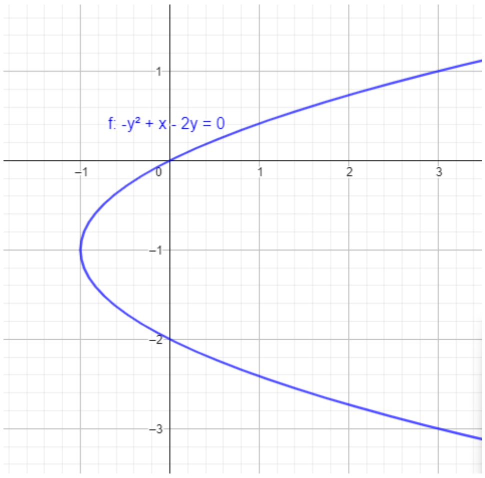


2. Arsirlah dan tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $x = 9 - y^2$, ruas sumbu y antara $y = -2$ dan $y = 2$.

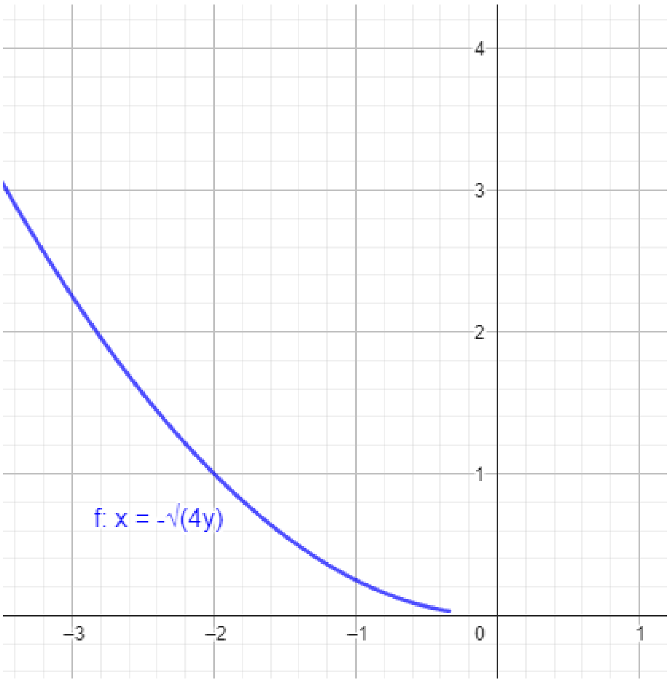


3. Arsirlah dan tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $x = 2y - y^2$, ruas sumbu y antara $y = -3$ dan $y = 1$.

^y



4. Arsirlah dan tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $x = -\sqrt{4y}$, ruas sumbu y antara $y = 1$ dan $y = 4$.

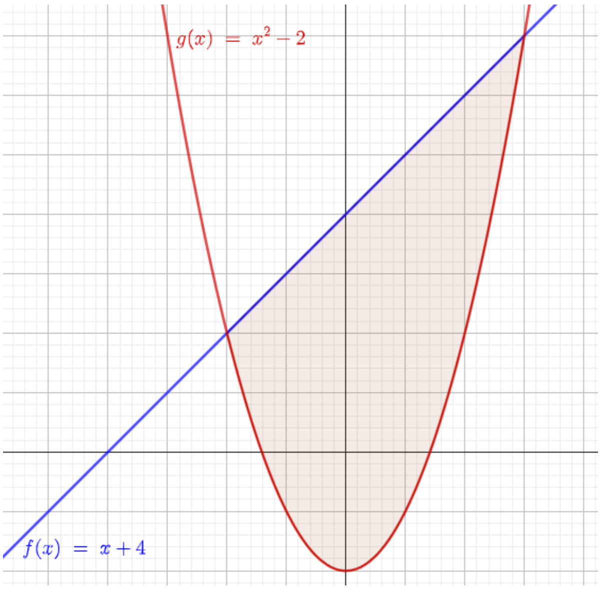


>
x

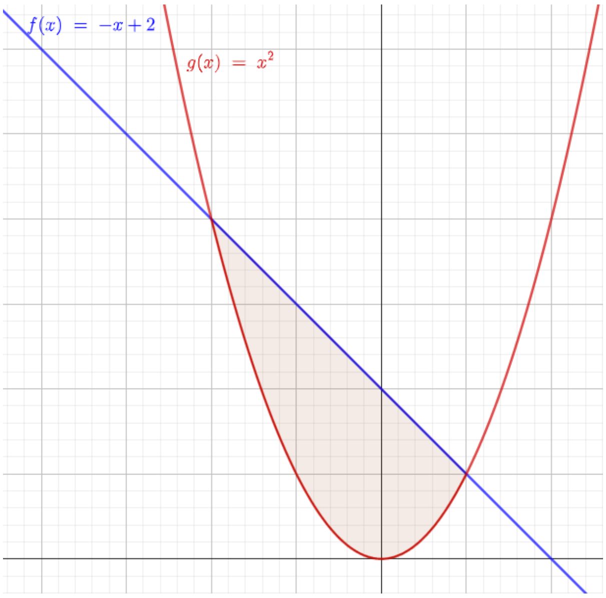
Latihan

Tentukanlah luas daerah yang diarsir pada tiap gambar di bawah ini! **Petunjuk:** tentukan terlebih dahulu titik potong kedua kurva yang diberikan.

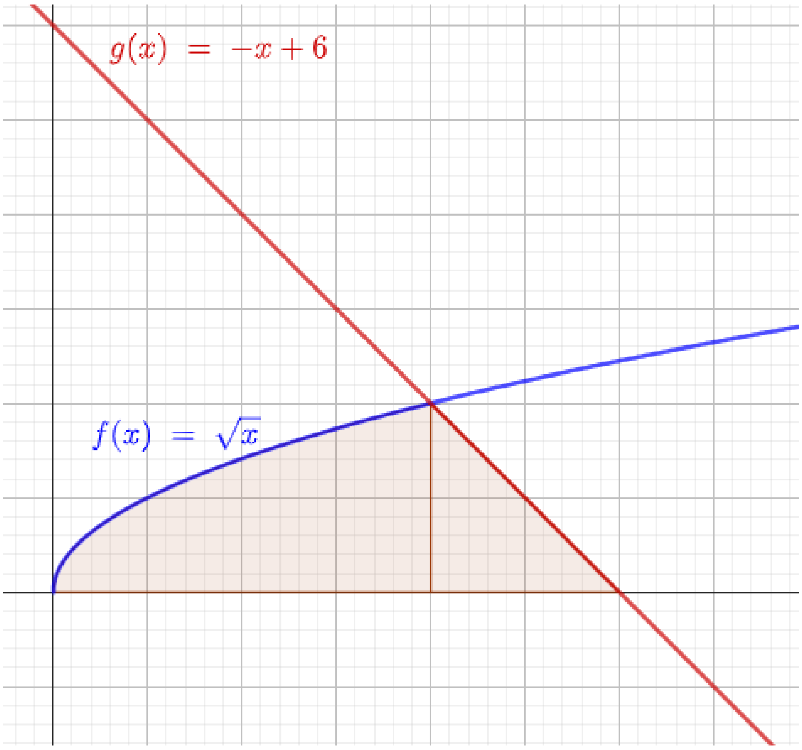
1.



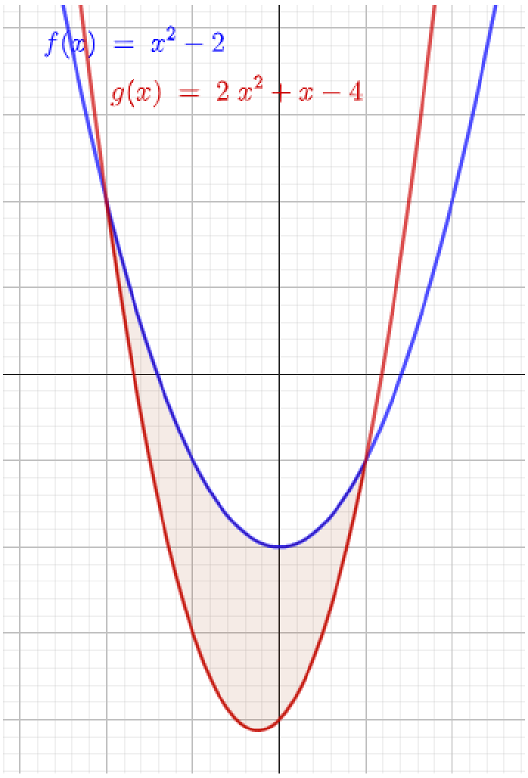
2.



3.



4,



BAB 5
LUAS BIDANG DATAR

Kompetensi Dasar :

1. Mengunakan Software GeoGebra dalam menganalisis penerapan konsep integral
2. Menganalisis penerapan konsep integral tentu dalam menentukan luas bidang datar
3. Menggunakan konsep integral tentu dalam penyelesaian masalah.

Indikator :

Setelah pembelajaran mahasiswa diharapkan dapat :

1. Menggunakan Software Geogebra dalam menganalisis penerapan konsep integral
2. Menganalisis penerapan konsep integral tentu dalam menyelesaikan masalah
3. Menerapkan konsep integral tentu dalam menyelesaikan masalah

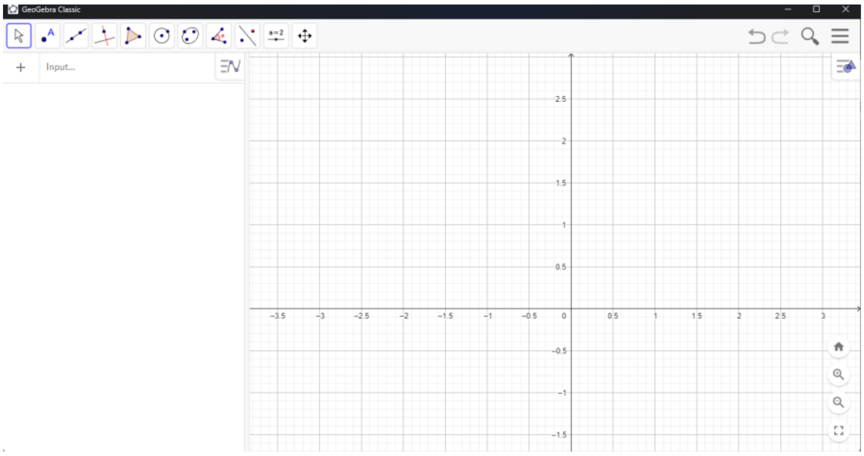
Luas Bidang Datar

Pada kesempatan ini, akan ditunjukkan penggunaan software GeoGebra dalam menentukan luas suatu benda. Penggunaan GeoGebra membantu dalam mengkontruksi atau menentukan persamana fungsi dari benda yang ingin ditentukan luasnya. Adapun software GeoGebra dapat di akses melalui laman: https://www.geogebra.org/classic?lang=en . Sebagai contoh kita akan menentukan luas benda di bawah ini.

Gambar 1. Sebuah Daun

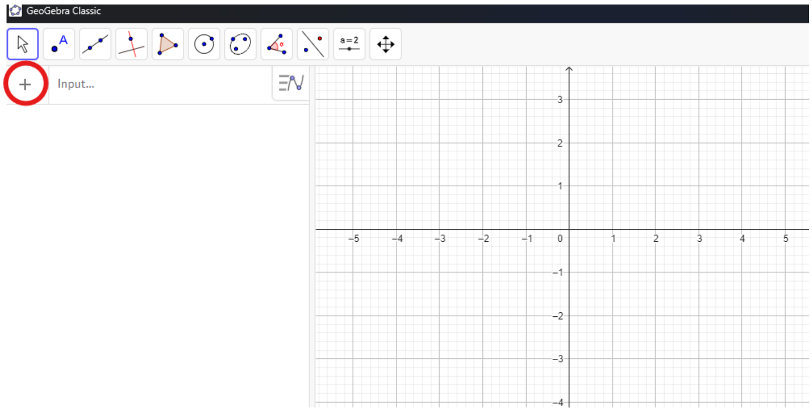
Untuk menentukan luas kedua benda tersebut, kita perlu menentukan persamaan yang bersesuaian untuk dapat menghitungnya. Untuk memperoleh persamaan yang bersesuaian, kita dapat menggunakan Geogebra untuk menemukan persamaannya, sehingga kita akan dapat menghitung pendekatan luas menggunakan integral tentu. Berikut adalah langkah-langkah dalam menemukan persamaan yang bersesuaian dari sebuah benda menggunakan GeoGebra.

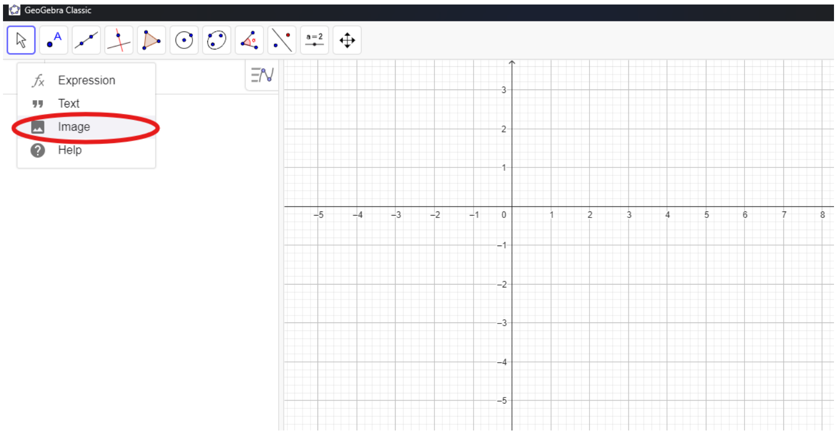
1. Buka Aplikasi Geogebra



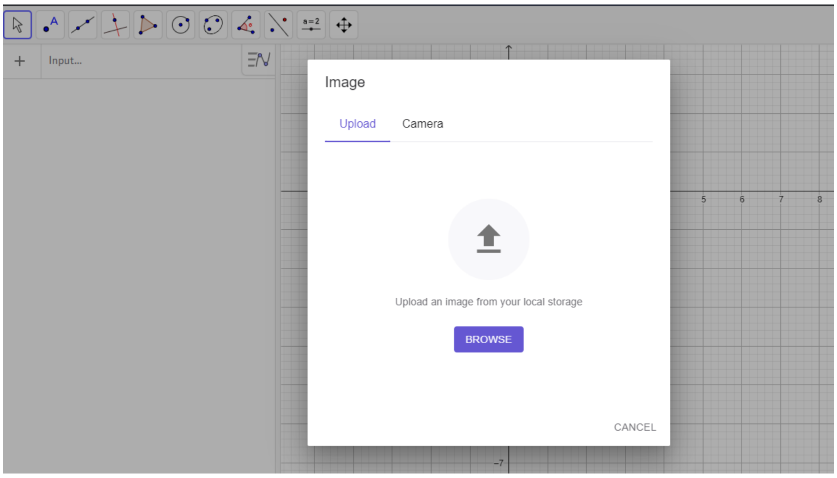
Gambar 1. Tampilan Awal GeoGebra

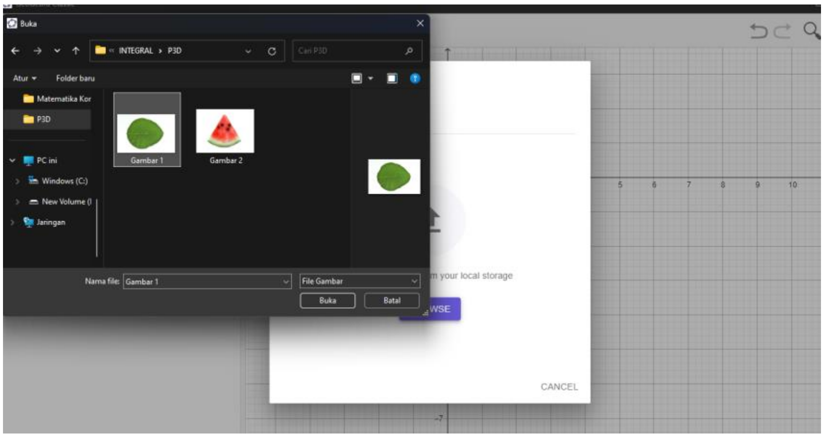
2. Inputkan gambar benda konkrit yang ingin ditentukan luasnya, dengan cara Klik tanda “+” yang berapa pada bagian sebelah kiri layar input lalu pilih “image”

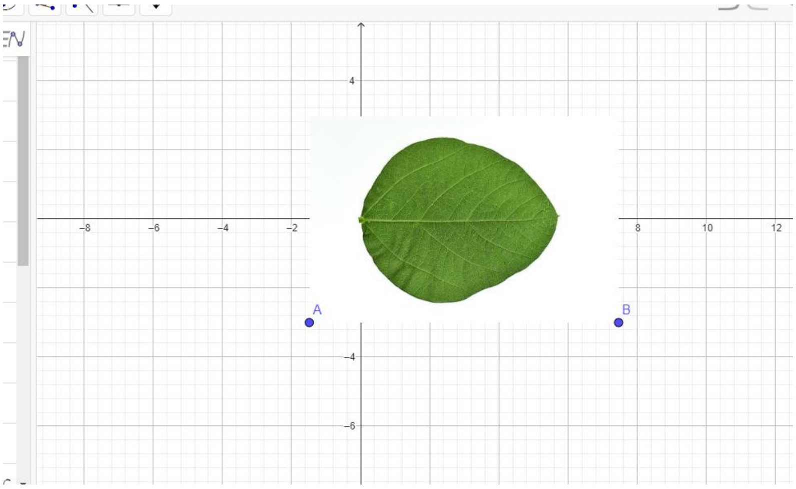




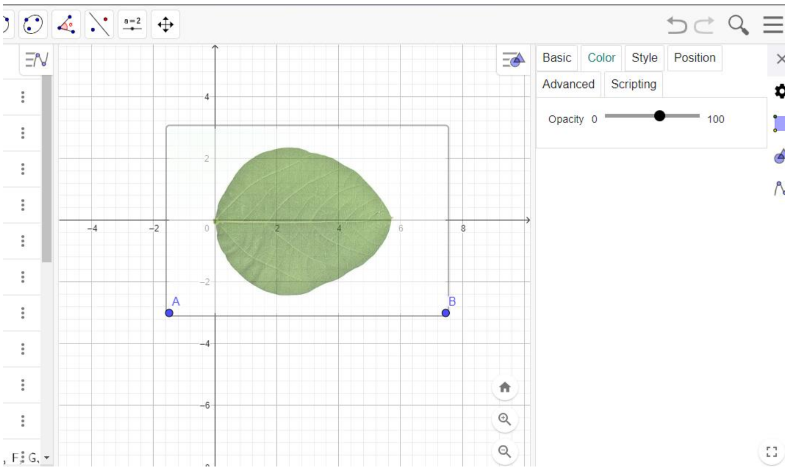
3. Pilih Gambar yang akan dicari persamaannya



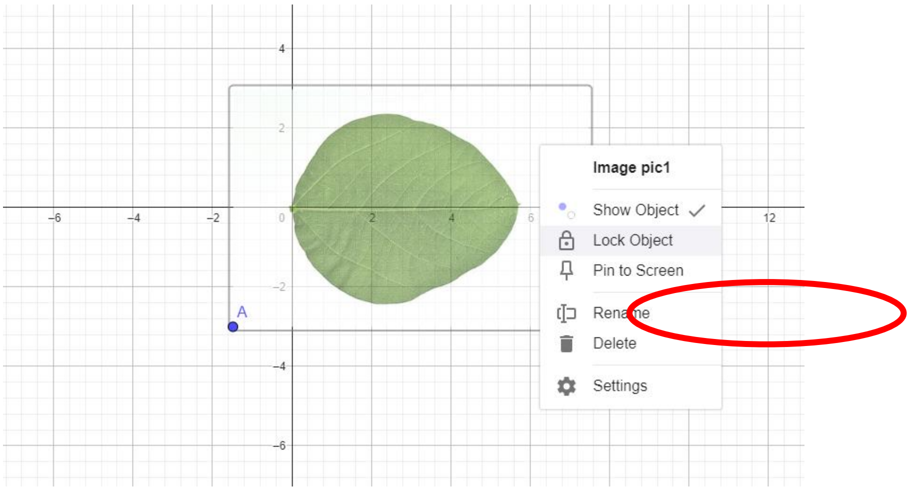




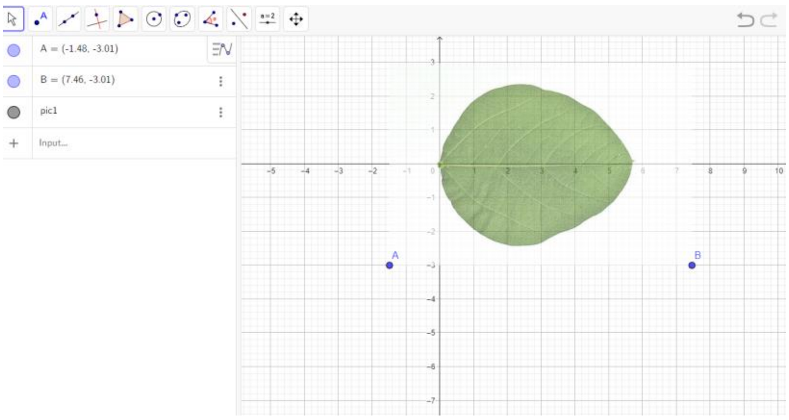
4. Posisikan gambar pada bidang kartesius. Atur kontras gambar agar menjadi sedikit transparan sehingga dapat diposisikan pada pusat koordinat, dengan cara klik kanan pada gambar → setting → color → geser opacity pada posisi menyesuaikan agar koordinat pada kartesius terlihat.



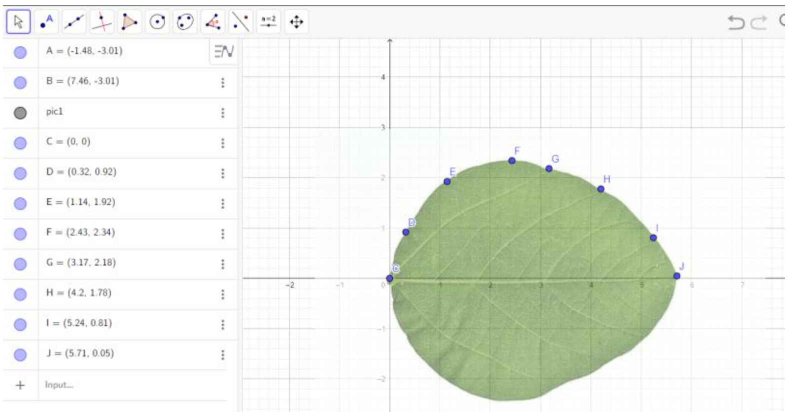
Setelah dirasa cukup tutup jendela setting. Untuk mengantisipasi gambar bergerak, *lock* (kunci) posisi gambar dengan cara klik kanan pada gambar → pilih lock object



Maka hasil akhir diperoleh sebagai berikut.

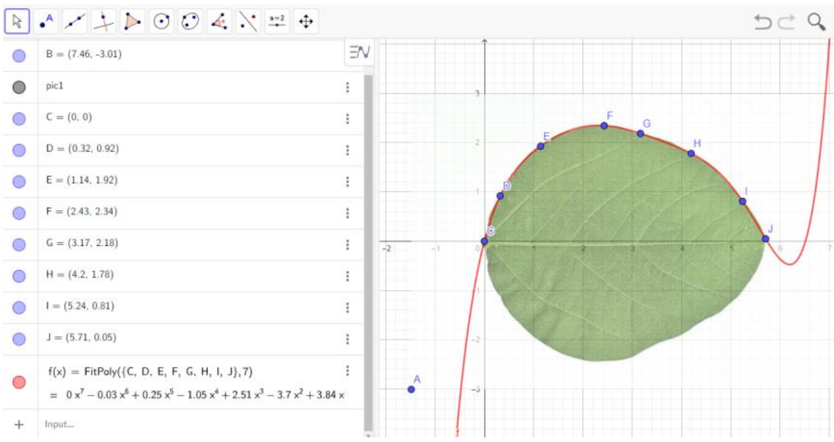


5. Buat titik-titik sembarang yang memenuhi sisi-sisi bagian atas pada daun.



Pendefinisian titik-titik ini bertujuan untuk membuat grafik persamaan yang akan melalui titik-titik tersebut, yang selanjutnya persamaan yang terbentuk merupakan persamaan yang bersesuaian untuk bentuk daun yang dimaksud (secara umum, makin banyak titik yang dibuat untuk memenuhi gambar, maka semakin baik).

6. Ketikan perintah "FitPoly({C,D,E,F,G,H,I,J},7)" pada bagian input. Perintah "FitPoly" merupakan pendefinisian sebuah perintah untuk dapat membuat persamaan polinomial (poly) dengan tepat (fit) berdasarkan titik-titik yang didefinisikan. Selanjutnya angka "7" menunjukkan derajat polynomial yang akan dibuat, penentukan angka ini berdasarkan jumlah titik yang telah dibuat lalu dikurangi 1. Sebagai contoh bahwa titik-titik yang dibuat adalah titik C, D, E, F, G, H, I, dan J yang berjumlah 8, maka derajat polinomial yang dibuat adalah $8 - 1 = 7$.



Sehingga diperoleh persamaan yang bersesuaian yaitu:

$$f(x) = -0{,}03x^6 + 0{,}25x^5 - 1{,}05x^4 + 2{,}51x^3 - 3{,}7x^2 + 3{,}84x$$

7. Hitung integral fungsi $f(x) = -0{,}03x^6 + 0{,}25x^5 - 1{,}05x^4 + 2{,}51x^3 - 3{,}7x^2 + 3{,}84x$ dengan melihat batas dari titik $C(0{,}0)$ sampai titik $J(5.71, 0.05)$, sehingga integral yang dimaksud adalah

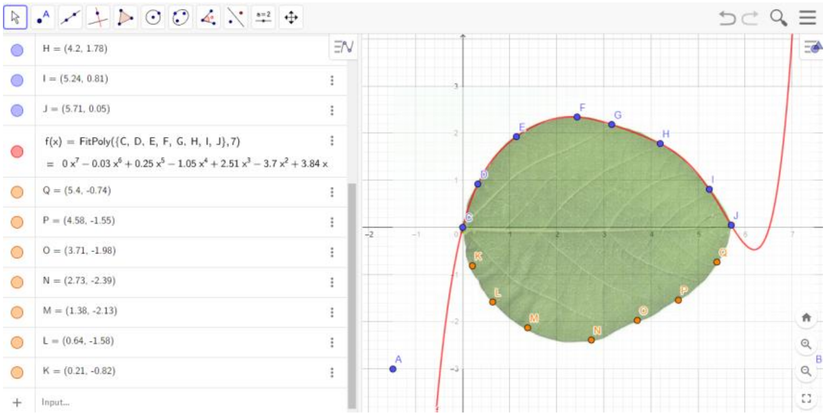
$$L = \int_0^{5{,}71} f(x)\,dx = \int_0^{5{,}71} -0{,}03x^6 + 0{,}25x^5 - 1{,}05x^4 + 2{,}51x^3 - 3{,}7x^2 + 3{,}84x\,dx$$

$$= \left[-\frac{0{,}03}{\dots}x^7 + \frac{0{,}25}{6}x^6 - \frac{1{,}05}{\dots}x^5 + \frac{2{,}51}{4}x^4 - \frac{3{,}7}{\dots}x^3 + \frac{3{,}84}{\dots}x^2\right]_0^{5{,}71}$$

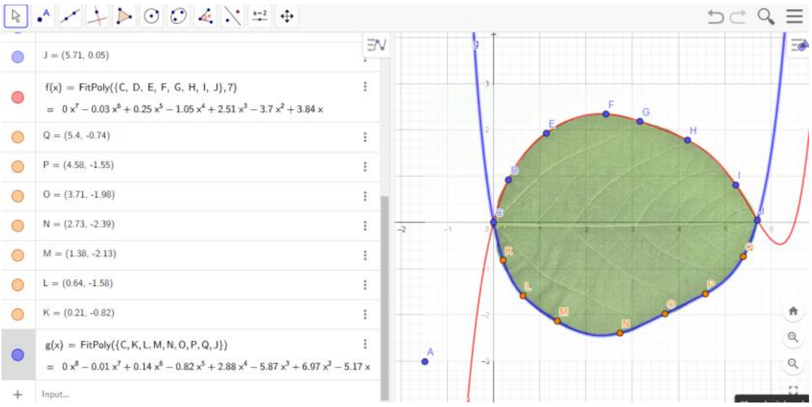
$$= -\frac{0{,}03}{7}(5{,}71)^7 + \frac{0{,}25}{\dots}(\dots)^6 - \frac{1{,}05}{\dots}(\dots)^5 + \frac{2{,}51}{\dots}(\dots)^4 - \frac{3{,}7}{\dots}(\dots)^3 + \frac{3{,}84}{\dots}x^2$$

$$= \dots\dots$$

8. Konstruksikan kembali titik-titik sembarang yang memenuhi sisi-sisi bagian bawah pada daun



9. Masukkan perintah "FitPoly({C,K,L,M,N,O,P,Q,J},8)" pada bagian input. titik yang dibuat adalah titik C, K, L, M, N, O, P, Q dan J yang berjumlah 9, maka derajat polinomial yang dibuat adalah $8 - 1 = 7$.



Sehingga diperoleh persamaan yang bersesuaian yaitu:

$$g(x) = -0{,}01x^7 + 0{,}14x^6 - 0{,}82x^5 + 2{,}88x^4 - 5{,}87x^3 + 6{,}97x^2 - 5{,}17x$$

10. Hitung integral fungsi $g(x) = -0{,}01x^7 + 0{,}14x^6 - 0{,}82x^5 + 2{,}88x^4 - 5{,}87x^3 + 6{,}97x^2 - 5{,}17x$ dengan melihat batas dari titik $C(0{,}0)$ sampai titik

$J(5.71, 0.05)$ dan mengingat bahwa fungsi $g(x)$ berada di bawah sumbu $-x$, sehingga integral yang dimaksud adalah

$$L = -\int_0^{5,71} g(x)\,dx$$

$$= -\int_0^{5,71} -0,01x^7 + 0,14x^6 - 0,82x^5 + 2,88x^4 - 5,87x^3 + 6,97x^2 - 5,17x\,dx$$

$$= -\left[-\frac{0,01}{\dots}x^8 + \frac{0,14}{\dots}x^7 - \frac{0,82}{\dots}x^6 + \frac{2,88}{\dots}x^5 - \frac{5,87}{4}x^4 + \frac{6,97}{\dots}x^3 - \frac{5,17}{\dots}x^2\right]_0^{5,71}$$

$$= -\left[-\frac{0,01}{\dots}(\dots)^8 + \frac{0,14}{\dots}(\dots)^7 - \frac{0,82}{\dots}(\dots)^6 + \frac{2,88}{\dots}(5.71)^5 - \frac{5,87}{4}(\dots)^4 + \frac{6,97}{\dots}(\dots)^3 - \frac{5,17}{\dots}(\dots)^2\right]$$

$$= \dots\dots$$

11. Hitungan luas daun sebagai penjumlahan hasil integral dari fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, sehingga diperoleh

$$Luas = \int_0^{5,71} f(x)\,dx + \int_0^{5,71} g(x)\,dx$$

$$= \dots\dots + \dots\dots$$

$$= \dots\dots$$

Latihan

Carilah 3 benda di sekitar Anda, selanjutnya dengan bantuan GeoGebra tentukanlah persamaan yang bersesuaian untuk ketiga benda tersebut, dan tentukan luas daerah dari masing-masing benda yang telah anda pilih.

BAB 6
APLIKASI LUASAN

Kompetensi Dasar :

1. Menunjukkan penerapan integral dalam konteks budaya untuk menghitung luas daerah.
2. Meningkatkan pemahaman tentang pentingnya etnomatematika dalam pendidikan matematika.
3. Mempromosikan apresiasi terhadap warisan budaya Suku dayak hindu budha bumi segandu Indramayu.

Indikator :

Setelah pembelajaran mahasiswa diharapkan dapat :

1. Mengenal Benda-benda dari Suku Dayak Hindu Budha Bumi Segandu Indramayu.
2. Menerapkan konsep integral dalam konteks budaya untuk menghitung luas daerah pada benda-benda dari Suku Dayak Hindu Budha Bumi Segandu Indramayu.

Aplikasi Luasan

Integral adalah konsep matematika yang digunakan untuk menghitung luas, volume, panjang kurva, dan berbagai ukuran lainnya. Dalam konteks menentukan luas daerah, integral digunakan untuk menghitung luas di bawah kurva atau grafik fungsi. Penggunaan konsep ini dapat diperluas untuk menentukan benda-benda yang berada disekitar kita.

Untuk itu pada modul ini kita akan mengeksplorasi bagaimana konsep integral dapat digunakan untuk menghitung luas daerah dari benda-benda dari budaya Suku Dayak Hindu Budha Bumi Segandu. Harapan dari penjelasan ini akan menunjukkan kepada kita semua bagaimana matematika dapat diaplikasikan dalam konteks yang bermakna dan relevan bagi komunitas tersebut.

Suku Dayak Hindu Budha Bumi Segandu merupakan komunitas adat yang tinggal di Indramayu, Jawa Barat. Mereka memiliki akar budaya yang kaya dan beragam, yang mencakup elemen Hindu dan Budha dalam praktik keagamaan dan sosial mereka. Komunitas ini dikenal dengan berbagai upacara adat, tarian, musik, dan kerajinan tangan yang khas. Benda-benda budaya mereka, seperti **Sabuk Nipong**, **Kasang, Kalung Bumi Segandu, Pusaka Samiaji**, dan **Punden Tungku 3 Gunung Krakatau Pusar Alam**, memiliki makna spiritual dan simbolis yang mendalam.

Pada pembahasan kali ini, akan dicari luas daerah dari 3 benda Suku Dayak Hindu Budha Bumi Segandu yaitu **Sabuk Nipong**, **Kasang,** dan **Kalung Bumi Segandu, Pusaka Samiaji**. Seperti pada kegiatan modul 5, kita akan menggunakna Geogebra untuk membantu dalam menentukan persamaan fungsi yang bersesuaian untuk ketiga benda tersebut.

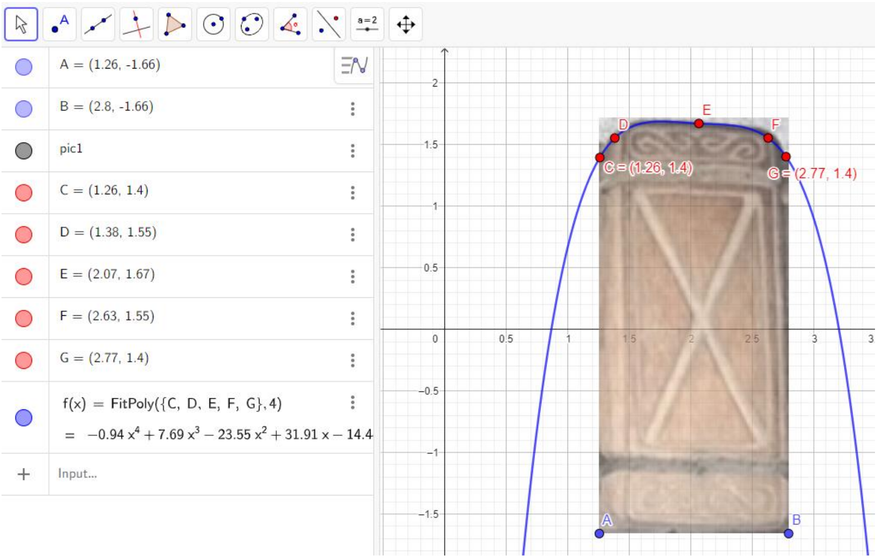
1. **Sabuk Nipong**

   Sabuk Nipong berbentuk pita lebar yang dapat melilit pinggang beberapa kali. Umumnya, bentuknya memanjang dan datar dengan lebar yang konsisten sepanjang sabuk (lihat gambar di bawah ini). Ukuran Sabuk Nipong memiliki lebar: antara 5 hingga 15 cm. Panjang: mencapai 1 hingga 2 meter, tergantung pada ukuran tubuh pemakainya dan jumlah lilitan yang diinginkan.

Gambar Sabuk Nipong

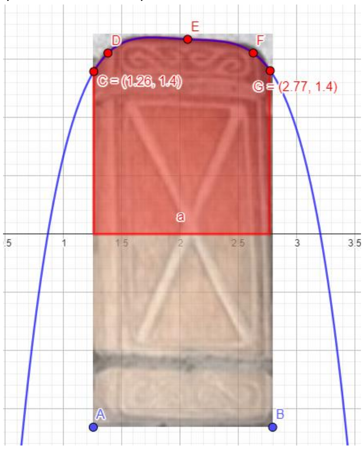
   Sabuk Nipong Terbuat dari bahan alami seperti kulit kayu atau serat tumbuhan yang dianyam atau dijalin. Kadang-kadang dihiasi dengan manik-manik atau motif yang diukir langsung pada kulit kayu, memberikan nilai estetika dan simbolis tambahan. Selain sebagai pakaian, sabuk ini juga memiliki nilai simbolis yang tinggi dalam upacara adat dan ritual keagamaan. Sabuk ini sering digunakan sebagai simbol kekuatan dan perlindungan, menunjukkan pentingnya benda ini dalam kehidupan masyarakat Suku Dayak Hindu Budha Bumi Segandu.

Setelah mengenal benda ini, selanjutnya kita akan menghitung luas permukaan dari sabuk nipong. Perhatikan gambar dibawah ini, akan dikonstruksikan luas 1 bagian Sabuk Nipong.



Dari pendekatan yang dilakukan, digunakan 5 titik (C,D,E,F,G) dan diperoleh 1 buah persamaan yang bersesuian, yaitu

$$f(x) = -0{,}94x^4 + 7{,}69x^3 - 23{,}55x^2 + 31{,}91x - 14{,}40$$



Luas daerah kurva $f(x)$ yang dimaksud adalah luas daerah kurva yang dibatasi oleh sumbu-x, kurva $f(x)$, $C(1.26,1.4)$ dan $G(2.77,1.4)$, seperti yang terlihat pada gambar disamping.

Dengan memperhartikan batasan yang dimaksud, perhitungan luas daerah kurva $f(x)$ menggunakan integral sebagai berikut.

$$\int_{1,26}^{2,77} f(x)\,dx = \int_{1,26}^{2,77} (-0{,}94x^4 + 7{,}69x^3 - 23{,}55x^2 + 31{,}91x - 14{,}40)\,dx$$

$$= \int_{1,26}^{2,77} (-0,94x^4 + 7,69x^3 - 23,55x^2 + 31,91x - 14,40)\, dx$$

$$= -\frac{0,94}{5}x^5 + \frac{7,69}{4}x^4 - \frac{23,55}{3}x^3 + \frac{31,91}{2}x^2 - 14,40x\Big]_{1.26}^{2.77}$$

$$= \Big[-\frac{0,94}{5}(2,77)^5 + \frac{7,69}{4}(2,77)^4 - \frac{23,55}{3}(2,77)^3 + \frac{31,91}{2}(2,77)^2 - 14,40(2,77)\Big] - \Big[-\frac{0,94}{5}(1,26)^5 + \frac{7,69}{4}(1,26)^4 - \frac{23,55}{3}(1,26)^3 + \frac{31,91}{2}(1,26)^2 - 14,40(1,26)\Big]$$

$$= (-1,77) - (-4,27)$$

$$= 2,50$$

Diperoleh luas daerah di bawah kurva yaitu

$$\int_{1,26}^{2,77} f(x)\, dx = 2,50$$

Mengingat bahwa 1 bagian Sabuk Nipong ini simetris, maka luas permukaan 1 bagian Sabuk Nipong tersebut adalah

$$A = 2\int_{1,26}^{2,77} f(x)\, dx$$

$$= 2(2,50)$$

$$= 5$$

Sehingga, jika pada sabuk nipong tersebut terdapat 10 bagian, maka luas permukaan sabuk nipong tersebut adalah 50 satuan luas.

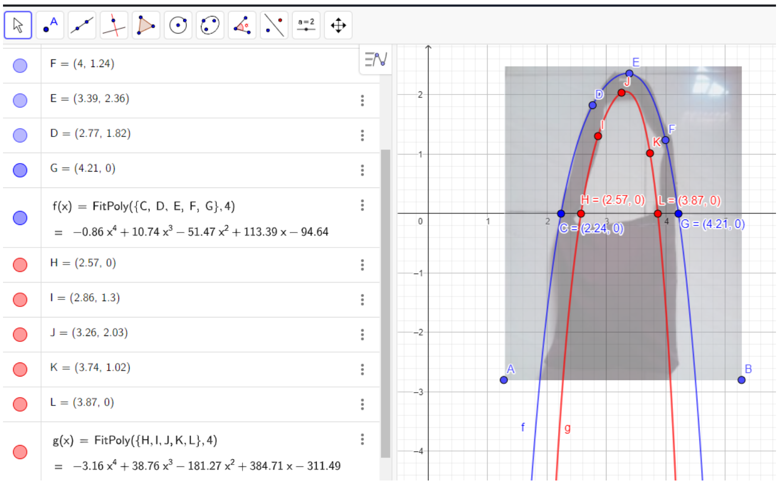
2. Kasang

Kasang berbentuk seperti tas atau kantong yang digunakan untuk menyimpan barang-barang (lihat gambar di samping). Biasanya memiliki bentuk persegi atau persegi panjang dengan tali untuk memudahkan membawa. Ukuran

Kasang bisa bervariasi dalam ukuran, tetapi umumnya berukuran sekitar 30 x 40 cm. Ukuran bisa disesuaikan tergantung kebutuhan pengguna.

Kasang terbuat dari kain katun berwarna hitam. Kain katun dipilih karena tahan lama dan nyaman digunakan. Kasang bukan hanya aksesoris praktis, tetapi juga memiliki nilai budaya dalam kehidupan sehari-hari masyarakat Suku Dayak Hindu Budha Bumi Segandu. Kasang digunakan dalam berbagai kegiatan sehari-hari dan mungkin memiliki makna simbolis dalam konteks adat dan tradisi.

Setelah mengenal Benda ini, selanjutnya kita akan menghitung luas permukaan dari tali kasang. Untuk itu kita akan menggunakan **GeoGebra** untuk memperoleh **persamaan** yang sesuai dan menggunakan **konsep integral** untuk menghitung **luas permukana tali kasang**. Perhatikan gambar di bawah ini.



Dari hasil konstruksi yang dilakukan diperoleh persamaan kurva $\boldsymbol{f(x)}$ sebagai kurva yang menggambarkan **tali Kasang bagian luar**, dan kurva $\boldsymbol{g(x)}$ yang menggambarkan **tali kasang bangian dalam**. Dua persamaan kurva tersebut masing-masing:

$$f(x) = -0{,}86x^4 + 10{,}74x^3 - 51{,}47x^2 + 113{,}39x - 94{,}64$$

$$g(x) = -3{,}16x^4 + 38{,}76x^3 - 181{,}27x^2 + 384{,}71x - 311{,}49$$

Gambar 2a merupakan luas daerah yang dibatasi oleh $\boldsymbol{f(x)}$, sumbu-x dan titik C dan G. Sedangkan Gambar 2b merupakan luas daerah yang dibatasi oleh $\boldsymbol{g(x)}$, sumbu-x dan titik H dan L.

sehingga untuk mengetahui luas permukaan tali Kasang (A), dapat dilakukan dengan menghitung integral:

$$A = \int_{2,24}^{4,21} f(x)\,dx - \int_{2,57}^{3,87} g(x)\,dx$$

Pertama kita akan menghitung luas dari daerah yang dibatasi oleh fungsi $f(x)$ Perhatikan luas daerah yang dibatasi oleh $f(x)$, sumbu-x dan titik C dan G.

$$\int_{2,24}^{4,21} f(x)\,dx = \int_{2,24}^{4,21} -0,86x^4 + 10,74x^3 - 51,47x^2 + 113,39x - 94,64\,dx$$

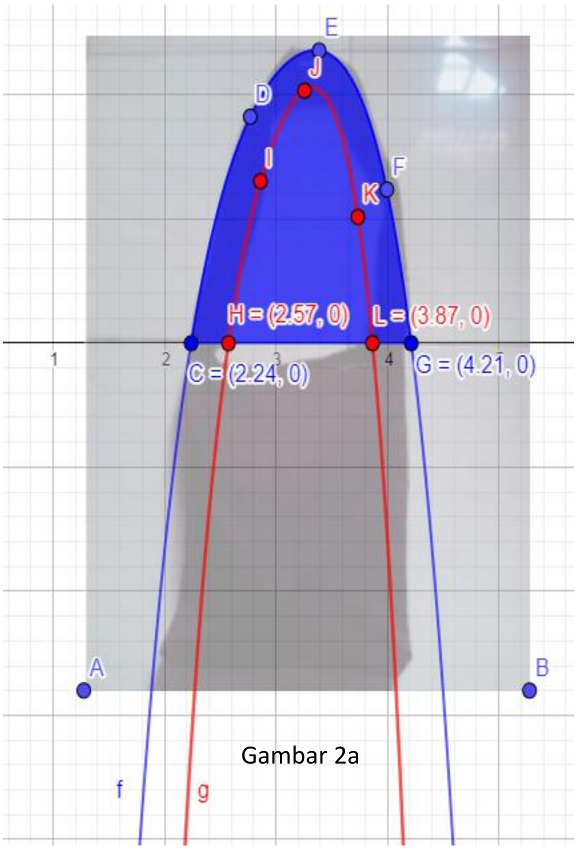
$$= -\frac{0,86}{5}x^5 + \frac{10,74}{4}x^4 - \frac{51,47}{3}x^3 + \frac{113,39}{2}x^2 - 94,64x\Big]_{2,24}^{4,21}$$

$$= \Big[-\frac{0,86}{5}(4,21)^5 + \frac{10,74}{4}(4,21)^4 - \frac{51,47}{3}(4,21)^3 + \frac{113,39}{2}(4,21)^2 - 94,64(4,21)\Big]$$
$$- \Big[-\frac{0,86}{5}(2,24)^5 + \frac{10,74}{4}(2,24)^4 - \frac{51,47}{3}(2,24)^3 + \frac{113,39}{2}(2,24)^2 - 94,64(2,24)\Big]$$

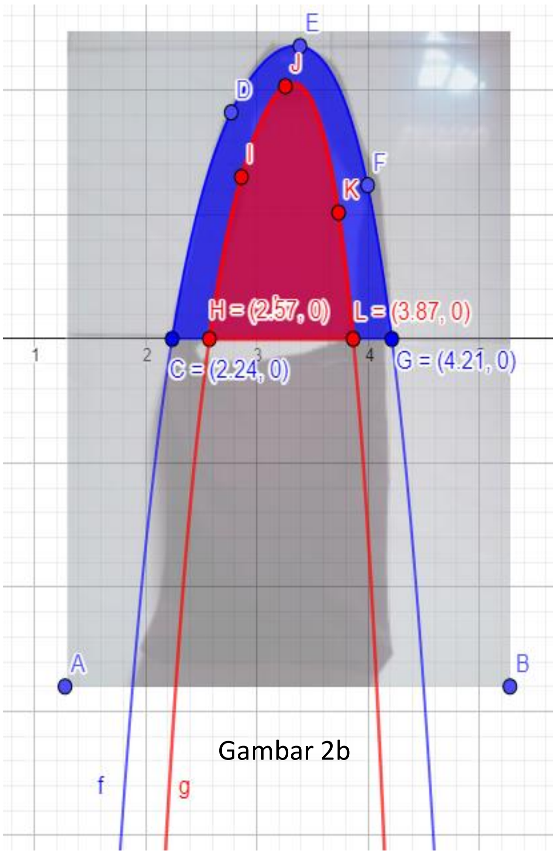
$$= -57,77 - (-62,45)$$

$$= 4,68$$

Selanjutnya kita akan menghitung luas dari daerah yang dibatasi oleh fungsi $g(x)$. Perhatikan luas daerah yang dibatasi oleh $g(x)$, sumbu-x dan titik H dan L.



Gambar 2a



Gambar 2b

$$\int_{2,57}^{3,87} g(x)\,dx = \int_{2,57}^{3,87} -3{,}16x^4 + 38{,}76x^3 - 181{,}27x^2 + 384{,}71x - 311{,}49\,dx$$

$$= -\frac{3{,}16}{5}x^5 + \frac{38{,}76}{4}x^4 - \frac{181{,}27}{3}x^3 + \frac{384{,}71}{2}x^2 - 311{,}49x\Big]_{2,57}^{3,87}$$

$$= \left[-\frac{3{,}16}{5}(3{,}87)^5 + \frac{38{,}76}{4}(3{,}87)^4 - \frac{181{,}27}{3}(3{,}87)^3 + \frac{384{,}71}{2}(3{,}87)^2 - 311{,}49(3{,}87)\right]$$

$$-\left[-\frac{3{,}16}{5}(2{,}57)^5 + \frac{38{,}76}{4}(2{,}57)^4 - \frac{181{,}27}{3}(2{,}57)^3 + \frac{384{,}71}{2}(2{,}57)^2 - 311{,}49(2{,}57)\right]$$

$$= -201{,}84 - (-203{,}84)$$

$$= 2{,}00$$

Sehingga luas permukaan tali Kasang (A) adalah

$$A = \int_{2,24}^{4,21} f(x)\, dx - \int_{2,57}^{3,87} g(x)\, dx$$

$$= 4,68 - 2,00$$

$$= 2,68 \text{ satuan luas}$$

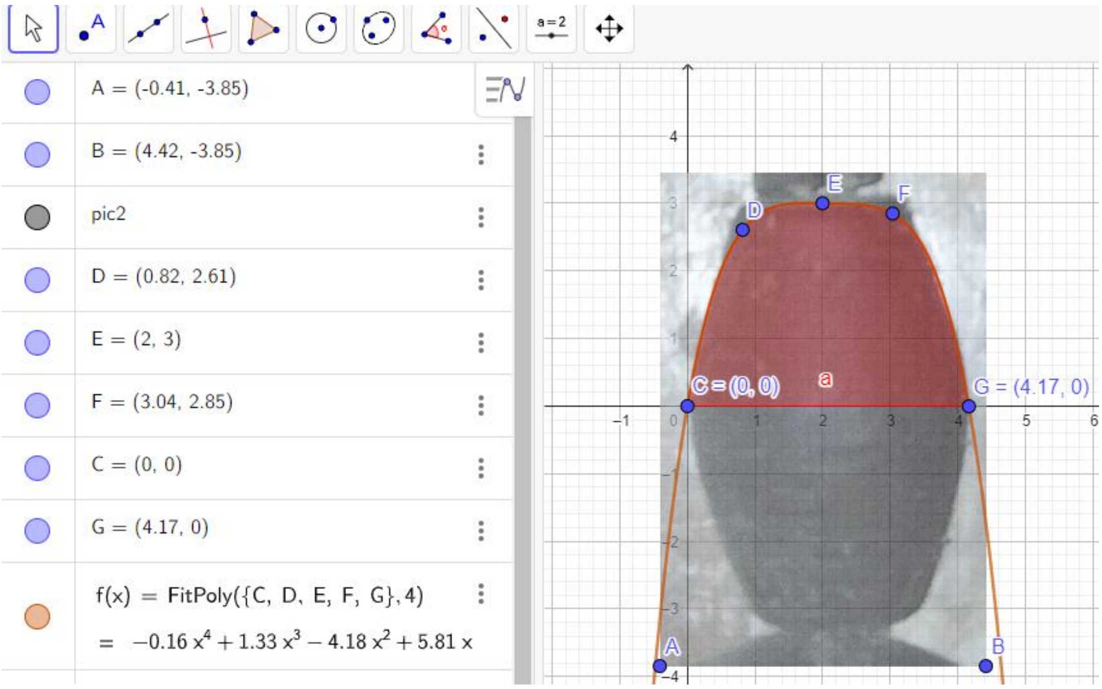
3. Kalung Bumi Segandu

Kalung Bumi Sagandu

Kalung Bumi Segandu biasanya memiliki desain melingkar dengan sejumlah manik-manik atau ornamen yang disusun sepanjang tali kalung (lihat Gambar disamping) . Terdapat hiasan khusus pada bagian tengah kalung yang menjadi titik fokus utama. Ukuran Panjang kalung dapat bervariasi, umumnya sekitar 50 cm hingga 70 cm ketika direntangkan. Diameter manik-manik bervariasi, rata-rata antara 0.5 cm hingga 2 cm (perhatikan Gambar 3.

Kalung Bumi Segandu Terbuat dari bahan-bahan alami seperti kayu, batu, atau manik-manik dari kerang dan tulang. Beberapa kalung juga mungkin menggunakan tali dari serat alami yang kuat dan tahan lama. Kalung ini bukan hanya perhiasan, tetapi juga memiliki nilai simbolis yang mendalam, melambangkan hubungan dengan alam dan spiritualitas. Kalung ini digunakan dalam berbagai upacara adat dan ritual.

Setelah mengenal benda ini, selanjutnya kita akan menghitung luas permukaan manik-manik dari kalung bumi segandu. Perhatikan pada gambar di samping, kita akan mencoba menghitung **luas manik-manik** tersebut. Untuk itu, kita akan menggunakan **GeoGebra** untuk menemukan persamaan fungsi yang bersesuaian. Perhatikan ilustrasi berikut.



Dari hasil konstruksi yang dilakukan diperoleh persamaan kurva $f(x)$ sebagai kurva yang membatasi luas permukaan dari manik-manik kalung bumi segandu dan sumbu-x. Secara detail, luas permukaan manik-manik dibatasi oleh kurva $f(x)$, sumbu-x dan titik C dan G. Adapun fungsi $f(x)$ sebagai berikut.

$$f(x) = -0{,}16x^4 + 1{,}33x^3 - 4{,}18x^2 + 5{,}81x$$

Sehingga Integral Luas permukaan yang dimaksud adalah

$$\int_0^{4,17} f(x)\,dx = \int_0^{4,17} -0{,}16x^4 + 1{,}33x^3 - 4{,}18x^2 + 5{,}81x\,dx$$

$$= -\frac{0{,}16}{5}x^5 + \frac{1{,}33}{4}x^4 - \frac{4{,}18}{3}x^3 + \frac{5{,}18}{2}x^2\Big]_0^{4,17}$$

$$= \left[-\frac{0{,}16}{5}(4{,}17)^5 + \frac{1{,}33}{4}(4{,}17)^4 - \frac{4{,}18}{3}(4{,}17)^3 + \frac{5{,}18}{2}(4{,}17)^2\right]$$

$$-\left[-\frac{0{,}16}{5}(0)^5 + \frac{1{,}33}{4}(0)^4 - \frac{4{,}18}{3}(0)^3 + \frac{5{,}18}{2}(0)^2\right]$$

$$= 9{,}67 - 0$$

$$= 9{,}67$$

Diperoleh luas daerah di bawah kurva yaitu

$$\int_0^{4,17} f(x)\,dx = \int_0^{4,17} -0.16x^4 + 1.33x^3 - 4.18x^2 + 5.81x\,dx$$

$$= 9{,}67$$

Mengingat bahwa 1 manik-manik kalung bumi segandu ini simetris, maka luas permukaan 1 manik-manik kalung bumi segandu tersebut adalah

$$A = 2\int_0^{4,17} f(x)\,dx$$

$$= 2(9{,}67)$$

$$= 19{,}34 \text{ satuan luas}$$

Latihan

Berikut diberikan gambar 2 benda Suku Dayak Hindu Budha Bumi Segandu, yaitu **Pusaka Samiaji**, dan **Punden Tungku 3 Gunung Krakatau Pusar Alam.** Hitunglah luas permukaan kedua benda tersebut.

Gambar 1. Pusaka Samiaji

Gambar 2. Punden Tungku 3 Gunung Krakatau Pusar Alam

BAB 7
VOLUME BENDA PUTAR
METODE CAKRAM

Kompetensi Dasar:

1. Membuat sketsa benda putar dari bidang datar
2. Memahami prinsip metode cakram
3. Menganalisis volume benda putar menggunakan metode cakram
4. Menghitung volume benda putar menggunakan metode cakram

Indikator:

Setelah Pembelajaran diharapkan mahasiswa mampu:

1. Membuat sketsa benda putar cakram dengan benar
2. Memahami prinsip metode cakram
3. Menghitung volume benda putar metode cakram dengan benar

A. MEMBUAT SKETSA BENDA PUTAR DARI BIDANG DATAR

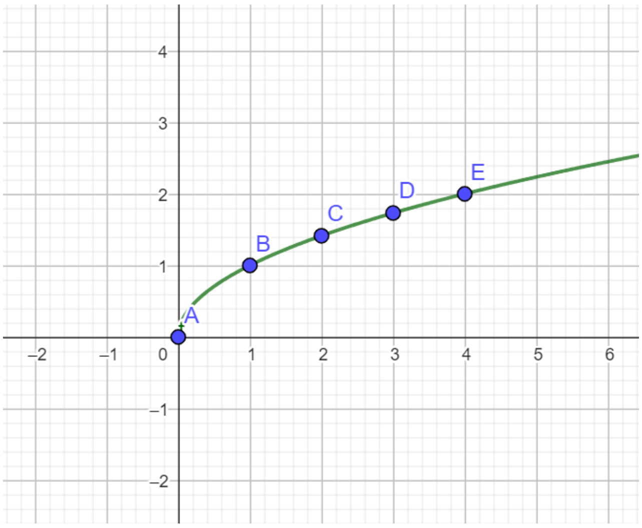
Mengitung Volume Benda putar merupakan salah satu aplikasi dari integral tentu. Materi ini merupakan kelanjutan dari materi menghitung luas daerah bidang datar (bidang rata). Konsep dasarnya muncul dari sebuah pertanyaan, bagaimana jika daerah bidang datar yang sudah diketahui semua batasnya diputar mengelilingi sebuah garis sebagai sumbu putarnya? Apa yang akan terjadi? Daerah sapuannya membentuk apa?

Mari kita ingat Kembali bagaimana cara kita membuat sketsa bidang datar (bidang rata) yang terbatas. Sketsalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}, sumbu - X\ , dan\ garis\ x = 4$.

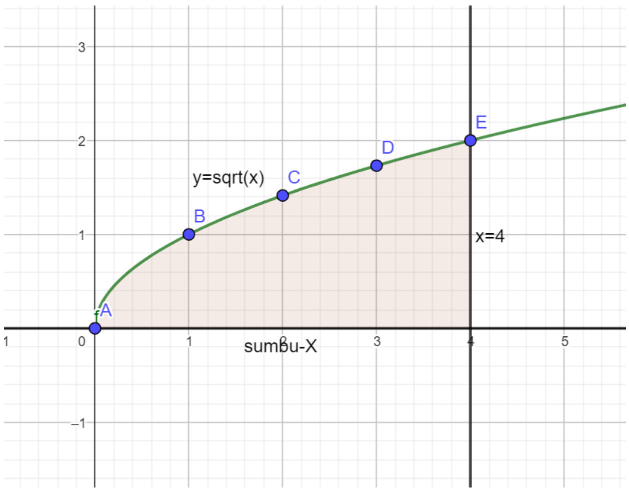
- Pertama-tama kita buat beberapa titik yang terletak pada kurva $y = \sqrt{x}$. Untuk pengambilan absis sebetulnya bebas, namun karena daerah dibatasi oleh x=4, maka kita gunakan titik di sekitar x = 4

x	0	1	2	3	4
y ($y = \sqrt{x}$)	$\sqrt{0}$= 0	$\sqrt{1}$=1	$\sqrt{2}$ = 1.41	$\sqrt{3}$=1.73	$\sqrt{4}$=2
(x,y)	(0,0)	(1,1)	(2,1.41)	(3,1.73)	(4,2)

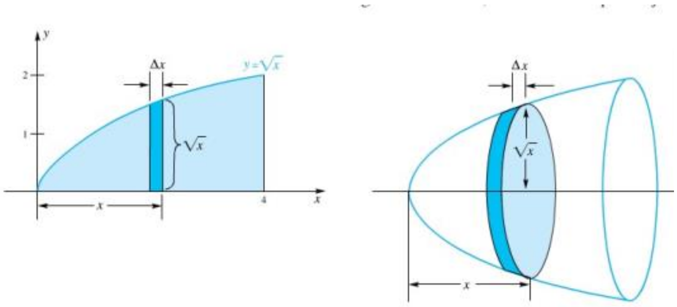
Buat kelima titik pada bidang kartesius kemudian hubungkan



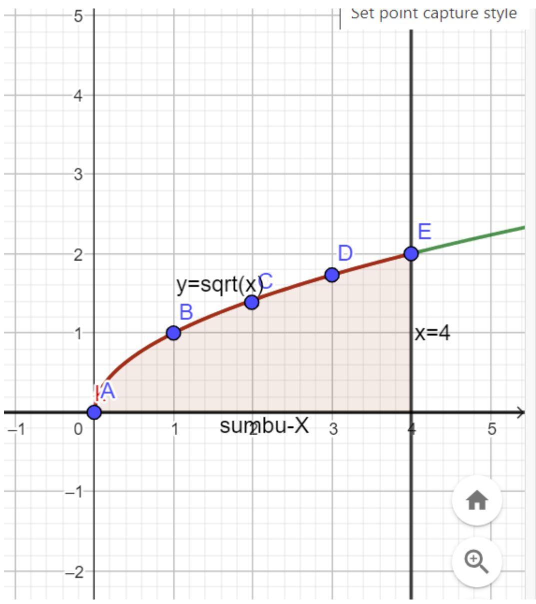
- Kemudian gambar sumbu-X dan garis x=4

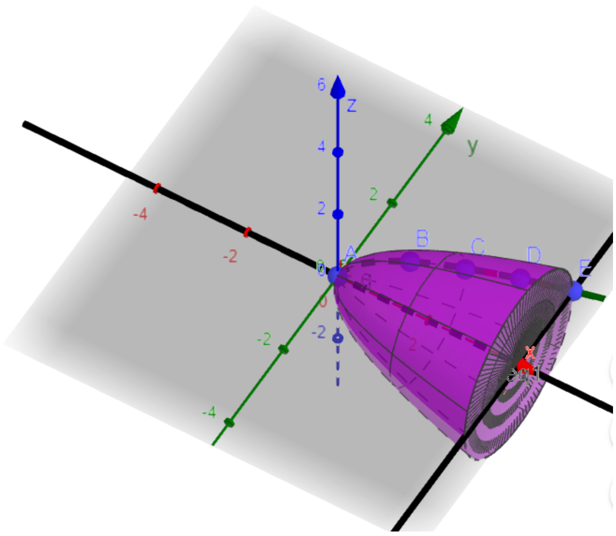


Maka daerah yang diarsir merupakan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}, sumbu - X\ , dan\ garis\ x = 4.$ Daerah ini kemudian akan diputar 360^0 mengelilingi sumbu X, sehingga akan membentuk sebuah benda pejal seperti tampak pada gambar berikut:



Dengan menggunakan Geogebra, akan terlihat jelas perputaran yang terjadi dan benda pejal yang terbentuk seperti pada gambar berikut:





Dengan menggunakan cara yang serupa, cobalah saudara sketsa benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut:

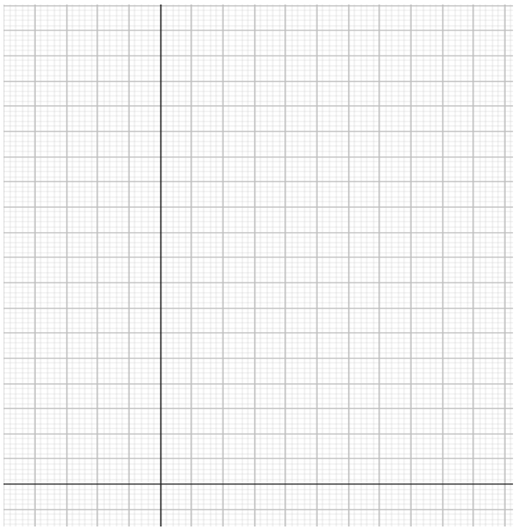
1. kurva $y=x^3$, x=3, dan y=0 diputar 360^0 mengelilingi sumbu-X

   Penyelesaian:

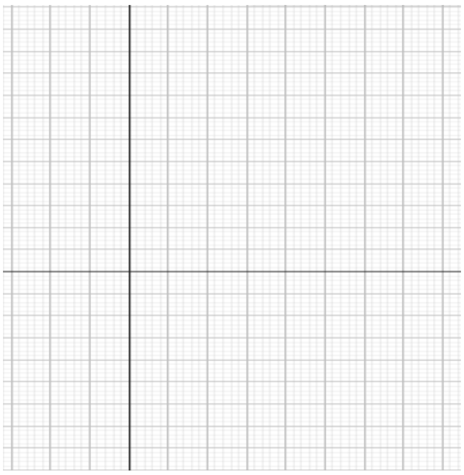
- buat beberapa titik yang terletak pada kurva $y = x^3$. Untuk pengambilan absis sebetulnya bebas, namun karena daerah dibatasi oleh x=3, maka kita gunakan titik di sekitar x = 3

X	0	1	2	3	4
y ($y = x^3$)	…	…	…	…	…
(x,y)	(,)	…	…	…	…

- Buat kelima titik pada bidang kartesius kemudian hubungkan, gambar garis x=3 dan garis y = 0. Arsir daerah tertutup



- Putar daerah yang sudah diarsir 360^0 mengelilingi sumbu-X



- Silahkan pelajari geogebra untuk melihat perputaran daerah secara langsung

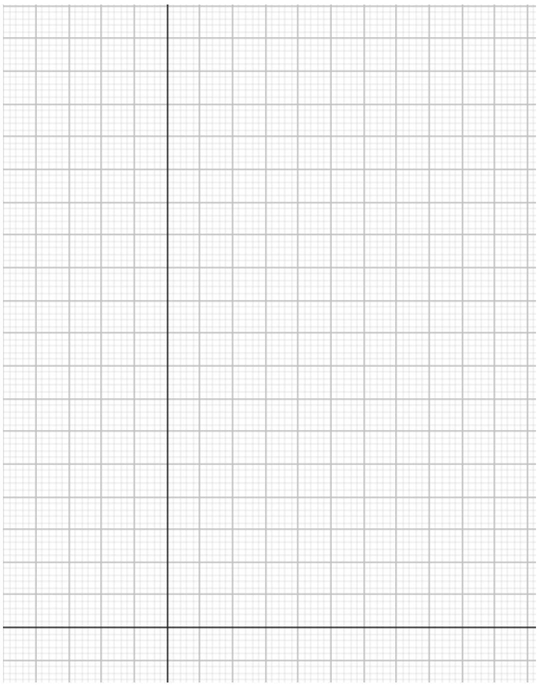
2. kurva $x = \frac{2}{y}$, y=2, y = 6, dan x = 0 diputar 360^0 mengelilingi sumbu-Y

Penyelesaian:

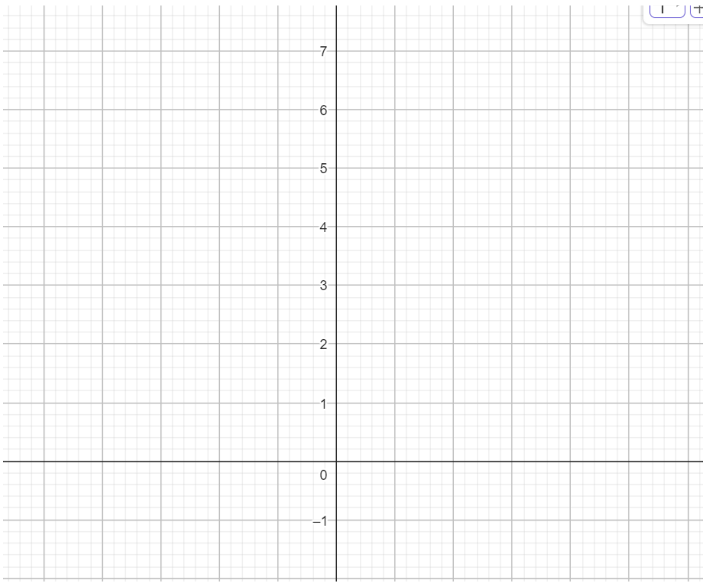
- buat beberapa titik yang terletak pada kurva $x = \frac{2}{y}$. Untuk pengambilan ordinat sebetulnya bebas, namun karena daerah dibatasi oleh y=2 dan y=6, maka kita gunakan ordinat 2 sampai 6

Y	2	3	4	5	6
x (x= $\frac{2}{y}$)	…	…	…	…	…
(x,y)	(,)	…	…	…	…

- Buat kelima titik pada bidang kartesius kemudian hubungkan, gambar garis y=2, garis y = 4 dan garis x = 0. Arsir daerah tertutup



- Putar daerah yang sudah diarsir 360^0 mengelilingi sumbu-Y



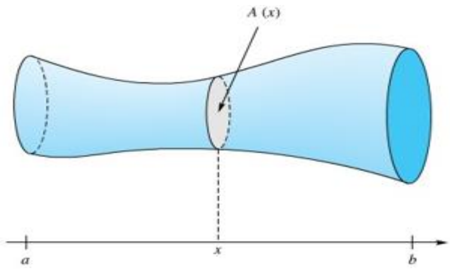
- Silahkan pelajari geogebra untuk melihat perputaran daerah secara langsung

- **MENENTUKAN VOLUME SEBUAH LEMPENGAN**

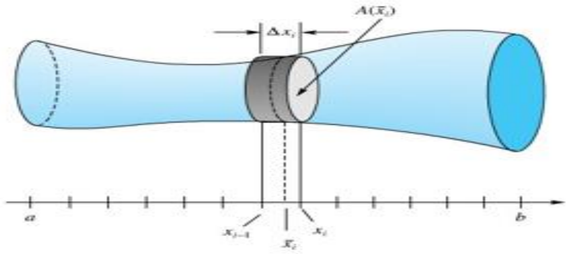
Perhatikan gambar koin berikut:

Koin 1000 ini berbentuk seperti tabung tipis atau lempengan. Untuk menghitung volume nya, kita harus ingat materi volume tabung, yaitu untuk tabung dengan jari-jari r dan tinggi t maka volume (V) adalah $\pi r^2 t$.

Sekarang perhatikanlah sebuah benda di mana penampang-penampang tegak lurusnya pada suatu garis yang memiliki luas tertentu. Misalnya garis tersebut adalah sumbu x dan andaikan bahwa luas penampang di x adalah $A(x)$ dengan $a \leq x \leq b$. Perhatikan gambar:



Selang $[a, b]$ kita bagi dengan titik-titik bagi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Melalui titik-titik itu kita lukis bidang tegak lurus pada sumbu$-X$. Dengan demikian kita peroleh pemotongan benda menjadi **lempengan** yang tipis-tipis. Perhatikan gambar:



Volume ΔV_i suatu lempeng dapat dianggap sebagai volume tabung, yaitu

$$\Delta V_i \approx A(\bar{x}_i)\Delta x_i,\;\; x_{i-1} \leq \bar{x}_i \leq x_i$$

- **VOLUME BENDA PUTAR SEBAGAI JUMLAH RIEMANN DARI VOLUME LEMPENGAN**

Volume (V) benda dapat diaproksimasi dengan jumlah Riemann

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

Apabila norma partisi kita tujukan ke nol, kita peroleh suatu integral tentu; integral ini kita definisikan sebagai volume benda

$$\mathrm{V} = \int_a^b A(x)dx$$

Karena luas lempengan (A(x)) biasanya berbentuk lingkaran dengan A=πr^2 dimana jari-jari ditentukan oleh letak titik x pada kurva f(x) sehingga $A(x) = \pi(f(x))^2$, maka diperoleh

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

- **MENGHITUNG VOLUME BENDA PUTAR DENGAN METODE CAKRAM**

Untuk memahami cara menghitung volume benda putar menggunakan metode cakram, kita akan mengerjakan soal contoh pada bagian A. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}, sumbu - X\ , dan\ garis\ x = 4$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu- X.

Penyelesaian:

Karena sketsa grafik benda putar sudah dibuat di bagian A, maka pada bagian ini kita akan melakukan perhitungannya saja. Ingat bahwa

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Dengan memperhatikan sketsa gambar, maka dapat ditentukan:

Batas kiri (a)=0, batas kanan (b) = 4, kurva f(x) = $\sqrt{x}$ sehingga

$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx$

$= \pi \int_0^4 x\, dx$

$= \pi \left[\frac{1}{2} x^2\right]_0^4$

$= \pi \left[\frac{1}{2} . 4^2 - \frac{1}{2} . 0^2\right]$

$= \pi[8 - 0]$

$= 8\pi$

Jadi, volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}, sumbu - X\ , dan\ garis\ x = 4$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu- X adalah 8π satuan volum.

Untuk lebih memahami cara menghitung volume benda putar metode cakram, silahkan kerjakan dua soal Latihan pada bagian A.

1. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y=x^3$, x=3, dan y=0 diputar 360^0 mengelilingi sumbu-X

   Penyelesaian:

   Dengan memperhatikan sketsa gambar, maka dapat ditentukan:

   Batas kiri (a)= …, batas kanan (b) = …, kurva f(x) = … sehingga

   $V = \pi \int_{\dots}^{\dots} (\dots \dots .)^2 dx$

   $= \pi \int_{\dots}^{\dots} \dots \dots \dots\ dx$

   $= \pi[\dots \dots \dots]_{\dots}^{\dots}$

   $= \pi[\dots \dots \dots - \cdots \dots \dots]$

   $= \pi[\dots \quad - \quad]$

   $= \quad \pi$

   Jadi, volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y=x^3$, x=3, dan y=0 diputar 360^0 mengelilingi sumbu-X adalah ….. satuan volum.

2. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $x = \frac{2}{y}$, y=2, y = 6, dan x = 0 diputar 360^0 mengelilingi sumbu-Y

   Penyelesaian:

   Karena daerah bidang rata diputar mengelilingi sumbu-Y maka variable pengintegralannya menjadi y, sehingga semua batas dan fungsi dinyatakan dalam variable y. Integral dari kiri sampai kanan berubah jadi Integral dari bawah sampai atas. Dengan memperhatikan sketsa gambar, maka dapat ditentukan:

   Batas bawah (a)= …, batas atas (b) = …, kurva f(y) = $\frac{2}{y}$ sehingga

$\mathrm{V} = \pi \int_{\dots}^{\dots} \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy$

$= \pi \int_{\dots}^{\dots} \frac{4}{y^2}\, dy = \pi \int_{\dots}^{\dots} 4y^{-2}\, dy$

$= \pi[\dots\dots\dots]_{\dots}^{\dots} = \pi[\dots\dots\dots]_{\dots}^{\dots}$

$= \pi[\dots\dots\dots - \cdots\dots\dots]$

$= \pi[\dots \quad - \quad]$

$= \quad \pi$

Jadi, volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $x = \frac{2}{y}$, y=2, y = 6, dan x = 0 diputar 360^0 mengelilingi sumbu-Y adalah ….. satuan volum.

Quiz

Silahkan kerjakan permasalahan-permasalahan berikut dan upload jawaban pada LOM

1. Sketsa gambar bidang datar dan benda putar kemudian hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0, diantara\ x = -2\ dan\ x = 3$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu – X
2. Sketsa gambar bidang datar dan benda putar kemudian hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $x = y^{\frac{3}{2}}, y = 9, dan\ x = 0$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu – Y
3. Sketsa gambar bidang datar dan benda putar kemudian hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh setengah bagian ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ \ dan\ sumbu - X$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu – X.

   Tentukan volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh y =4 – x^2 , sumbu Y, dan sumbu X diputar 360^0 mengelilingi sumbu- X. Sketsa gambar dengan menggunakan cara manual dan geogebra

BAB 8
VOLUME BENDA PUTAR
METODE CINCIN

Kompetensi Dasar:

5. Membuat sketsa benda putar dari bidang datar
6. Memahami prinsip metode cincin
7. Menghitung volume benda putar menggunakan metode cincin

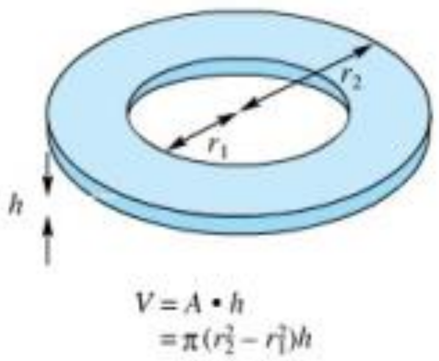
Indikator:

Setelah Pembelajaran diharapkan mahasiswa mampu:

4. Membuat sketsa benda putar metode cincin dengan benar
5. Memahami prinsip metode cincin
6. Menghitung volume benda putar metode cincin dengan benar

1. MEMBUAT SKETSA BENDA PUTAR DARI BIDANG DATAR YANG DIBATASI DUA KURVA

Ada kalanya pengirisan suatu benda-pejal putar menghasilkan cakram-cakram dengan lubang di tengahnya. Daerah yang demikian kita sebut sebagai **cincin**. Untuk menghitung volume daerah seperti ini, perhatikan gambar 1 berikut.



Gambar 1. Lempengan Berbentuk Cincin

Gambar 1 merupakan contoh bentuk lempengan hasil putar yang berbentuk cincin. Yang membedakan dengan metode cakram adalah pada metode cincin, terdapat 2 buat jari-jari. Jari-jari besar (r_2) dan jari-jari kecil (r_1). Sebelum menghitung volume nya, mari kita ingat Kembali bagaimana cara kita membuat sketsa bidang datar (bidang rata) yang terbatas oleh minimal 2 buah fungsi sehingga menghasilkan bentuk cincin . Sketsalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 \ dan \ y^2 = 8x$.

- Karena daerah yang akan kita sketsa hanya dibatasi oleh 2 buah kurva tanpa batas garis horizontal atau vertical lain, maka pertama-tama kita akan mencari titik potong kedua kurva. Untuk mencari titik potong, kita gunakan Teknik substitusi dan eliminasi. Perhatikan bahwa

$$y^2 = 8x \cong y = \sqrt{8x}$$

  Kemudian kedua kurva kita sumstitusikan menjadi:

$$y_1 = y_2 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{8x}$$
$$\Leftrightarrow x^4 = 8x$$
$$\Leftrightarrow x^4 - 8x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ atau \ x^3 = 8$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ atau \ x = 2$$

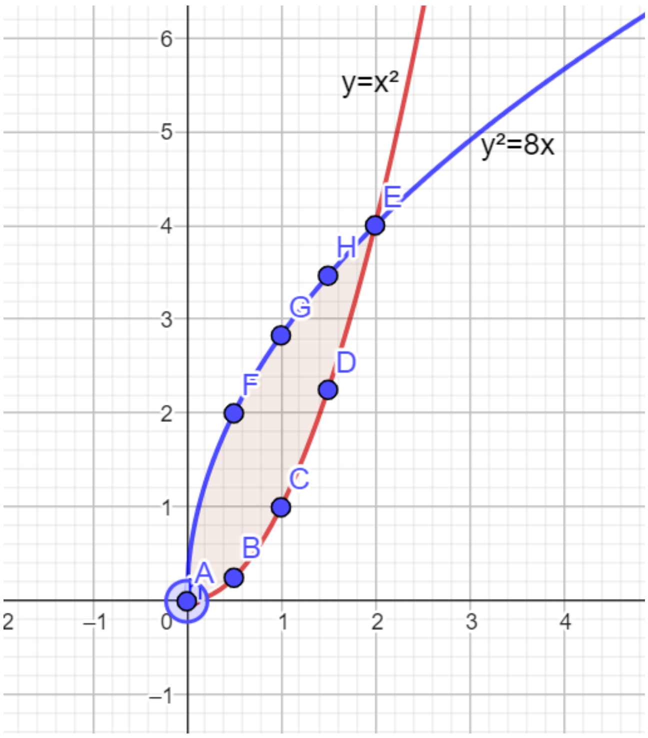
  Dengan demikian, kedua kurva berpotongan di absis x=0 dan x=2, sehingga kita akan menggambar kedua grafik untuk nilai $0 \leq x \leq 2$.

- Langkah berikutnya adalah buat beberapa titik yang terletak pada kurva $y = x^2 \ dan \ y = \sqrt{8x}$ untuk $0 \leq x \leq 2$.

x	0	½	1	3/2	2
y ($y = x^2$)	0	$\frac{1^2}{2} = \frac{1}{4}$	$1^2 = 1$	$\frac{3^2}{2} = \frac{9}{4}$	$2^2 = 4$
(x,y)	(0,0)	(1/2 ,1/4)	(1,1)	(3/2,9/4)	(2,4)

x	0	½	1	3/2	2
y ($y = \sqrt{8x}$)	$\sqrt{8.0}$= 0	$\sqrt{8.\frac{1}{2}} = 2$	$\sqrt{8.1} = 2\sqrt{2}$	$\sqrt{8.\frac{3}{2}} = 2\sqrt{3}$	$\sqrt{8.2}$=4
(x,y)	(0,0)	(1/2,2)	$(1, 2\sqrt{2})$	$(\frac{3}{2}, 2\sqrt{3})$	(2,4)

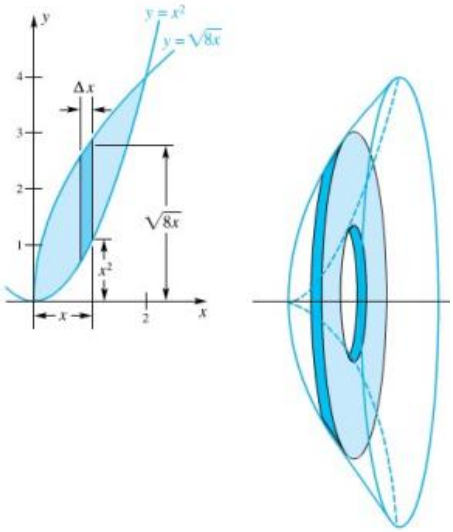
Dari table diperoleh ada 2 titik pada kurva yang berimpit. Kemudian buat kelima titik pada bidang kartesius kemudian hubungkan dan arsir daerah yang dibatasi seperti tampak pada gambar 2.



Gambar 2. Daerah yang dibatasi y=x^2 dan y^2=8x

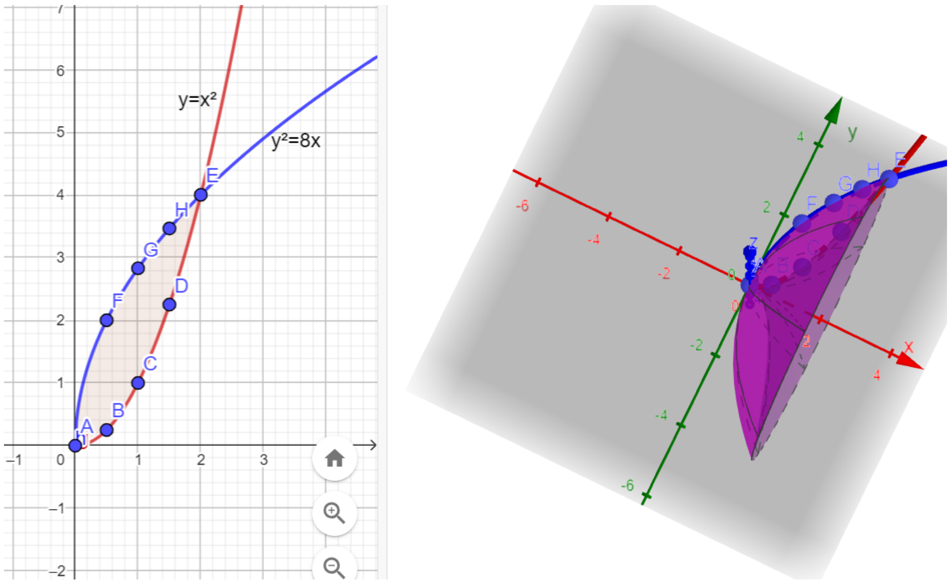
Maka daerah yang diarsir merupakan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 \; dan \; y^2 = 8x \; atau \; y = \sqrt{8x}$. Daerah ini kemudian akan diputar 360^0

mengelilingi sumbu X, sehingga akan membentuk sebuah benda pejalberbentuk cincin seperti tampak pada gambar 3 berikut:



Gambar 3 Benda Putar Cincin

Dengan menggunakan Geogebra, akan terlihat jelas perputaran yang terjadi dan benda pejal yang terbentuk seperti pada gambar 4.



Gambar 4 Sketsa Benda Putar dengan Geogebra

Dengan menggunakan cara yang serupa, cobalah saudara sketsa benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut:

3. kurva $y^2=4x$ dan garis $x-2y=0$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu-X

Penyelesaian:

- Karena daerah yang akan kita sketsa hanya dibatasi oleh 2 buah kurva tanpa batas garis horizontal atau vertikal lain, maka pertama-tama kita akan mencari titik potong kedua kurva. Untuk mencari titik potong, kita gunakan Teknik substitusi dan eliminasi. Perhatikan bahwa

$$y^2 = 4x \cong y = \sqrt{4x}\ dan\ x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$$

Kemudian kedua kurva kita sumstitusikan menjadi:

$$y_1 = y_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \sqrt{4x}$$
$$\Leftrightarrow \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$\Leftrightarrow \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$\Leftrightarrow \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$\Leftrightarrow \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$\Leftrightarrow \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

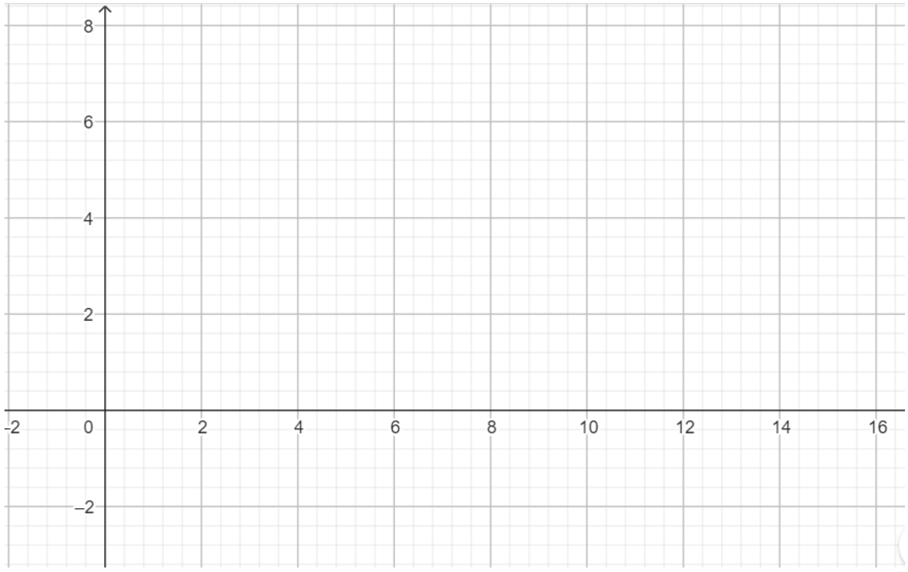
Dengan demikian, kedua kurva berpotongan di absis x= … dan x=…, sehingga kita akan menggambar kedua grafik untuk nilai ... $\leq x \leq \cdots$.

- Langkah berikutnya adalah buat beberapa titik yang terletak pada kurva $y^2 = 4x\ dan\ x - 2y = 0$ untuk ... $\leq x \leq \cdots$.

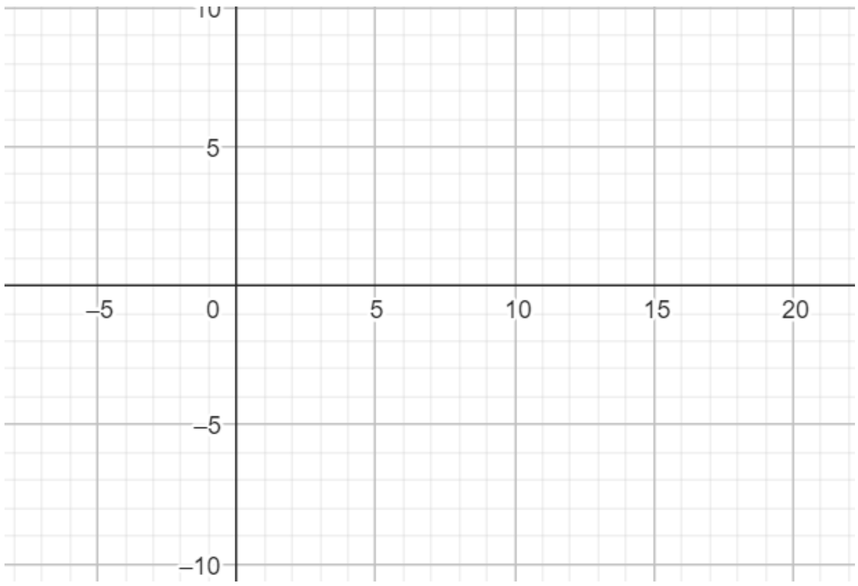
x	0	…	…	…	16
y ($y = \frac{1}{2}x$)					
(x,y)	(,)				

x	0	…	…	…	16
y ($y = \sqrt{4x}$)					
(x,y)	(,)				

Dari table diperoleh ada 2 titik pada kurva yang berimpit. Kemudian buat kelima titik pada bidang kartesius kemudian hubungkan dan arsir daerah yang dibatasi



- Putar daerah yang sudah diarsir 360^0 mengelilingi sumbu-X



- Silahkan pelajari geogebra untuk melihat perputaran daerah secara langsung

4. kurva $y = 4x \; dan \; y = 4x^2$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu-Y

   Penyelesaian:

- Karena daerah yang akan kita sketsa hanya dibatasi oleh 2 buah kurva tanpa batas garis horizontal atau vertical lain, maka pertama-tama kita akan mencari titik potong kedua kurva. Untuk mencari titik potong, kita gunakan Teknik substitusi dan eliminasi. Perhatikan bahwa

kedua kurva kita sumstitusikan menjadi:

$$y_1 = y_2 \Leftrightarrow \cdots \ldots \ldots = \cdots \ldots \ldots$$

$$\Leftrightarrow \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\Leftrightarrow \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\Leftrightarrow \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\Leftrightarrow \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\Leftrightarrow \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

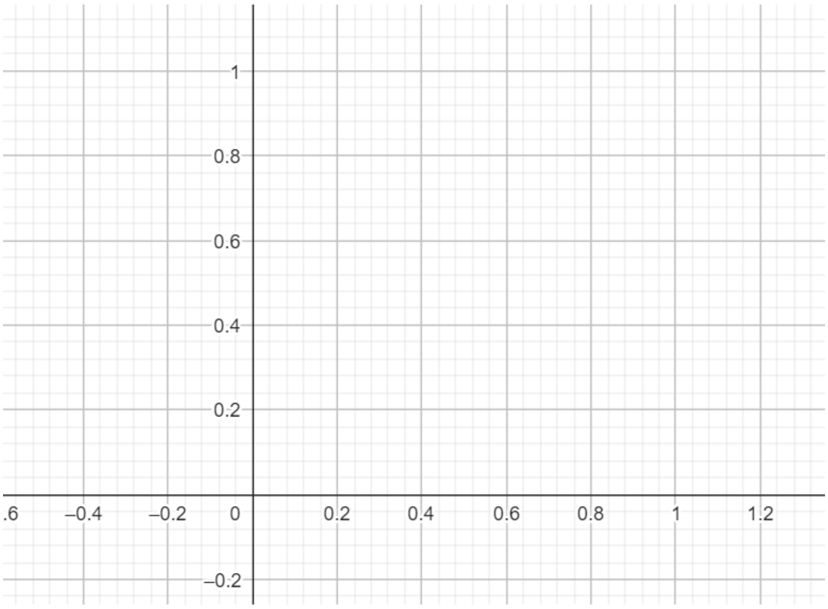
Dengan demikian, kedua kurva berpotongan di absis x= … dan x=…, sehingga kita akan menggambar kedua grafik untuk nilai ... $\leq x \leq \cdots$.

- Langkah berikutnya adalah buat beberapa titik yang terletak pada kurva $y^2 = 4x\ dan\ x - 2y = 0$ untuk ... $\leq x \leq \cdots$.

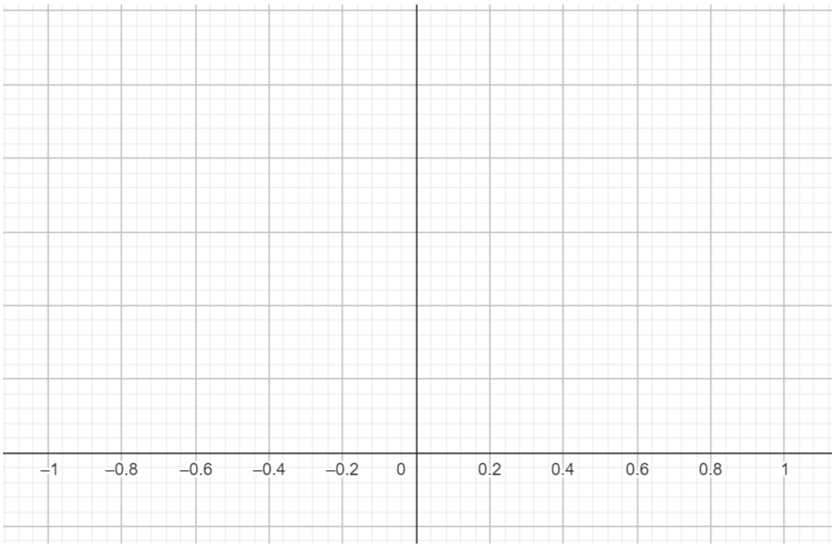
x	0	…	…	…	1
y ($y = 4x$)					
(x,y)	(,)				

x	0	…	…	…	1
y ($y = 4x^2$)					
(x,y)	(,)				

Dari table diperoleh ada 2 titik pada kurva yang berimpit. Kemudian buat kelima titik pada bidang kartesius kemudian hubungkan dan arsir daerah yang dibatasi

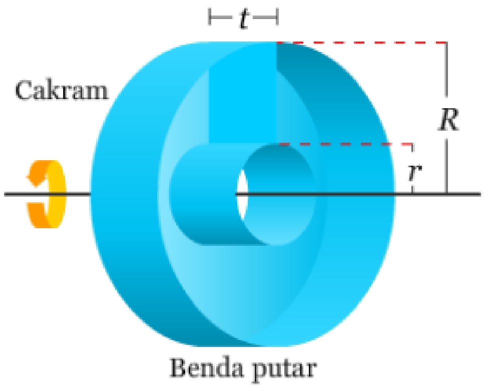


- Putar daerah yang sudah diarsir 360^0 mengelilingi sumbu-Y



- Silahkan pelajari geogebra untuk melihat perputaran daerah secara langsung

- **MENENTUKAN VOLUME SEBUAH CINCIN**



Perhatikan gambar di samping. Untuk menghitung Volume benda di samping, kita akan menghitung alas terlebih dahulu. Alas benda disamping berbentuk Lingkaran besar yang tengahnya Bolong dengan bolongan berbentuk lingkaran kecil. Sehingga $A = ABesar - Akecil = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$. Kemudian untuk menghitung volume nya, kita kalikan luas alas dengan ketebalan atau tinggi t, sehingga diperoleh

$$V = A.t = \pi(R^2 - r^2)t$$

- **VOLUME BENDA CINCIN SEBAGAI JUMLAH RIEMANN DARI VOLUME LEMPENGAN CINCIN**

Volume (V) benda dapat diaproksimasi dengan jumlah Riemann

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

Apabila norma partisi kita tujukan ke nol, kita peroleh suatu integral tentu; integral ini kita definisikan sebagai volume benda

$$\text{V} = \int_a^b A(x)dx$$

Karena luas lempengan (A(x)) biasanya berbentuk lingkaran dengan A=$\pi(R^2 - r^2)$ dimana jari-jari R ditentukan oleh letak titik x pada kurva f(x) dan jari-jari r ditentukan oleh letak titik x pada kurva g(x) sehingga $A(x) = \pi(f(x)^2 - g(x)^2)$, maka diperoleh

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)dx$$

- **MENGHITUNG VOLUME BENDA PUTAR DENGAN METODE CINCIN**

Untuk memahami cara menghitung volume benda putar menggunakan metode cakram, kita akan mengerjakan soal contoh pada bagian A. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu- X.

Penyelesaian:

Karena sketsa grafik benda putar sudah dibuat di bagian A, maka pada bagian ini kita akan melakukan perhitungannya saja. Ingat bahwa

$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)dx$

Dengan memperhatikan sketsa gambar, maka dapat ditentukan:

Batas kiri (a)=0, batas kanan (b) = 2, kurva f(x) merupakan kurva yang letaknya lebih atas (atau jaraknya nya lebih besar dihitung dari sumbu putar) sehingga f(x)= $\sqrt{8x}$ dan g(x) = x^2 sehingga

$V = \pi \int_0^2 ((\sqrt{8x})^2 - (x^2)^2)\ dx$

$= \pi \int_0^2 8x - x^4\ dx$

$= \pi \left[4x^2 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2$

$= \pi \left[(4.2^2 - \frac{1}{5}.2^5) - (4.0^2 - \frac{1}{5}.0^5)\right]$

$= \pi \left[16 - \frac{32}{5}\right]$

$= \frac{48}{5}\pi$

Jadi, volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu- X adalah $\frac{48}{5}\pi$ satuan volum.

Untuk lebih memahami cara menghitung volume benda putar metode cincin, silahkan kerjakan dua soal Latihan pada bagian A.

3. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y^2=4x$ dan garis $x-2y=0$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu-X

   Penyelesaian:

   Dengan memperhatikan sketsa gambar, maka dapat ditentukan:

   Batas kiri (a)= …, batas kanan (b) = …., kurva f(x) = … , kurva g(x) = …..

   sehingga

   $$V = \pi \int_{\dots}^{\dots} (\dots\dots.)^2 - (\dots\dots.)^2 dx$$
   $$= \pi \int_{\dots}^{\dots} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. dx$$
   $$= \pi[\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots]_{\dots}^{\dots}$$
   $$= \pi[\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots - \cdots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots]$$
   $$= \pi[\dots \qquad - \qquad]$$
   $$= \qquad \pi$$

   Jadi, volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y^2=4x$ dan garis $x-2y=0$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu-X adalah ….. satuan volum.

4. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4x \; dan \; y = 4x^2$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu-Y

   Penyelesaian:

   Karena daerah bidang rata diputar mengelilingi sumbu-Y maka variable pengintegralannya menjadi y, sehingga semua batas dan fungsi dinyatakan dalam variable y. Integral dari kiri sampai kanan berubah jadi Integral dari bawah sampai atas. Kurva f(y) adalah kurva yang terletak paling kanan untuk daerah yang diarsir, dan kurva g(y) adalah kurva yang terletak lebih kiri dari daerah yang diarsir. Dengan memperhatikan sketsa gambar, maka dapat ditentukan:

Batas bawah (a)= …, batas atas (b) = …, kurva f(y) = , kurva g(y) = ……

sehingga

$$V = \pi \int_{\dots}^{\dots} (\dots\dots)^2 - (\dots\dots)^2 dy$$

$$= \pi \int_{\dots}^{\dots} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . dy$$

$$= \pi[\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots]_{\dots}^{\dots}$$

$$= \pi[\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots - \cdots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots]$$

$$= \pi[\dots \quad - \quad]$$

$$= \quad \pi$$

Jadi, volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva y=4x dan y=4x^2 diputar 360^0 mengelilingi sumbu-Y adalah ….. ………satuan volum.

- **Quiz**

  Silahkan kerjakan permasalahan-permasalahan berikut dan upload jawaban pada LOM

4. Sketsa gambar bidang datar dan benda putar kemudian hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 6x^2, dan\ garis\ y = 6x$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu – X

   Sketsa gambar bidang datar dan benda putar kemudian hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh parabola $3x^2 - 16y + 48 = 0, sumbu - Y, dan\ x^2 - 16y + 80 = 0$ diputar 360^0 mengelilingi garis y = 2.

BAB 9
VOLUME BENDA PUTAR
METODE KULIT TABUNG

Kompetensi Dasar:

1. Membuat sketsa benda putar dari bidang datar
2. Memahami prinsip metode kulit tabung
3. Menganalisis volume benda putar menggunakan metode kulit tabung
4. Menghitung volume benda putar menggunakan metode kulit tabung

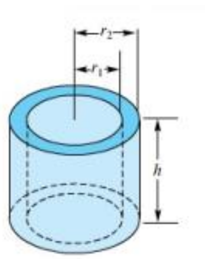
Indikator:

Setelah Pembelajaran diharapkan mahasiswa mampu:

1. Membuat sketsa benda putar kulit tabung dengan benar
2. Memahami prinsip metode kulit tabung
3. Menganalisis volume benda putar metode kulit tabung
4. Menghitung volume benda putar metode kulit tabung dengan benar

- **MEMBUAT SKETSA BENDA PUTAR DARI BIDANG DATAR**

  Selain Metode Cakram dan Metode Cincin, metode lain yang dapat digunakan untuk menghitung volume benda pejal-putar adalah metode kulit tabung atau metode kulit silinder. Untuk banyak persoalan, metode kulit tabung lebih mudah diterapkandibanding metode cakram dan metode cincin. Sebuah kulit tabung adalah sebuah benda pejal yang dibatasi oleh dua tabung tegak yang sepusat. Perhatikan gambar 1.



Gambar 1. Kulit Tabung

Jika jari-jari tabung dalam adalah r_1 dan jari-jari tabung luar adalah r_2 sedangkan tinggi tabung adalah h, maka volume kulit tabung adalah

$$V = luas\ alas \text{ x } tinggi = (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)h$$

$$= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h$$

$$= 2\pi\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)h(r_2 - r_1)$$

Dengan demikian diperoleh

$$V = 2\pi.(rata - rata\ jari - jari).(tinggi).(ketebalan)$$

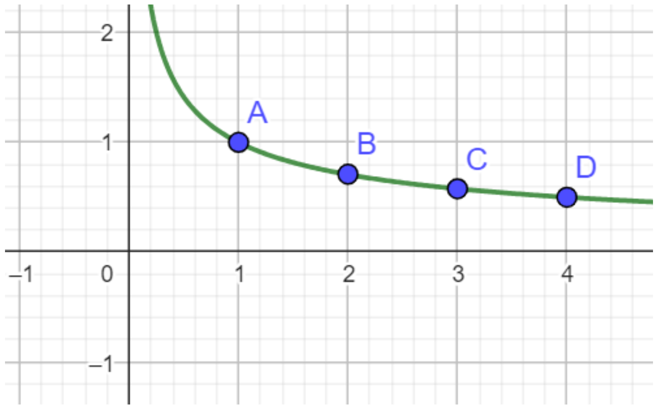
$$V = 2\pi rh\Delta r$$

Yang membedakan Metode Kulit Tabung dengan metode cakram dan metode cincin adalah dalam hal pengirisan polygon. Pada metode cakram dan cincin, polygon diiris tegak lurus sumbu putar, sementara pada metode kulit tabung, polygon diiris sejajar sumbu putar. Sebelum membahas lebih lanjut, mari kita buat sketsa bidang datar (bidang rata) yang terbatas dan akan diputar dengan metode kulit tabung. Sketsalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}, sumbu - X\ ,\ garis\ x = 1\ dan\ garis\ x = 4.$

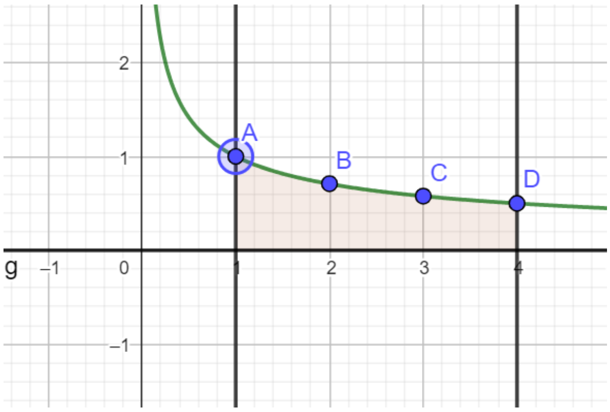
- Pertama-tama kita buat beberapa titik yang terletak pada kurva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Untuk pengambilan absis sebetulnya bebas, namun karena daerah dibatasi oleh x=1 dan x=4, maka kita gunakan titik x=1,2,3,4

x	1	2	3	4
y ($y = \frac{1}{\sqrt{x}}$)	$\frac{1}{\sqrt{1}}$ =1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ = 0.71	$\frac{1}{\sqrt{3}}$=0.58	$\frac{1}{\sqrt{4}}$=0.5
(x,y)	(1,1)	(2,0.71)	(3,0.58)	(4,0.5)

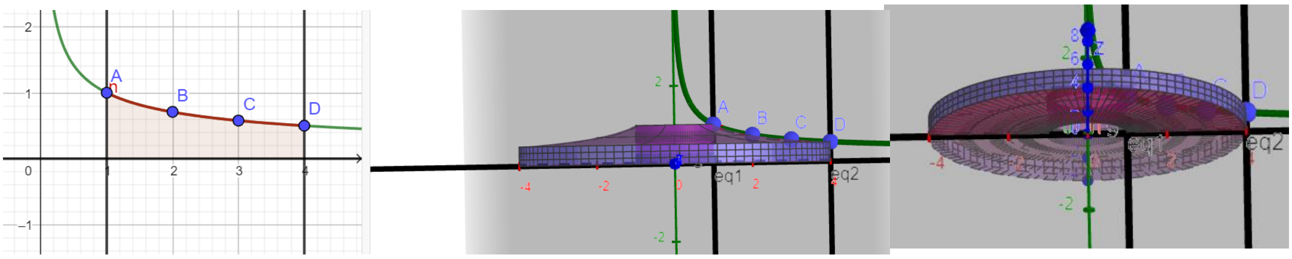
Buat keempat titik pada bidang kartesius kemudian hubungkan

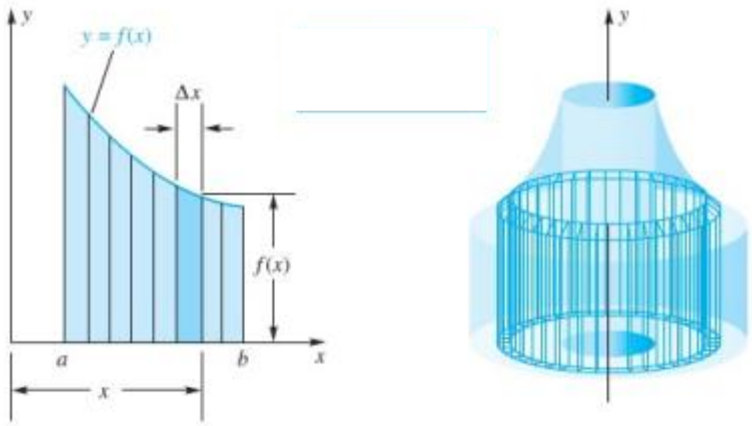


- Kemudian gambar sumbu-X , garis x=1 dan garis x=4, lalu arsir daerah terbatas nya



Maka daerah yang diarsir merupakan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}, sumbu - X\ , garis\ x = 1\ dan\ garis\ x = 4.$ Daerah ini kemudian akan diputar 360^0 mengelilingi sumbu Y, sehingga akan membentuk sebuah benda pejal seperti tampak pada gambar berikut:





Dengan menggunakan Geogebra, akan terlihat jelas perputaran yang terjadi dan benda pejal yang terbentuk seperti pada gambar berikut:

Dengan menggunakan cara yang serupa, cobalah saudara sketsa benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut:

5. Daerah kuadran pertama di atas parabola $y=x^2$, dibawah parabola $y=2-x^2$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu-Y

   Penyelesaian:

- Karena daerah yang akan kita sketsa hanya dibatasi oleh 2 buah kurva tanpa batas garis horizontal atau vertical lain, maka pertama-tama kita akan mencari titik potong kedua kurva. Untuk mencari titik potong, kita gunakan Teknik substitusi dan eliminasi. Kita sumstitusikan menjadi:

$$y_1 = y_2 \Leftrightarrow x^2 = 2 - x^2$$

$\Leftrightarrow$ ____________

$\Leftrightarrow$ ____________

$\Leftrightarrow$ ____________

$\Leftrightarrow$ ____________

Dengan demikian, kedua kurva berpotongan di absis x= ….. dan x=……, karena daerah yang diminta adalah daerah di kuadran 1, maka kita akan menggambar kedua grafik untuk nilai $0 \leq x \leq$ ____.

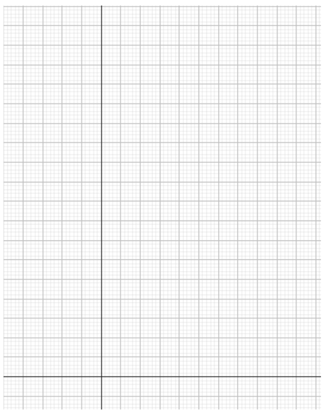
Langkah berikutnya adalah buat beberapa titik yang terletak pada kurva $y = x^2\ dan\ y = 2 - x^2$ untuk $0 \leq x \leq$ ___.

x	0	¼	½	¾	…
y ($y = x^2$)					
(x,y)					

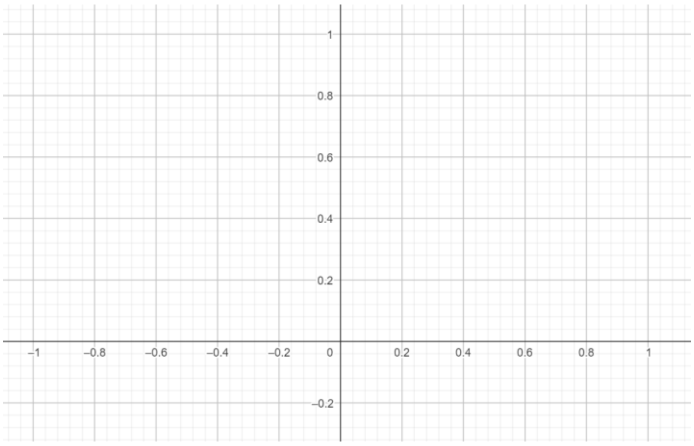
x	0	¼	½	¾	…
y($y = 2 - x^2$)					
(x,y)					

Dari table diperoleh ada satu titik pada kurva yang berimpit. Kemudian buat kelima titik pada bidang kartesius kemudian hubungkan dan arsir daerah yang dibatasi seperti tampak pada gambar berikut.

- Buat kelima titik pada bidang kartesius kemudian hubungkan, gambar garis x=3 dan garis y = 0. Arsir daerah tertutup



- Putar daerah yang sudah diarsir 360^0 mengelilingi sumbu-Y



- Silahkan pelajari geogebra untuk melihat perputaran daerah secara langsung

6. kurva $y = 3 + 2x - x^2$, y=0 dan x = 0 diputar 360^0 mengelilingi sumbu-Y

Penyelesaian:

- buat beberapa titik yang terletak pada kurva $y = 3 + 2x - x^2$. Untuk pengambilan ordinat sebetulnya bebas, namun karena daerah dibatasi oleh y=0 dan x=0, maka kita perlu mencari titik potong kurva dengan sumbu-X (y=0) dan sumbu-Y (x=0)

  Cari perpotongan kurva dengan sumbu X dan sumbu Y

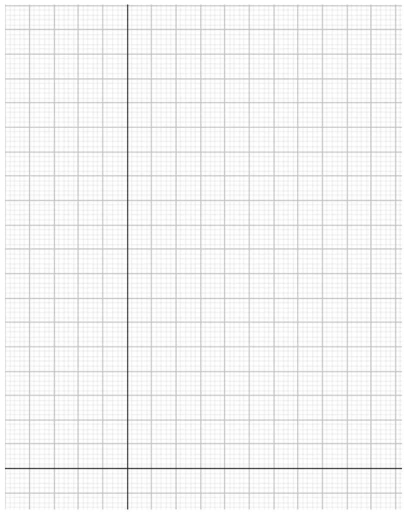
  Perpotongan dengan sumbu X

  Perpotongan dengan sumbu Y

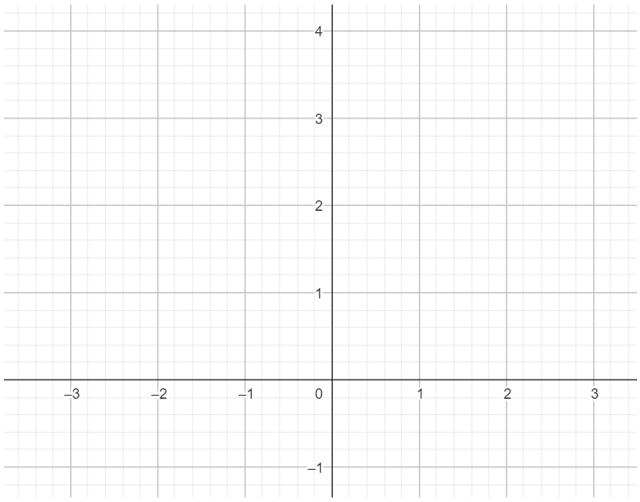
  Tentukan 5 buag absis yang akan diambil

x	…	…	…	…	…
y (x= $\frac{2}{y}$)	…	…	…	…	…
(x,y)	(,)	…	…	…	…

- Buat kelima titik pada bidang kartesius kemudian hubungkan, gambar garis y=0, garis x = 0. Arsir daerah tertutup



- Putar daerah yang sudah diarsir 360^0 mengelilingi sumbu-Y



- Silahkan pelajari geogebra untuk melihat perputaran daerah secara langsung

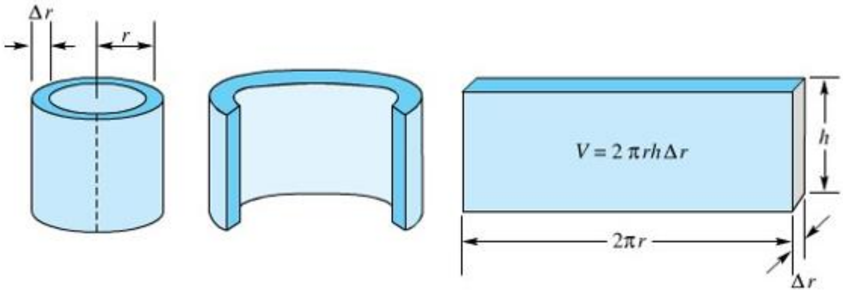
- **MENENTUKAN VOLUME SEBUAH KULIT TABUNG (SILINDER)**

  Pada bagian A sudah sedikit dibahas mengenai volume kulit tabung atau kulit silinder, yaitu

$$V = 2\pi.(rata - rata\ jari - jari).(tinggi).(ketebalan)$$

$$V = 2\pi rh\Delta r$$

Untuk memudahkan kita mengingat rumusan volume ini, Perhatikan bahwa ketika kulit tabung itu kita potong sepanjang garis yang sejajar sumbu simetri dan kemudian membukanya, maka akan diperoleh selembar persegi-panjang yang memiliki ketebalan. Volume benda yang berbentuk lempeng ini dapat kita hitung. Perhatikan gambar berikut:

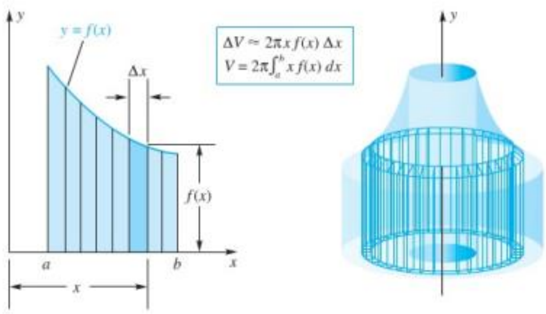


Berdasarkan gambar, dapat dikatakan bahwa lembaran ini berbentuk kotak tipis dengan Panjang $2\pi r$, tinggi h dan tebal Δr sehingga diperoleh

$$V = 2\pi r h \Delta r$$

- **VOLUME BENDA PUTAR SEBAGAI JUMLAH RIEMANN DARI VOLUME KULIT TABUNG**

Volume (V) benda dapat diaproksimasi dengan jumlah Riemann. Perhatikan gambar:



Dari gambar terlihat bahwa prinsip utama metode kulit tabung adalah partisi polygon sejajar dengan sumbu putar. Jika benda diputar mengelilingi sumbu-Y maka partisi sejajar sumbu-Y dan fungsi dinyatakan dalam variable x. Jika benda diputar mengelilingi sumbu-X maka partisi sejajar sumbu-X dan fungsi dinyatakan dalam variable y. Sehingga untuk kasus pada gambar diperoleh:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi x f(x) \Delta x$$

Apabila norma partisi kita tujukan ke nol, kita peroleh suatu integral tentu; integral ini kita definisikan sebagai volume benda

$$\mathrm{V} = 2\pi \int_a^b x.f(x)dx$$

- **MENGHITUNG VOLUME BENDA PUTAR DENGAN METODE KULIT TABUNG**

Untuk memahami cara menghitung volume benda putar menggunakan metode kulit tabung, kita akan mengerjakan soal contoh pada bagian A. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}, sumbu - X,\ garis\ x = 1\ dan\ garis\ x = 4$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu- Y.

Penyelesaian:

Karena sketsa grafik benda putar sudah dibuat di bagian A, maka pada bagian ini kita akan melakukan perhitungannya saja. Ingat bahwa

$$\mathrm{V} = 2\pi \int_a^b x.f(x)dx$$

Dengan memperhatikan sketsa gambar, maka dapat ditentukan:

Batas kiri (a)=1, batas kanan (b) = 4, kurva f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sehingga

$$\mathrm{V} = 2\pi \int_1^4 x.\frac{1}{\sqrt{x}}.dx$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}.dx$$

$$= 2\pi \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}.dx = 2\pi \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(x\sqrt{x}\right)_1^4 = \frac{4}{3}\pi\left(4\sqrt{4} - 1\sqrt{1}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi(8-1) = \frac{28}{3}\pi$$

Jadi, volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}, sumbu - X$, $garis\ x = 1\ dan\ garis\ x = 4$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu- Y adalah $\frac{28}{3}\pi$ satuan volum.

Untuk lebih memahami cara menghitung volume benda putar metode cakram, silahkan kerjakan dua soal Latihan pada bagian A.

1. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah kuadran pertama di atas parabola $y=x^2$, dibawah parabola $y=2-x^2$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu-Y

   Penyelesaian:

   …………………………………………………………………………………

   Jadi, volume benda putar yang terbentuk jika daerah kuadran pertama di atas parabola $y=x^2$, dibawah parabola $y=2-x^2$ diputar 360^0 mengelilingi sumbu-Y adalah ………. satuan volum.

2. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 3 + 2x - x^2$, y=0 dan x = 0 diputar 360^0 mengelilingi sumbu-Y

   Penyelesaian:

   …………………………………………………………………………………

BAB 10
VOLUME BENDA PUTAR
APLIKASI INTEGRAL UNTUK MENGHITUNG VOLUME BENDA ETNIS DI SUKU DAYAK LOSARANG

Kompetensi Dasar:

1. Menunjukkan penerapan integral dalam konteks budaya untuk menghitung volume benda putar.
2. Meningkatkan pemahaman tentang pentingnya etnomatematika dalam pendidikan matematika.
3. Mempromosikan apresiasi terhadap warisan budaya Suku Dayak Hindu Budha Bumi Segandu Indramayu.

Indikator :

Setelah pembelajaran mahasiswa diharapkan mampu :

1. Mengenal benda-benda dari Suku Dayak Hindu Budha Bumi Segandu Indramayu.
2. Menerapkan konsep integral dalam konteks budaya untuk menghitung volume benda-benda etnis dari Suku Dayak Hindu Budha Bumi Segandu Indramayu.

- **APLIKASI INTEGRAL UNTUK MENGHITUNG VOLUME BENDA ETNIS**

  Selain dapat menghitung luas daerah dari benda etnis Dayak Losarang, Konsep integral juga dapat digunakan untuk menghitung volume benda-benda etnis. Benda etnis tentu sangat banyak jika dieksplor lebih jauh, namun suku Dayak Losarang sendiri hanya mengijinkan orang luar untuk melihat benda-benda etnis pada hari Kamis sore Malam Jumat Kliwon. Oleh karena itu, karena keterbatasan waktu, maka benda etnis yang akan dieksplor adalah **topi ketu, tudung nasi, bung, gayung, dan cempala.** Untuk mengenal benda-benda etno tersebut, mari pelajari dengan seksama penjelasan berikut.

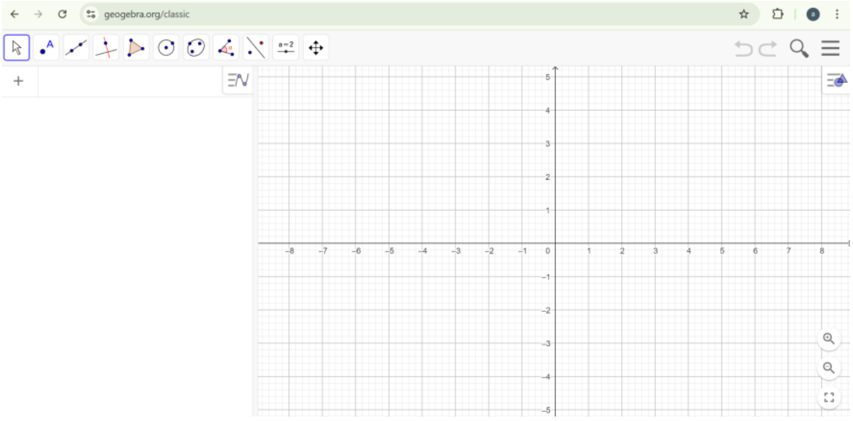
1. Topi Ketu

Topi Ketu dikategorikan sebagai aksesoris dari Ketua Adat Suku Dayak Losarang. Aksesoris ini terbuat dari kukusan anyaman bambu yang dicat dengan warna hitam dan putih. Topi ini digunakan pada saat acara adat atau bepergian. Topi ini melambangkan keseimbangan antara yang benar dan salah. Bentuk nyata dari topi ketu disajikan pada Gambar 1.

Gambar 1. Topi Ketu

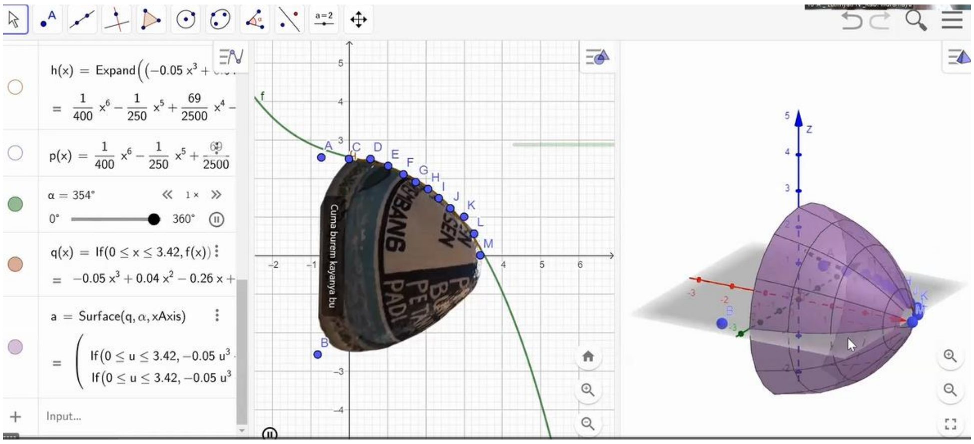
Jika dilihat dengan seksama, topi ketu pada gambar 1 membentuk sebuah benda 3 dimensi (kita anggap dalamnya padat terisi). Untuk itu kita dapat mencari volume benda putar yang terbentuk dengan terlebih dahulu menemukan persamaan kurva yang bersesuaian. Untuk tujuan tersebut, kita akan menggunakan aplikasi Geogebra. Idealnya, gambar yang diambil diletakkan sedemikian hingga membentuk ukuran yang berkesebangunan dengan ukuran sebenarnya. Namun karena berbagai keterbatasan, kita akan menganggap ukuran sebenarnya sesuai dengan benda yang kita letakkan.

Pertama-tama, saudara dapat membuka aplikasi geogebra classic pada browser, tidak usah menginstal, sehingga akan Nampak tampilan awal seperti pada gambar 2.



Gambar 2. Tampilan awal Geogebra Classic

Untuk langkaah selanjutnya, saudara dapat mengamati video pembelajaran pada aplikasi VR sehingga menghasilkan bentuk 3 dimensi seperti ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Penggunaan Geogebra untuk Mencari Persamaan Polinom Topi Ketu

Berdasarkan video pembelajaran, diperoleh persamaan f(x) berbentuk polinom pangkat 3. Karena V = $\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$, maka yang kita butuhkan adalah kuadrat dari f(x). Dengan perhitungan menggunakan Geogebra, diperoleh $\left(f(x)\right)^2 = \frac{1}{400}x^6 - \frac{1}{250}x^5 + \frac{69}{2500}x^4 - \frac{1379}{5000}x^3 + \frac{679}{2500}x^2 - \frac{663}{500}x + \frac{2601}{400}$ dengan batas kiri x=0 dan batas kanan x=3.42. Langkah selanjutnya adalah menghitung volume dengan menggunakan metode cakram.

V = $\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

$$= \pi \int_0^{3.42} \left(\frac{1}{400} x^6 - \frac{1}{250} x^5 + \frac{69}{2500} x^4 - \frac{1379}{5000} x^3 + \frac{679}{2500} x^2 - \frac{663}{500} x + \frac{2601}{400} \right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2800} x^7 - \frac{1}{1500} x^6 + \frac{69}{12500} x^5 - \frac{1379}{20000} x^4 + \frac{679}{7500} x^3 - \frac{663}{1000} x^2 + \frac{2601}{400} x \right)_0^{3.42}$$

$$= \pi \left(\left(\frac{1}{2800} 3.42^7 - \frac{1}{1500} 3.42^6 + \frac{69}{12500} 3.42^5 - \frac{1379}{20000} 3.42^4 + \frac{679}{7500} 3.42^3 - \frac{663}{1000} 3.42^2 + \frac{2601}{400} 3.42 \right) - 0 \right)$$

$$= \pi(12.142932977) = 38.15$$

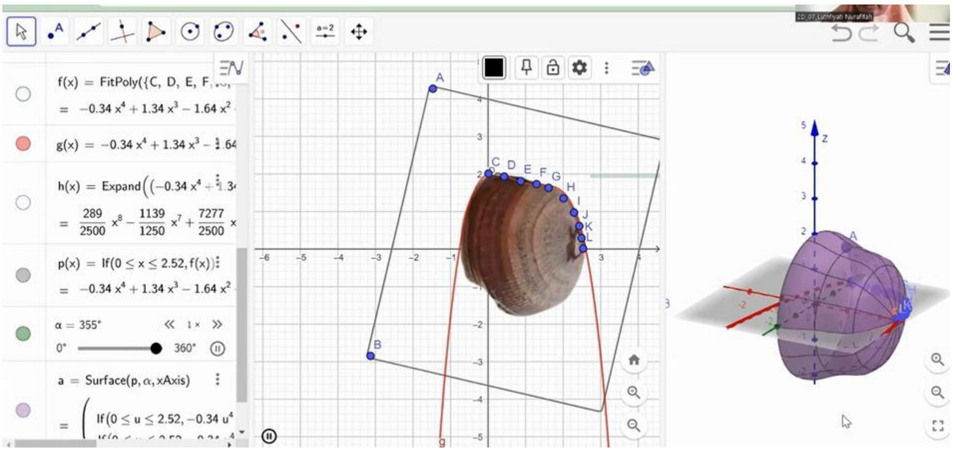
Jadi, volume topi ketu yang terbentuk jika memiliki tinggi 3.42 satuan dan jari-jari 2.5 satuan adalah 38.15 satuan volum

2. Tudung Nasi

Tudung nasi merupakan benda ritual yang digunakan oleh Suku Dayak. Berbeda dengan tudung nasi masyarakat kebanyakn yang digunakan untuk menutupi nasi dan lauk pauk dari serangga, tudung nasi di Suku Dayak digunakan untuk menutupi bagian air pada punden tungku 3 gunung Krakatau pusar alam agar air tidak kotor. Tudung Nasi ini terbuat dari rotan. Memiliki bentuk yang standar seperti tudung nasi pada umumnya. Tudung nasi disajikan pada Gambar 4.

Gambar 4. Tudung Nasi

Sebetulnya memang tudung nasi ini bukan benda pejal. Namun untuk pembelajaran, kita akan menganggap tudung nasi ini benda pejal yang akan dihitung volume nya menggunakan integral. Seperti topi ketu, kita akan menggunakan aplikasi geogebra untuk mencari fungsi polinom yang bersesuaian dengan tudung nasi. Dengan Langkah-langkah yang diuraikan dalam video pembelajaran, akan diperoleh gambaran 3 dimensi dari polinom yang diputar terhadap sumbu-X yang disajikan pada gambar 5.



Gambar 5. Penggunaan Geogebra untuk Mencari Persamaan Polinom Tudung Nasi

Berdasarkan video pembelajaran, diperoleh persamaan f(x) berbentuk polinom pangkat 4. Karena V = $\pi\int_a^b (f(x))^2 dx$, maka yang kita butuhkan adalah kuadrat dari f(x). Dengan perhitungan menggunakan Geogebra, diperoleh $\left(f(x)\right)^2 = \frac{289}{2500}x^8 - \frac{1139}{1250}x^7 + \frac{7277}{2500}x^6 - \frac{11651}{2500}x^5 + \frac{2977}{1250}x^4 + \frac{2027}{500}x^3 - \frac{63751}{10000}x^2 + \frac{7761}{5000}x + \frac{39601}{10000}$ dengan batas kiri x=0 dan batas kanan x=2.52. Langkah selanjutnya adalah menghitung volume dengan menggunakan metode cakram.

V = $\pi\int_a^b (f(x))^2 dx$

$$= \pi\int_0^{2.52}\left(\frac{289}{2500}x^8 - \frac{1139}{1250}x^7 + \frac{7277}{2500}x^6 - \frac{11651}{2500}x^5 + \frac{2977}{1250}x^4 + \frac{2027}{500}x^3 - \frac{63751}{10000}x^2 + \frac{7761}{5000}x + \frac{39601}{10000}\right)dx$$

$$= \pi\left(\frac{289}{22500}x^9 - \frac{1139}{10000}x^8 + \frac{7277}{17500}x^7 - \frac{11651}{15000}x^6 + \frac{2977}{6250}x^5 + \frac{2027}{2000}x^4 - \frac{63751}{30000}x^3 + \frac{7761}{10000}x^2 + \frac{39601}{10000}x\right)_0^{2.52}$$

$$= \pi\left(\left(\frac{289}{22500}2.52^9 - \frac{1139}{10000}2.52^8 + \frac{7277}{17500}2.52^7 - \frac{11651}{15000}2.52^6 + \frac{2977}{6250}2.52^5 + \frac{2027}{2000}2.52^4 - \frac{63751}{30000}2.52^3 + \frac{7761}{10000}2.52^2 + \frac{39601}{10000}2.52\right) - 0\right)$$

$$= \pi(7.0244206501) = 22.0678$$

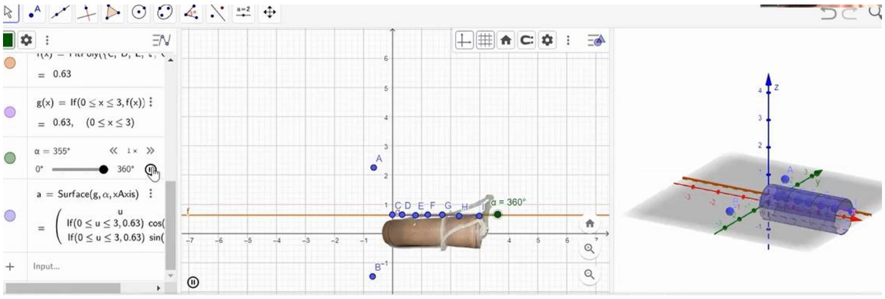
Jadi volume tudung nasi jika memiliki diameter 4 satuan dan tinggi 2.52 satuan adalah 22.068 satuan volum.

3. Bung

Bung berfungsi sebagai alat penyimpanan pusaka. Bung ini terbuat dari bambu kuning, alasan menggunakan bambu kuning ini yaitu kepercayaan suku Dayak terhadap alam dan bambu kuning menjadi salah satu bahan yang banyak digunakan untuk pembuatan aksesoris atau pusaka suku dayak. Karena terbuat dari bambu, maka bung memiliki bentuk seperti tabung tegak. Foto Bung disajikan pada gambar 6.

Gambar 6. Bung

Untuk Bung, karena bentuknya menyerupai tabung, maka dengan mudah kita dapat menghitung volume nya. Namun disini kita tidak tau pasti ukuran sebenarnya. Dan untuk lebih memahami materi volume benda putar metode cakram alangkah baiknya kita gunakan cara yang serupa dengan benda etno lain untuk menghitung volume nya. Perhatikan gambar 7.



Gambar 7. Penggunaan Geogebra untuk mencari persamaan polinom Bung

Berdasarkan video pembelajaran, diperoleh persamaan f(x) berbentuk garis horizontal yaitu f(x)=0.63. Karena V = $\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$, maka yang kita butuhkan adalah kuadrat dari f(x). Dengan perhitungan menggunakan Geogebra, diperoleh $(f(x))^2 = 0.3969$ dengan batas kiri x=0 dan batas kanan x=3. Langkah selanjutnya adalah menghitung volume dengan menggunakan metode cakram.

f(x)=0.63, a=0, b=3

V = $\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

$= \pi \int_0^3 (0.63)^2 dx = \pi \int_0^3 0.3969\, dx$

$= \pi (0.3969x)_0^3$

$= \pi\big(((0.3969)(3)) - 0\big)$

$= \pi(1.1907) = 3.7406943727 \approx 3.74$

Sehingga volume Bung dengan jari-jari 0.63 satuan dan tinggi 3 satuan adalah 3.74 Satuan Volum.

- **QUIZ**

Selain Ketiga benda etno yang sudah kita hitung volume nya, ada 2 benda etno lain yang harus dihitung volume nya.

1. Gayung : Gayung ini terbuat dari bahan batok kelapa, dengan gagang nya terbuat dari batang kelapa muda. Alasan menggunakan batok dan batang kelapa supaya gayung tersebut tahan lebih lama serta memiliki fungsi guna mengambil air saat acara ritual selesai dilaksanakan.

2. Cempala : cempala umumnya digunakan oleh dalang pada pertunjukan wayang, biasanya sebagai tanda untuk menghentikan pertunjukan wayang. Cempala di suku Dayak sendiri digunakan sebagai aksesoris saja, cempala sendiri terbuat dari bahan kayu jati sungu yang dan pemilihan kayu tersebut tidak asal pilih saja harus dengan kualitas yang bagus dan memiliki filosofi tersendiri bagi suku Dayak Losarang

Dengan cara yang serupa silahkan saudara coba menghitung volume gayung dan cempala.

BAB 11
TEKNIK PENGINTEGRALAN: INTEGRAL SUBSTITUSI

Kompetensi Dasar:

1. Memahami prinsip Teknik pengintegralan dengan metode substitusi
2. Menganalisis permasalahan yang dapat menggunakan Teknik substitusi
3. Menyelesaikan permasalahan integral dengan menggunakan Teknik Substitusi

Indikator:

Setelah Pembelajaran diharapkan mahasiswa mampu:

1. Memahami prinsip Teknik pengintegralan dengan metode substitusi
2. Menganalisis permasalahan yang dapat menggunakan Teknik substitusi
3. Menyelesaikan permasalahan integral dengan menggunakan Teknik Substitusi

- **TEKNIK SUBSTITUSI**

  Seiring dengan perkembangan bentuk fungsi, tidak semua bentuk fungsi dapat diintegralkan langsung menggunakan aturan-aturan integral tak tentu ataupun integral tentu. Ada banyak bentuk fungsi yang harus menggunakan Teknik tertentu untuk dapat diperoleh hasil integralnya atau anti turunannya. Salah satu Teknik tersebut adalah Teknik substitusi. Prinsip Teknik substitusi adalah dengan menggantikan suatu bentuk aljabar dengan variable lain sehingga dapat diintegralkan. Untuk dapat menggunakan Teknik ini, harus dipastikan bahwa dalam suatu fungsi yang akan diintegralkan terdapat perkalian antara bentuk fungsi dan turunan fungsinya (terdapat perkalian antara f(x) dan f'(x)). Sebelum membahas lebih lanjut, agar Teknik substitusi dapat dikerjakan dengan hasil yang benar, kita harus lebih hafal bentuk-bentuk hasil integral sebanyak mungkin. Beberapa daftar bentuk baku integral beserta hasilnya disajikan pada gambar 1.

Bentuk integral standar

Konstanta, pangkat	1. $\int k\,du = ku + C$	2. $\int u^r\,du = \begin{cases} \frac{u^{r+1}}{r+1} + C & r \neq -1 \\ \ln\lvert u\rvert + C & r = -1 \end{cases}$
Eksponensial	3. $\int e^u\,du = e^u + C$	4. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$
Fungsi trigonometri	5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$	6. $\int \cos u\,du = \sin u + C$
	7. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$	8. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
	9. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$	10. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
	11. $\int \tan u\,du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	12. $\int \cot u\,du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
Fungsi aljabar	13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$	14. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
	15. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{\lvert u\rvert}{a}\right) + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left(\frac{a}{\lvert u\rvert}\right) + C$	
Fungsi Hiperbolik	16. $\int \sinh u\,du = \cosh u + C$	17. $\int \cosh u\,du = \sinh u + C$

Gambar 1. Bentuk Baku Integral

Ada dua bagian yang akan dibahas untuk mendalami Teknik substitusi, pertama adalah Teknik substitusi untuk integral tak tentu, dan kedua adalah Teknik substitusi integral tentu.

- **ATURAN SUBSTITUSI UNTUK INTEGRAL TAK TENTU**

TEOREMA A.

Misalkan g fungsi terdiferensiasikan dan misalkan bahwa F adalah anti-turunan f. Maka

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + C$$

Untuk memahami penggunaan teorema A, perhatikan contoh soal berikut:

1. Tentukan hasil dari $\int x\sqrt{x^2 + 9}\,dx$

   Penyelesaian: perhatikan bahwa bentuk fungsi pada soal tidak dapat diintegralkan secara langsung. Karena itu tidak bisa menggunakan aturan-aturan baku untuk integral tak tentu yang telah kita pelajari. Untuk itu kita akan menggunakan Teknik sunstitusi. Perhatikan bahwa dalam fungsi integran, terdapat perkalian antara fungsi polinon djerajat 2 yaitu $x^2 + 9$ dengan fungsi polinom berderajat 1 yaitu x dimana polinom berderajat 1 ini merupakan kelipatan dari turun polinom berderajat 2. Karena itu kita akan memisalkan fungsi polinom berderajat 2 dengan suatu variable lain yang berbeda dengan varial pengintegralan.

Misalkan

$$u = x^2 + 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Leftrightarrow du = 2x\ dx$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

Pemisalan awal dan bentuk terakhir akan kita substitusikan pada bentuk permasalahan awal.

$\int x\sqrt{x^2 + 9}\ dx \Leftrightarrow \int x\sqrt{u}\,\frac{du}{2x}$

$\Leftrightarrow \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\ du$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\ du$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3/2}u^{\frac{3}{2}}\right) + C$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$

Setelah memperoleh hasil integral dalam variabel u, kita akan substitusi kembali pemisalan u di awal sehingga diperoleh

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(x^2 + 9)^{\frac{3}{2}} + C$ dengan demikian, diperoleh hasil pengintegralan dengan Teknik substitusi

$$\int x\sqrt{x^2+9}\,dx = \frac{1}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}} + C$$

2. Tentukan $\int \sin 3x\, dx$

   Misalkan

$$u = 3x$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \cdots$$

$$\Leftrightarrow du = \cdots\ dx$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{du}{\dots}$$

   Pemisalan awal dan bentuk terakhir akan kita substitusikan pada bentuk permasalahan awal.

   $\int \sin 3x\ \ dx \Leftrightarrow \int \sin u\ .\frac{du}{\dots}$

   $\Leftrightarrow \int \dots\dots\dots\dots\dots$

   $\Leftrightarrow \frac{1}{\dots}\int \dots\dots\dots\dots$

   $\Leftrightarrow$ ________ $+ C$

$$C$$

$Setelah\ memperoleh\ hasil\ integral\ dalam\ variabel\ u, kita\ akan\ substitusi$

   $kembali\ pemisalan\ \ u\ di\ awal\ sehingga\ diperoleh$

   $\Leftrightarrow$ ________ $+ C$ dengan demikian, diperoleh hasil pengintegralan dengan Teknik substitusi

$$\int \sin 3x\, dx = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} + C$$

3. Carilah $\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}dx$

$$u = \cdots$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \cdots$$

$$\Leftrightarrow du = \cdots\ dx$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{du}{\dots}$$

Pemisalan awal dan bentuk terakhir akan kita substitusikan pada bentuk permasalahan awal.

$$\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}dx \Leftrightarrow \cdots \dots \dots \dots \dots \dots ..$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

Karena $\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ maka

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$Setelah\ memperoleh\ hasil\ integral\ dalam\ variabel\ u, kita\ akan\ substitusi$ $kembali\ pemisalan\ \ u\ di\ awal\ sehingga\ diperoleh$

$\Leftrightarrow$ ________________ $+ C$ dengan demikian, diperoleh hasil pengintegralan dengan Teknik substitusi

$$\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ + C$$

- **ATURAN SUBSTITUSI UNTUK INTEGRAL TAK TENTU**

  TEOREMA B

  Misalkan g mempunyai turunan kontinu pada [*a*,*b*], dan misalkan *f* kontinu pada daerah nilai g. Maka,

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Dimana u=g(x)

Untuk memahami penggunaan teorema B, perhatikan contoh soal berikut:

1. Hitunglah $\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2} dx$

   Misalkan

$$u = x^2 + 2x + 6$$

$$\Leftrightarrow du = (2x + 2)dx = 2(x + 1)dx$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)dx = \frac{1}{2}du,$$

dan perhatikan bahwa ketika x=0 maka u=6 dan ketika x=1 maka u=9.

Dengan demikian diperoleh g(a)=6 dan g(b)=9 sehingga penyelesaian persamaan menjadi:

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2}\,dx = \int_6^9 \frac{1}{u^2}.\frac{1}{2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_6^9 u^{-2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}(-u^{-1})_6^9$$

$$= \left[-\frac{1}{2u}\right]_6^9$$

$$= -\frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{1}{36}$$

Jadi $\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2}\,dx = \frac{1}{36}$

2. Tentukan hasil dari $\int_{\pi^2/9}^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Jadi, $\int_{\pi^2/9}^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \cdots$

Hitunglah $\int_1^3 x^3\sqrt{x^4+11}\,dx$ Jadi, $\int_1^3 x^3\sqrt{x^4+11}\,dx = \cdots$

Quiz

Kerjakan permasalahan berikut menggunakan Teknik substirusi dan upload jawaban pada LOM (SPADA Indonesia)

1. $\int x^2(x^3+5)^9\,dx = \cdots$
2. $\int x^6(7x^7+\pi)^8 \sin[(7x^7+\pi)^9]\,dx = \cdots$
3. $\int_1^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}\,dx = \cdots$
4. $\int_0^1 x\sin\pi x^2\,dx = \cdots$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 3x\cos 3x\,dx = \cdots$

BAB 12
TEKNIK PENGINTEGRALAN: INTEGRAL PARSIAL

Kompetensi Dasar:

1. Memahami prinsip Teknik pengintegralan dengan metode parsial
2. Menganalisis permasalahan yang dapat menggunakan Teknik parsial
3. Menyelesaikan permasalahan integral dengan menggunakan integral parsial

Indikator:

Setelah Pembelajaran diharapkan mahasiswa mampu:

1. Memahami prinsip Teknik pengintegralan dengan metode parsial
2. Menganalisis permasalahan yang dapat menggunakan Teknik parsial
3. Menyelesaikan permasalahan integral dengan menggunakan integral parsial

A. INTEGRAL PARSIAL

Selain Teknik substitusi, salah satu Teknik pengintegrala yang dapat digunakan untuk fungsi yang tidak dapat diintegralkan dengan aturan baku adalah teknik parsial atau integral parsial. Teknik ini digunakan untuk mengintegralkan bentuk integran dimana tidak ada perkalian antara fungsi dan turunannya dalam satu persoalan. Teknik integral parsial berasal dari Teknik diferensial untuk perkalian dua fungsi.

➨ Andaikan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$. Maka

$$D_x[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

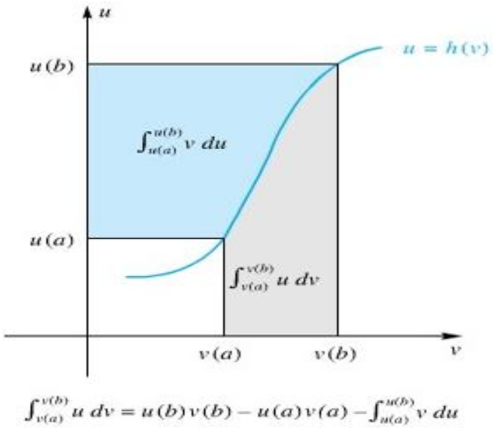
atau

$$u(x)v'(x) = D_x[u(x)v(x)] - v(x)u'(x)$$

Dengan mengintegralkan dua ruas persamaan tersebut, kita peroleh

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Perhatikan gambar 1.



Gambar 1. Interpretasi Geometri Integral Parsial

Salah satu cara untuk memilih bagian yang menjadi u adalah bahwa u merupakan fungsi yang jika diturunkan terus menerus akan menghasilkan 0. Ada dua bagian yang akan dibahas untuk mendalami integral parsial, pertama adalah Teknik integral parsial untuk integral tak tentu, dan kedua adalah Teknik integral parsial untuk integral tentu.

B. ATURAN PARSIAL UNTUK INTEGRAL TAK TENTU

Karena $dv = v'(x)dx$ dan $du = u'(x)dx$, maka untuk integral tak tentu, pengintegralan parsial dapat dituliskan sebagai berikut

$$\int udv = uv - \int udu$$

Untuk memahami penggunaan aturan parsial untuk integral tak tentu, perhatikan contoh soal berikut:

4. Tentukan hasil dari $\int xcos\ x\ dx$

   Penyelesaian:

Kita ingin menulis $x \cos x \ dx$ sebagai udv. Salah satu cara ialah memisalkan $u = x$ dan $dv = \cos x \, dx$. Jadi

$$u = x \ \Leftrightarrow du = dx$$

$$dv = \cos x \, dx$$

$$\Leftrightarrow v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

Sehingga

$$\int \mathrm{x} \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

5. Tentukan $\int x^2 \, sin \, x \, dx$

Penyelesaian:

$u = x^2$ $\qquad\qquad$ $dv = \sin x \ dx$

$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \cdots$ $\qquad\qquad$ $v = \cdots$

$\Leftrightarrow du = \cdots \ dx$

$sehingga \ \int x^2 \, sin \, x \, dx = uv - \int v \, du = \cdots \qquad - \int \dots \dots \dots \dots \dots dx$

$= \cdots \qquad - \cdots \int \dots \dots \dots dx$

Ternyata bentuk $\int v \, du$ yang diperoleh tidak bisa diintegralkan langsung, tetapi harus digunakan Teknik parsial untuk kedua kali

$u =$ $\qquad\qquad$ $dv = \cdots \dots \dots . \, dx$

$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \cdots$ $\qquad\qquad$ $v = \cdots$

$\Leftrightarrow du = \cdots \ dx$

$sehingga \ \int \dots \dots \dots \dots \dots = uv - \int v \, du = \cdots \qquad - \int \dots \dots \dots \dots \dots dx$

$Hasil \ ini \ kemudian \ sidubstitusikan \ pada \ hasil \ parsial \ pertama \ sehingga \ diperoleh$:

$\int x^2 \, sin \, x \, dx = \cdots \dots \dots \dots \dots .. - \cdots [\dots \dots \dots \dots \dots \dots - \cdots \dots \dots \dots] + C$

$= \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + C$

$= \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . + C.$

dengan demikian, diperoleh hasil pengintegralan dengan Teknik parsial

$$\int x^2 \sin x \, dx = \underline{\hspace{8cm}} + C$$

6. Carilah $\int x\sqrt{3x-2}dx$

$u = \cdots \dots \dots \dots \dots .$ $\qquad$ $dv = \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$

$du = \cdots \dots \dots dx$ $\qquad$ $v = \cdots \dots \dots \dots \dots \dots ..$

$sehingga \int x\sqrt{3x-2}dx = uv - \int v \, du = \cdots \qquad - \int \dots \dots \dots \dots \dots dx$

$= \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$

$= \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$

dengan demikian, diperoleh hasil pengintegralan dengan Teknik parsial

$$\int x\sqrt{3x-2}dx = \underline{\hspace{6cm}} + C$$

C. ATURAN PARSIAL UNTUK INTEGRAL TENTU

Rumus peingintegralan parsial untuk integral tentu adalah

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) \, dx$$

$$\int_a^b u \, dv = [uv]_a^b - \int_a^b v \, du$$

Rumus di atas memungkinkan kita memindahkan masalah pengintegralan udv pada pengintegralan vdu. Pengintegralan terakhir ini tergantung pada pemilihan u dan dv yang tepat.

Untuk memahami penggunaan parsial untuk integral tentu, perhatikan contoh soal berikut:

1. Carilah $\int_1^2 \ln x \, dx$

Penyelesaian:

$$u = \ln x \iff \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \iff du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx \iff v = x$$

Sehingga

$$\int_1^2 \ln x \, dx = [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 x.\frac{1}{x}dx$$

$$= 2\ln 2 - \int_1^2 dx$$

$$= 2\ln 2 - 1 \approx 0.386$$

2. Tentukan hasil dari $\int_{\pi/6}^{\pi/2} 2x \cos x \, dx$

   Jadi, $\int_{\pi/6}^{\pi/2} 2x \cos x \, dx = \cdots$

3. Hitunglah $\int_0^4 6x^2\sqrt{3x+4}\, dx$

   Jadi, $\int_0^4 6x^2\sqrt{3x+11}\, dx \quad = \cdots$

D. Quiz

Kerjakan permasalahan berikut menggunakan Teknik parsial dan upload jawaban pada LOM (SPADA Indonesia)

1. $\int x^2(2x+5)^9 \, dx = \cdots$
2. $\int e^x \sin x \;\, dx = \cdots$
3. $\int_2^7 \frac{x^2+1}{\sqrt{x+2}} dx = \cdots$
4. $\int_0^1 x \cos \pi x \, dx = \cdots$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 3x \cos 3x \, dx = \cdots$

PROJECT VOLUME BENDA PUTAR

Judul Proyek:

Menghitung Volume benda putar pada Benda-Benda Bernilai Budaya

Tujuan:

Mahasiswa diharapkan mampu menerapkan konsep integral untuk menghitung volume benda putar pada benda-benda yang dipilih secara acak. Benda yang dipilih harus memiliki nilai budaya, sehingga dapat memberikan pemahaman yang lebih dalam mengenai penerapan matematika dalam konteks budaya.

Langkah-langkah Tugas:

1. **Pemilihan Benda:**
   - Pilihlah sebuah benda yang memiliki nilai budaya. Benda tersebut dapat berupa artefak, ornamen tradisional, atau benda seni yang mempunyai makna historis atau kultural.
   - Pastikan bahwa benda yang dipilih memiliki bentuk yang memungkinkan untuk dianalisis menggunakan konsep integral.

2. **Menentukan Persamaan Fungsi:**
   - Gunakan aplikasi **GeoGebra** untuk membantu Anda menentukan persamaan fungsi dari kurva yang membentuk benda yang telah Anda pilih.
   - Anda dapat mengambil gambar atau sketsa benda tersebut, kemudian menggunakan fitur **GeoGebra** untuk menggambarkan kurva yang mendekati bentuk benda tersebut.
   - Tentukan batas atas dan batas bawah dari fungsi yang menggambarkan bentuk benda tersebut.

3. **Menghitung Volume Benda Pejal Putar:**
   - Gunakan konsep integral untuk menghitung volume benda putar yang dibatasi oleh kurva benda tersebut.
   - Hitung volumenya menggunakan integral tertentu dengan batas yang telah Anda tentukan dari persamaan fungsi yang Anda peroleh melalui GeoGebra.

4. **Penyusunan Laporan:**
   - Buatlah laporan yang berisi:
     - ✓ Penjelasan singkat mengenai benda-benda yang Anda pilih, termasuk nilai budayanya.
     - ✓ Proses menentukan persamaan fungsi menggunakan **GeoGebra**.
     - ✓ Proses perhitungan integral untuk menentukan volume benda putar.
     - ✓ Hasil perhitungan.

5. **Presentasi Video:**
   - Buatlah video penjelasan yang runtut berdasarkan laporan yang telah Anda susun. Video tersebut harus mencakup:
     - ✓ **Pendahuluan:** Penjelasan mengenai benda yang Anda pilih dan alasan pemilihan berdasarkan nilai budaya.
     - ✓ **Penjelasan Teknis:** Proses penentuan persamaan fungsi menggunakan **GeoGebra**, serta langkah-langkah dalam menghitung volume benda putar menggunakan integral.
     - ✓ **Hasil dan Kesimpulan:** Sajikan hasil perhitungan volume benda putar untuk benda, serta kesimpulan dari analisis yang Anda lakukan.
   - Pastikan video memiliki struktur yang jelas, kualitas suara yang baik, dan visual yang mendukung penjelasan Anda.

6. **Upload Video ke YouTube:**
   - Setelah membuat video, unggah video tersebut ke **YouTube**. Pastikan pengaturan privasi video diatur sebagai "Publik" atau "Tidak Terdaftar" agar dapat diakses oleh dosen dan teman-teman Anda.
   - Sertakan judul video yang relevan dengan tugas, dengan format "Menghitung Volume Benda Putar *Nama benda yang bernilai budaya* - [Nama Lengkap Anda]", misalnya: Menghitung Volume Benda putar Cempala - Luthfiyati
   - Tambahkan deskripsi singkat yang mencakup tujuan proyek, dan link menuju laporan tertulis jika memungkinkan.

7. **Pengumpulan Link Video:**
   - Kirimkan link video YouTube beserta laporan tertulis Anda melalui platform yang telah ditentukan oleh dosen (misalnya, melalui Learning Management System atau email).
   - Pastikan Anda mengumpulkan tugas sesuai dengan tenggat waktu yang telah ditentukan.

DAFTAR PUSTAKA

E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 10th edition, John Wiley & Sons, 2011

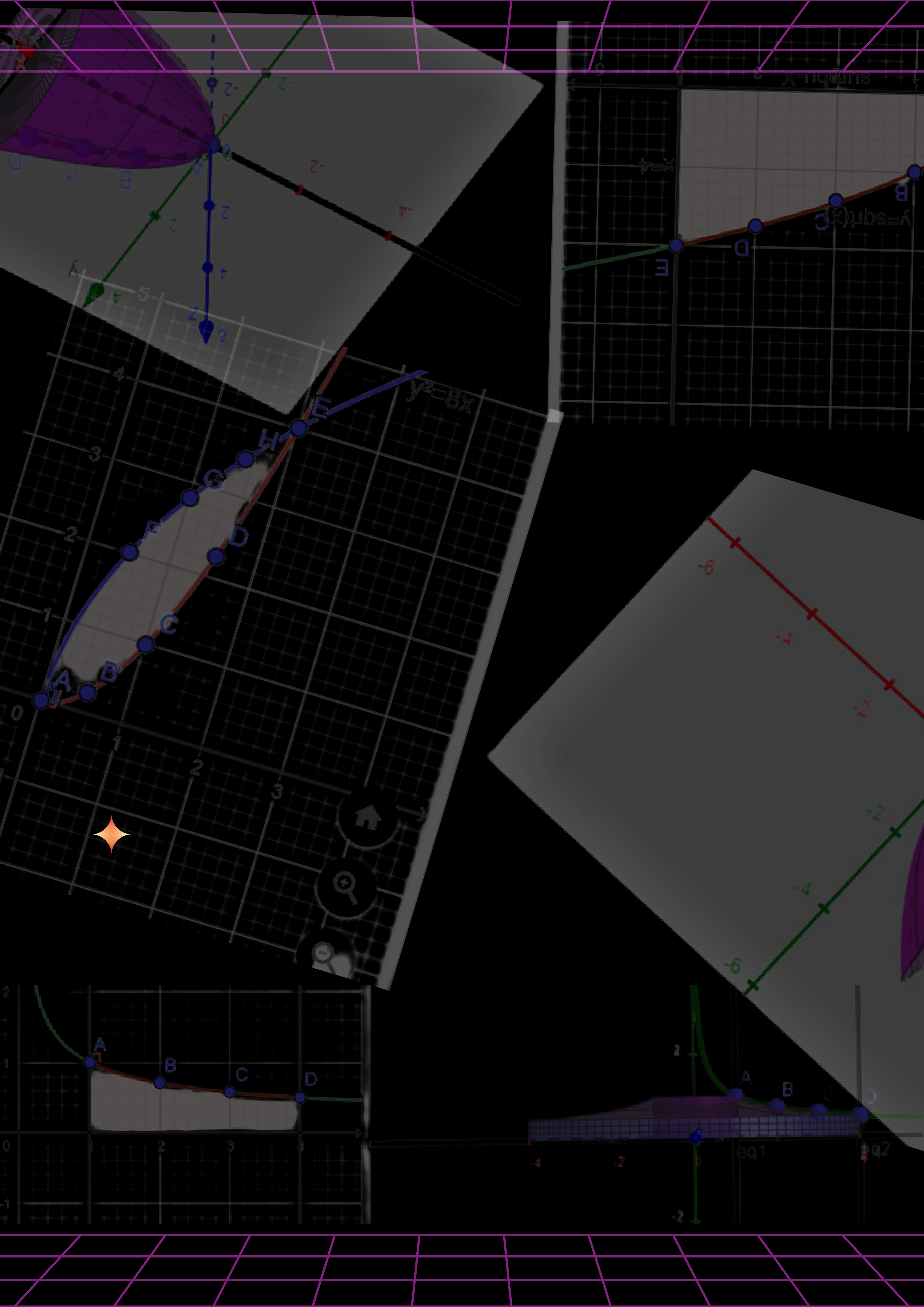
Hartini,S. 2021."*Buku Pegangan Kuliah Kalkulus Integral"*. Prodi Matematika FKIP Unwir: Indramayu.

J Purcell, Dale Varberg (Alih bahasa : I Nyoman Susila, Ph.D dkk), Kalkulus, Jilid 1, Erlangga, 2005

James Stewart (Alih Bahasa : Drs I Nyoman Susila, MSc dan Hendra Gunawan, Ph.D), Kaluklus, Jilid 1 dan 2, Erlangga, 2000

L. Leithold, The Calculus with Analytic Geometry 5th edition, HarperCollins Publishers, 1998

W. Kaplan & D. Y. Lewis, Calculus & Linear Algebra Vol. 2, University of Michigan, 2007


y²=8x
eq1
eq2