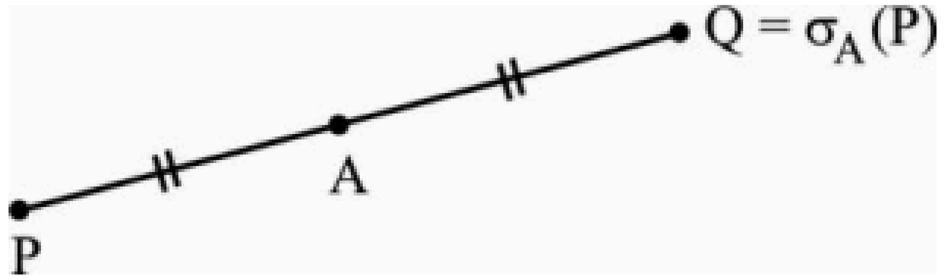
Setengah Putaran dan ruas garis berarah

Definisi Setengah Putaran

Setengah putaran merupakan keadaan khusus pencerminan, yaitu pencerminan terhadap suatu titik. ‘Garis sumbu’ dalam pencerminan diambil alih perannya oleh ‘titik cermin’ setengah putaran. Untuk memahami lebih lanjut secara matematis, Anda pelajari pengertian setengah putaran melalui definisi dan contoh-contoh berikut.

Misalkan *V* bidang Euclides dan A titik tertentu pada bidang *V*. Setengah putaran pada titik A adalah fungsi σ_A yang didefinisikan untuk setiap titik P pada *V* sebagai berikut.

1) Apabila P = A, maka $\sigma_A(P) = A$
2) Apabila $P \neq A$, maka $\sigma_A(P) = Q$ sehingga A titik tengah ruas garis $\overline{PQ}$.



Gambar 3.1

CONTOH

Diberikan A, B, dan C adalah titik-titik pada bidang Euclides V. Lukis:

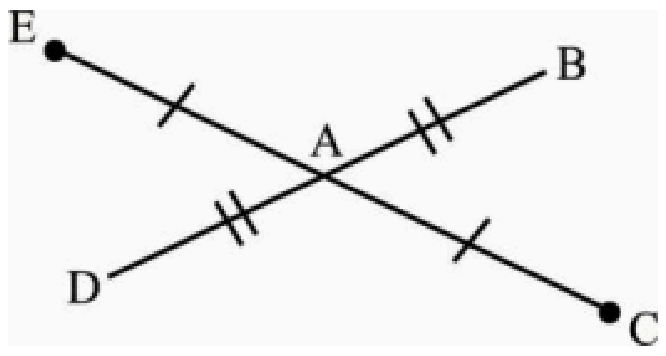
a) titik D sehingga $D = \sigma_A (B)$

b) titik E sehingga $C = \sigma_A (E)$

Penyelesaian:

a) $D = \sigma_A (B)$ berdasarkan Definisi 3.1, A adalah titik tengah $\overline{BD}$. Karena $B \neq A$, maka ada ruas garis $\overline{BA}$. Kemudian Anda perpanjang ruas garis $\overline{BA}$ ke arah titik A sehingga memperoleh ruas garis $\overline{AD}$ yang ekuivalen dengan ruas garis $\overline{BA}$. Akibatnya Anda mendapatkan ruas garis $\overline{BD}$ di mana A merupakan titik tengah ruas garis $\overline{BD}$. Artinya $D = \sigma_A (B)$.

υ) $C = \sigma_A (E)$ berdasarkan Definisi 3.1, A adalah titik tengah dari $\overline{EC}$. Karena $C \neq A$ maka ada ruas garis $\overline{CA}$. Kemudian Anda perpanjang ruas garis $\overline{CA}$ ke arah titik A sehingga memperoleh ruas garis $\overline{AE}$ yang ekuivalen dengan ruas garis $\overline{CA}$. Akibatnya Anda mendapatkan ruas garis $\overline{EC}$, titik A sebagai titik tengahnya, artinya $C = \sigma_A (E)$.



Gambar 3.2

SETENGAH PUTARAN SEBAGAI SUATU ISOMETRI

Dalam bagian ini Anda mencoba mengkaji hubungan antara pengertian setengah putaran dengan pengertian isometri yang telah Anda pelajari pada Modul 2. Hubungan ini dituangkan dalam Teorema 3.1.

Teorema 3.1 | Setiap setengah putaran adalah suatu isometri

Bukti:
Dalam rangka membuktikan Teorema 3.1 Anda ambil sebarang setengah putaran σ_A, dalam hal ini terdapat dua langkah yaitu:

a. langkah menunjukkan σ_A merupakan suatu transformasi;
b. langkah menunjukkan σ_A merupakan suatu isometri.

Timbul pertanyaan pada benak Anda mengapa demikian? Hal ini disebabkan Anda menetapkan pengertian isometri melalui pengertian transformasi (lihat Modul 2).

a. Untuk menunjukkan σ_A suatu transformasi maka Anda harus menunjukkan tiga hal, yaitu
   1. σ_A (P) $\in V$, $\forall$P $\in V$, artinya σ_A: $V \rightarrow V$,
   2. σ_A fungsi kepada, dan
   3. σ_A fungsi satu-satu.

1. Ambil sebarang P $\in V$. Apabila P = A maka berdasarkan Definisi 3.1, 1) σ_A (P) = A. Karena A $\in V$ maka σ_A (P) $\in V$. Apabila P $\neq$ A, maka $\overline{PA} \subset V$. Misalkan Q = σ_A (P) maka berdasarkan Definisi 3.1, 2) A titik tengah $\overline{PQ}$, artinya A $\in \overline{PQ}$. Karena A $\in \overline{PQ}$ maka $\overline{PQ} \subset \overleftrightarrow{AP}$. Karena A, P $\in V$ maka $\overleftrightarrow{AP} \in V$. Karena $\overline{PQ} \subset \overleftrightarrow{AP}$ dan $\overleftrightarrow{AP} \subset V$ maka $\forall$P $\in V$ berlaku σ_A(P) $\in V$. Dengan kata lain $\sigma_A : V \rightarrow V$.

2. Ambil Q titik sebarang pada V. Apabila Q = A maka ada P $\in V$, yaitu P = A sehingga σ_A(P = A) = Q = A. Apabila Q $\neq$ A maka $\overline{AQ} \subset V$. Karena $\overline{AQ} \subset V$ maka ada P $\in V$ sehingga A titik tengah dari $\overline{PQ}$. Hal ini berarti apabila Q $\neq$ A, ada P $\in V$ sehingga σ_A (P) = Q. Jadi, σ_A fungsi kepada.

3. Ambil P dan R titik sebarang pada V sehingga σ_A (P) = σ_A (R). Apabila σ_A (P) = σ_A (R) = A maka P = A = R. Apabila σ_A (P) = σ_A (R) = S dengan S $\neq$ A maka A titik tengah $\overline{PS}$ dan $\overline{RS}$. Karena A titik tengah $\overline{PS}$ dan $\overline{RS}$ maka $\overline{PS} = \overline{RS}$. Karena $\overline{PS} = \overline{RS}$ maka P = R. Karena untuk sebarang P dan R pada V dengan σ_A (P) = σ_A (R), Anda dapat menunjukkan bahwa P = R maka σ_A merupakan fungsi satu-satu.

SIFAT-SIFAT SETENGAH PUTARAN

Sifat-sifat setengah putaran yang Anda pelajari dalam bagian ini adalah hubungan antara setengah putaran dengan pencerminan dan involusi, seperti tertuang dalam Teorema 3.2.

Teorema 3.2	Apabila garis-garis g dan h berpotongan tegak lurus di titik A, maka $\sigma_A = \mu_{g} \circ \mu_h$.

Bukti:

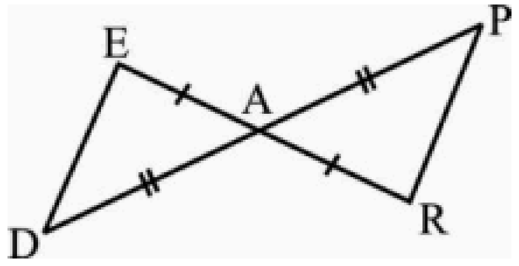
Misalkan $\sigma_A(P) = P'$, $\mu_h(P) = P_1$, $\mu_g(P_1) = P_2$ (perhatikan Gambar 3.3). Dari pemisalan ini, Anda mendapatkan

1. $(\mu_{g} \circ \mu_h)(P) = P_2$
2. A titik tengah dari $\overline{PP'}$
3. h sumbu dari $\overline{PP_1}$ dan
4. g sumbu dari $\overline{P_1P_2}$

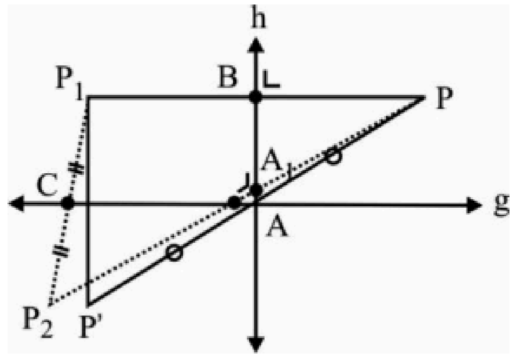
Misal $\{B\} = \overleftrightarrow{PP_1} \cap h$, $\{C\} = \overleftrightarrow{P_1P_2} \cap g$. Perhatikan Δ PBA dan Δ PP_1P'. Karena $PP_1 = 2PB$ dan $PP' = 2PA$ maka $PP_1 : PP' = PB : PA$. Akibatnya $\Delta PBA \approx \Delta PP_1P'$. $\angle PBA$ adalah sudut siku-siku maka $\angle PP_1P'$ juga suatu sudut siku-siku. Sehingga $\overleftrightarrow{PP_1} \perp \overleftrightarrow{P_1P'}$. Anda mengetahui bahwa g sumbu dari $\overleftrightarrow{P_1P_2}$, h sumbu dari $\overleftrightarrow{PP_1}$ dan $g \perp h$, akibatnya $\overleftrightarrow{PP_1} \perp \overleftrightarrow{P_1P_2}$. Karena $\overleftrightarrow{PP_1} \perp \overleftrightarrow{P_1P'}$ dan $\overleftrightarrow{PP_1} \perp \overleftrightarrow{P_1P_2}$ maka $\overleftrightarrow{P_1P_2} = \overleftrightarrow{P_1P'}$. Akibatnya P_1, P_2 dan P' terletak pada satu garis yang tegak lurus pada $\overleftrightarrow{PP_1}$, artinya P' terletak pada $\overleftrightarrow{PP_1}$. Selanjutnya, Anda misalkan $\overleftrightarrow{P_2P} \cap h = \{A_1\}$ (lihat Gambar 3.5). Perhatikan ΔPBA_1 dan ΔPP_1P_2. Karena $\angle PBA_1 \cong PP_1P_2$, yaitu sudut siku-siku maka $\Delta PBA_1 \approx PP_1P_2$. Tetapi Anda mengetahui bahwa $PP_1 = 2PB$, akibatnya A_1 titik tengah $\overline{PP_2}$.

Karena g sumbu dari P_1P_2 maka $P_1C = CP_2$. Karena $PA_1 = A_1P_2$ dan $P_1C = CP_2$ maka $\overleftrightarrow{CA} \,//\, \overleftrightarrow{P_1P}$. Karena $\overleftrightarrow{PP_1} \perp P_1P_2$, $C \in \overleftrightarrow{P_1P_2}$ maka $\overleftrightarrow{CA_1} \perp \overleftrightarrow{P_1P_2}$. Anda mengetahui $\overleftrightarrow{CA} \perp \overleftrightarrow{P_1P_2}$. Akibatnya $\overleftrightarrow{CA} = \overleftrightarrow{CA_1}$. Karena $\{A_1\} = h \cap \overleftrightarrow{CA_1}$, $\{A\} = h \cap \overleftrightarrow{CA}$ dan $\overleftrightarrow{CA_1} = \overleftrightarrow{CA}$ maka $A_1 = A$.

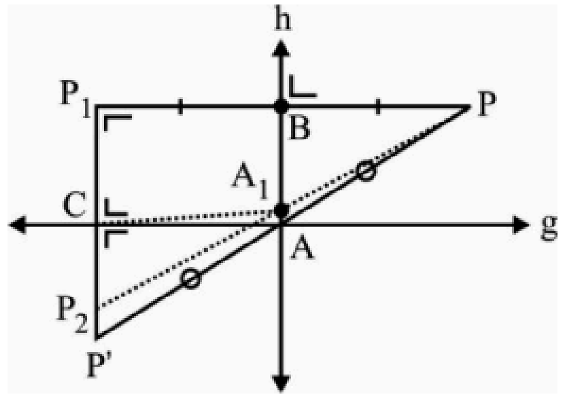
Akibatnya $\overleftrightarrow{PA_1} = \overleftrightarrow{PA}$ karena $\{P_2\} = \overleftrightarrow{P_1P_2} \cap \overleftrightarrow{PA_1}$, $\{P'\} = \overleftrightarrow{P_1P_2} \cap \overleftrightarrow{PA}$ dan $\overleftrightarrow{PA_1} = \overleftrightarrow{PA}$ maka $\sigma_A(P) = (\mu_{g} \circ \mu_h)(P)$, $\forall P \in V$. Jadi, $\sigma_A = \mu_{g} \circ \mu_h$.



Gambar 3.3



Gambar 3.4



Gambar 3.5

SIFAT-SIFAT SETENGAH PUTARAN

Teorema 3.3 Apabila $g \perp h$ maka $\mu_g \circ \mu_h = \mu_h \circ \mu_g$.

Bukti:
Misalkan $\{A\} = g \cap h$, karena $g \perp h$, maka $\mu_g \circ \mu_h = \sigma_A$ dan $\mu_h \circ \mu_g = \sigma_A$.
Jadi, $\mu_g \circ \mu_h = \mu_h \circ \mu_g$.

Teorema 3.4 Setiap setengah putaran adalah involusi.

Bukti:
Ambil sebarang setengah putaran σ_A. Kita akan membuktikan σ_A involusi, yaitu $\sigma_A^{-1} = \sigma_A$. Ambil dua garis g dan h sehingga $\{A\} = g \cap h$ dan $g \perp h$. Berdasarkan Teorema 3.2, $\sigma_A = \mu_g \circ \mu_h$. Anda memperoleh $\sigma_A{}^{-1} = \mu_g \circ \mu_h{}^{-1} = \mu_h^{-1} \circ \mu_g^{-1} = \mu_h \circ \mu_g = \sigma_A$, sebab $h \perp g$ dan $\{A\} = g \cap h$. Jadi, σ_A adalah involusi.

3. Persamaan Setengah Putaran

Hubungan antara setengah putaran dengan koordinat Cartesius dituangkan dalam teorema berikut ini.

Teorema 3.5 Apabila A (a, b) dan P (x, y) sebarang titik, maka $\sigma_A(P) = (2a - x, 2b - y)$

Bukti:
Misalkan Q $(x_0, y_0) = \sigma_A(P)$ maka A titik tengah $\overline{PQ}$. Sehingga Anda mendapat hubungan,

$$a = \frac{x + x_0}{2} \text{ dan } b = \frac{y + y_0}{2}$$

Apabila Anda selesaikan didapat persamaan $x_0 = 2a - x$ dan $y_0 = 2b - y$. Jadi, $\sigma_A(P) = (2a - x, 2b - y)$, $\forall$ P (x, y).

Untuk lebih memahami persamaan setengah putaran yang dituangkan dalam Teorema 3.5, Anda pelajari Contoh 3.2.

CONTOH

Contoh 3.2

Buktikan Teorema 3.2 dengan menggunakan Teorema 3.5.

Penyelesaian

Ambil garis g sebagai sumbu x dan garis h sebagai sumbu y. Akibatnya, apabila $\{A\} = g \cap h$ maka A (0,0). Ambil titik sebarang P (x, y). Berdasarkan Teorema 3.5, Anda mendapatkan bahwa

$$\sigma_A(P) = \sigma_{(0,0)}[(x, y)] = (2.\,0 - x,\ 2\,.\,0 - y) = (-x, -y) \qquad (1)$$

Berdasarkan Teorema 2.6 bagian (a) dan (b) akan didapatkan

$$\mu_h\ (P) = \mu_h\ [(x, y)] = (-x, y) \text{ dan}$$

$$\mu_g\ (P) = \mu_g\ [(x\,, y)] = (x, -y)$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } (\mu_g \circ \mu_h)(P) &= \mu_g\ [\mu_h(P)] \\ &= \mu_g\ [\mu_h(x\,, y)] \\ &= \mu_g\ (-x, y) \\ &= (-x, -y) \qquad (2) \end{aligned}$$

berdasarkan (1) dan (2), Anda simpulkan bahwa:

$\sigma_A(P) = (\mu_g \circ \mu_h)(P),\ \forall\ P\ (x, y)$

Jadi, $\sigma_A = \mu_g \circ \mu_h$.

LANJUTAN SETENGAH PUTARAN

B. LANJUTAN SETENGAH PUTARAN

Dalam bagian ini, kita mempelajari sifat-sifat setengah putaran dan pencerminan disebabkan ketentuan invarian, kolineasi, dan dilatasi, seperti dituangkan dalam definisi-definisi dan teorema-teorema berikut.

Definisi 3.2 Misalkan A suatu titik tertentu pada bidang Euclides dan T suatu transformasi. Titik A disebut titik invarian pada transformasi T jika dan hanya jika berlaku T(A) = A.

Teorema 3.6 Setiap refleksi (pencerminan) pada garis mempunyai tak hingga titik invarian.

Bukti:

Berdasarkan definisi dari suatu refleksi (pencerminan) sebuah garis, misalnya sumbu refleksinya adalah garis g maka Anda mengetahui bahwa

1. $\mu_g(P) = P$ jika $P \in g$
2. $\mu_g(P) = Q$ jika g sumbu dari $\overline{PQ}$

Akibat $\forall$ $P \in g$, jelas bahwa $\mu_g(P) = P$. Artinya P titik invarian pada μ_g ini. Karena garis g mempunyai tak hingga titik, akibatnya titik invarian dari μ_g adalah tak hingga, yaitu semua titik pada garis g. Karena sumbu refleksi diambil sebarang garis g, maka kesimpulannya setiap refleksi pada garis mempunyai tak hingga titik invarian.

Teorema 3.7 Setiap setengah putaran mempunyai tepat satu titik invarian.

Bukti:

Ambil σ_A sebarang setengah putaran. Berdasarkan Definisi 3.1 bahwa hanya P = A sehingga $\sigma_A(A) = A$. Berdasarkan Definisi 3.2, bahwa A titik invarian pada σ_A. Jadi σ_A mempunyai tepat satu titik invarian. Karena σ_A sebarang setengah putaran maka setiap setengah putaran mempunyai tepat satu titik invarian.

LANJUTAN SETENGAH PUTARAN

Definisi 3.3 Sebuah transformasi T yang mempunyai sifat bahwa sebuah garis petanya adalah sebuah garis maka T disebut kolineasi.

Teorema 3.8 Setiap refleksi pada garis merupakan suatu kolineasi.

Bukti:
Ambil μ_g sebarang refleksi pada garis g. Berdasarkan Teorema 2.4 μ_g adalah isometri. Suatu isometri bersifat mengawetkan garis, artinya peta dari suatu garis adalah garis lagi oleh suatu isometri maka μ_g mengawetkan garis. Berdasarkan Definisi 3.3, Anda simpulkan bahwa μ_g suatu kolineasi. Karena μ_g diambil sebarang refleksi garis maka setiap refleksi merupakan suatu kolineasi.

Teorema 3.9 Setiap setengah putaran merupakan suatu kolineasi.

Bukti:
Karena setengah putaran merupakan suatu isometri dan karena suatu isometri mengawetkan garis maka setengah putaran merupakan kolineasi.

Definisi 3.4 Suatu kolineasi yang mempunyai sifat bahwa peta dan prapeta suatu garis akan sejajar disebut dilatasi.

Teorema 3.10 Setiap setengah putaran merupakan dilatasi.

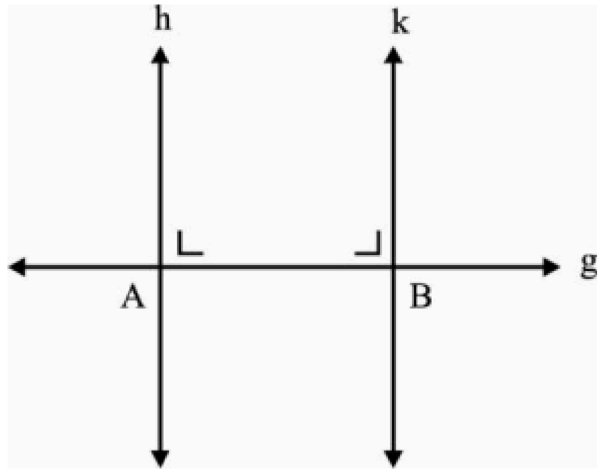
Bukti:
Ambil σ_A sebarang setengah putaran dan g sebarang garis. Apabila g melalui titik A maka $\sigma_A(g) = g$. Jadi, $\sigma_A(g) \parallel g$. Apabila g tidak melalui titik A. Ambil B, C $\in$ g, misalkan $D = \sigma_A(B)$, $E = \sigma_A(C)$, maka AB = AD, AC = AE, dan $\angle BAC \cong \angle DAE$, sebab B, A, D, dan C, A, D masing-masing terletak pada satu garis, jadi $\Delta BAC \cong \Delta DAE$ (s-sd-s). Akibatnya $\angle BCA \cong \angle DEA$. Karena $\angle BCA \cong \angle DEA$ dan E juga A terletak pada satu garis maka $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{DE}$. Karena $g = \overleftrightarrow{BC}$ dan $\sigma_A(g) = \overleftrightarrow{DE}$ maka $\sigma_A(g) \parallel g$. Jadi, σ_A merupakan dilatasi. (lihat Gambar 3.6).

LANJUTAN SETENGAH PUTARAN

Teorema 3.11 Komposisi dua setengah putaran dengan pusat yang berbeda tidak memiliki titik invarian.

Bukti:

Ambil σ_A dan σ_B dengan $A \neq B$. Namakan $\overleftrightarrow{AB}$ dengan garis g dan buat garis h melalui A tegak lurus g dan garis k melalui B tegak lurus garis g (lihat Gambar 3.7).



Gambar 3.7

Akibatnya $\sigma_A = \mu_h \circ \mu_g$ dan $\sigma_B = \mu_g \circ \mu_k$. Sehingga didapat:

$$\begin{aligned}
\sigma_A \circ \sigma_B &= (\mu_h \circ \mu_g) \circ (\mu_g \circ \mu_k), \text{ substitusi} \\
&= \mu_h \circ (\mu_g \circ \mu_g) \circ \mu_k, \text{ asosiatif} \\
&= \mu_h \circ \varepsilon \circ \mu_k, \text{ karena } \mu_g \circ \mu_g = \varepsilon, \text{ identitas} \\
&= \mu_h \circ \varepsilon \circ \mu_k, \text{ asosiatif} \\
&= \mu_h \circ \mu_k, \ \varepsilon \text{ identitas.}
\end{aligned}$$

Andaikan X titik invarian dari $\sigma_A \circ \sigma_B$ artinya $(\sigma_A \circ \sigma_B)(X) = X$.
Karena $\sigma_A \circ \sigma_B = \mu_h \circ \mu_k$ maka $(\mu_h \circ \mu_k)(X) = X$.

Jadi,
$$\begin{aligned}
&\mu_h \circ [(\mu_h \circ \mu_k)(X)] = \mu_h(x) \\
&(\mu_h \circ \mu_h) \circ [\mu_k(X)] = \mu_h(x), \quad \text{asosiatif} \\
&\varepsilon \circ [\mu_k(X)] = \mu_h(X), \ \mu_h \circ \mu_h = \varepsilon \\
&\mu_k(X) = \mu_h(X), \quad \varepsilon \text{ identitas}
\end{aligned}$$

Misalkan $\mu_k(X) = \mu_h(X) = Y$ maka k sumbu dari $\overline{XY}$ dan h juga sumbu dari $\overline{XY}$. Akibatnya h = k. Terjadi kontradiksi dengan h berbeda dari k, sebab masing-masing melalui titik A dan B yang berbeda. Jadi, pengandaian bahwa X titik invarian dari $\sigma_A \circ \sigma_B$ adalah salah. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\sigma_A \circ \sigma_B$ tidak memiliki titik invarian.

LANJUTAN SETENGAH PUTARAN

Teorema 3.12 Apabila diberikan titik A dan B sehingga A $\neq$ B, maka hanya ada satu buah setengah putaran yang memetakan A ke B.

Bukti:

Ada dua hal yang harus kita tunjukkan, yaitu:

1. adanya setengah putaran yang memetakan A ke B.
   Karena A $\neq$ B maka ada $\overline{AB}$. Hal ini mengakibatkan adanya D sehingga D titik tengah $\overline{AB}$, artinya ada setengah putaran σ_D sehingga $\sigma_D(A) = B$.

2. tidak lebih dari satu buah setengah putaran yang memetakan A ke B
   Andaikan ada dua buah setengah putaran σ_D dan σ_E sehingga $\sigma_D(A) = B$ dan $\sigma_E(A) = B$. Akibatnya $\sigma_D(A) = \sigma_E(A)$. Selanjutnya diperoleh

$$\sigma_D^{-1}\,\sigma_D(A) = \sigma_D^{-1}\,\sigma_E(A)$$

$$\sigma_D^{-1} \circ \sigma_D\,(A) = \sigma_D\,\sigma_E(A)$$

$$\varepsilon(A) = (\sigma_D \circ \sigma_E)(A)$$

$$A = (\sigma_D \circ \sigma_E)(A)$$

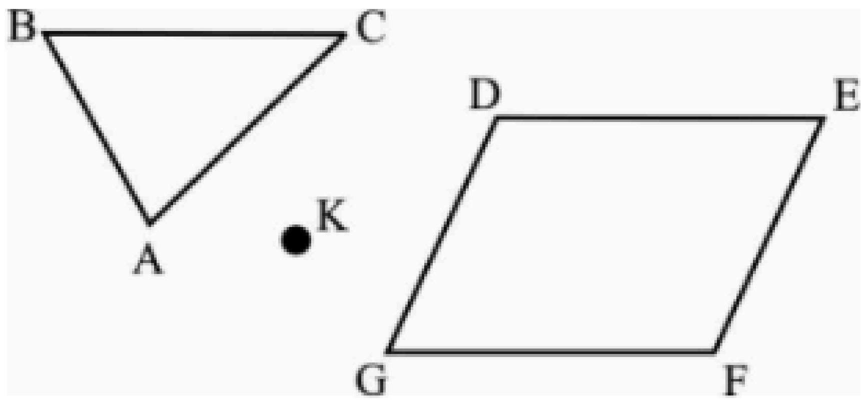
Akibatnya A titik invarian dari $\sigma_D \circ \sigma_E$. Apabila D $\neq$ E, maka $\sigma_D \circ \sigma_E$ tidak memiliki titik invarian (Teorema 3.11). Sehingga hal ini berakibat bahwa D = E. Jadi, $\sigma_D = \sigma_E$.

Kesimpulannya hanya ada satu buah setengah putaran yang memetakan A ke B, yaitu σ_D dimana D titik tengah $\overline{AB}$.

LATIHAN SOAL

1) Diberikan tiga titik A, B, P tidak kolinear dan berbeda
Lukis: a) $\sigma_A(P)$
b) R sehingga $\sigma_B(R) = P$
c) $(\sigma_A \circ \sigma_B)(P)$
d) $(\sigma_B \circ \sigma_A)(P)$
e) Apa yang Anda dapat simpulkan tentang $\sigma_A \circ \sigma_B$ dan $\sigma_B \circ \sigma_A$.

2) Diberikan Δ ABC, jajaran genjang DEFG dan titik K seperti Gambar 3.8 di bawah ini.
Lukis: a) $\sigma_K(\Delta ABC)$
b) tentukan H sehingga $\sigma_H(DEFG) = DEFG$



Gambar 3.8

3) Jika B(1, 3) tentukan:
a) $\sigma_B(D)$ apabila D(–3, 4)
b) E apabila $\sigma_B(E) = (-2, 5)$
c) $\sigma_B(P)$ apabila P(x, y)
d) Persamaan garis g dan h sehingga $\sigma_B = \mu_g \circ \mu_h$

4) Apabila C(–4, 3) dan g = {(x, y)| y = –x}, tentukan:
a) $(\mu_g \circ \sigma_C)[(2, -1)]$
b) $(\mu_g \circ \sigma_C)(P)$ jika P (x, y)
c) $(\mu_g \circ \sigma_C)^{-1}(P)$
Apakah $\mu_g \circ \sigma_C = \sigma_C \circ \mu_g$? Jelaskan

5) Diberikan tiga titik A, B dan C. Buktikan bahwa
a) $(\sigma_A \circ \sigma_B)^{-1} = \sigma_B \circ \sigma_A$
b) $(\sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_C)^{-1} = \sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A$

6) a) Apabila A(0, 0), B(–4, 1), tentukan K sehingga $(\sigma_A \circ \sigma_B)(K) = (6, 2)$.
b) Apabila $(\mu_g \circ \sigma_A)(P) = R$, nyatakanlah koordinat P dengan koordinat R

7) Diberikan titik A, B dan garis g sehingga $A \notin g$, $B \notin g$.
Lukis: a) $g' = (\sigma_A \circ \sigma_B)(g)$
b) garis k sehingga $(\sigma_A \circ \sigma_B)(k) = g$

8) Apabila g = {(x, y)|2x – 5y = 4) dan A(1, 4), selidiki apakah C(–1, 6) $\in g' = \sigma_A(g)$? Tentukan pula persamaan g'.

9) Apabila Q titik tengah $\overline{PR}$, buktikan bahwa $\sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_R \circ \sigma_Q$.

10) Buktikan:
a) Apabila g // h maka $\mu_g \circ \mu_h$ tidak memiliki titik invarian
b) Apabila $A \notin g$, g suatu garis maka $\sigma_A \circ \mu g$ tidak memiliki titik invarian.

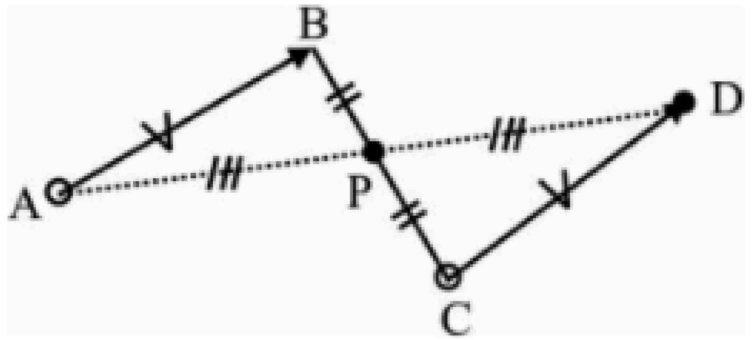
Ruas Garis Berarah

A. PENGERTIAN RUAS GARIS BERARAH

Dalam geometri Euclides Anda telah mengenal ruas garis, tetapi bahasan ruas garis tersebut tidak dibicarakan arahnya. Apakah ruas garis mempunyai arah? Untuk menjawab pertanyaan tersebut dalam modul ini Anda mempelajari ruas garis yang arahnya diperhatikan. Untuk memahami lebih jauh tentang hal itu, Anda pelajari pengertian ruas garis berarah melalui definisi dan contoh-contoh berikut ini.

Definisi 3.5 Suatu ruas garis berarah adalah ruas garis yang salah satu ujungnya dinamakan pangkal dan ujung lainnya dinamakan akhir. Apabila A dan B dua titik, $\overrightarrow{AB}$ ditetapkan sebagai ruas garis berarah dengan pangkal titik A dan akhir titik B.

Definisi 3.6 $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$ (dibaca "ruas garis AB ekuivalen dengan ruas garis CD) apabila $\sigma_P(A) = D$ dengan P titik tengah $\overline{BC}$.



Gambar 3.13

Ruas Garis Berarah

Lukis:

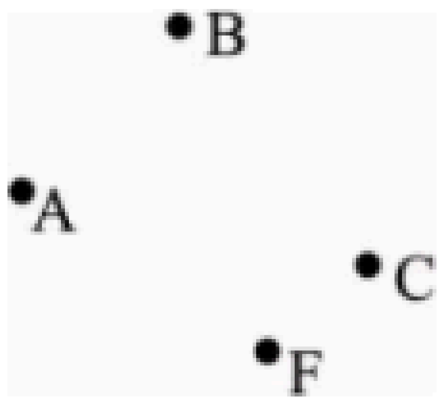
a) D sehingga $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$

b) E sehingga $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{EF}$

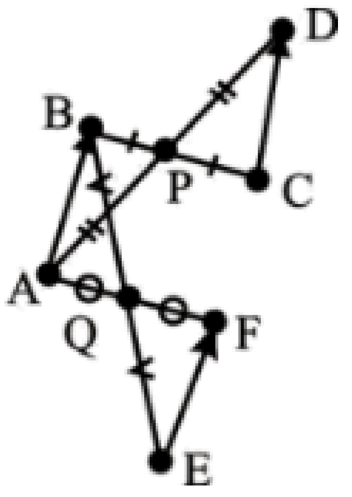
Penyelesaian

a) $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$, apabila $\sigma_P(A) = D$, dengan P titik tengah $\overline{BC}$ maka titik D diperoleh dengan cara mencari titik tengah $\overline{BC}$, Anda namakan titik tersebut adalah titik P, kemudian cari D sehingga $D = \sigma_P(A)$.

b) $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{EF}$, apabila $\sigma_Q(A) = F$, dengan Q titik tengah $\overline{BE}$. Karena $\sigma_Q(A) = F$ maka Q merupakan titik tengah $\overline{AF}$. Karena Q titik tengah $\overline{BE}$, maka $\sigma_Q(B) = E$. Sehingga titik E diperoleh dengan cara mencari titik tengah $\overline{AF}$, yaitu titik Q, kemudian mencari titik E sehingga $E = \sigma_Q(B)$.



Gambar 3.14



Gambar 3.15

Ruas Garis Berarah

B. SIFAT-SIFAT RUAS GARIS BERARAH

Dalam bagian ini Anda akan mempelajari sifat penting dari ruas garis berarah yang tertuang dalam teorema 3.14.

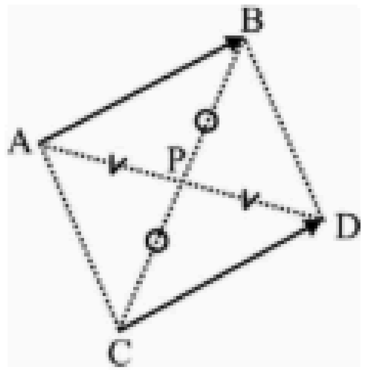
Teorema 3.14	Apabila $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{CD}$ tidak kolinear maka segiempat ABDC sebuah jajaran genjang jika dan hanya jika $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$.

Bukti:

Untuk membuktikan teorema ini Anda harus membuktikan dua hal, yaitu

1. $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$ maka ABDC sebuah jajaran genjang

   Misalkan P titik tengah $\overline{BC}$ maka $\sigma_P(A) = D$ sebab $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$. Karena $\overline{AD}$ dan $\overline{BC}$ diagonal-diagonal segiempat ABDC dan AP = PD serta BP = PC maka segiempat ABDC sebuah jajaran genjang (lihat Gambar 3.16)



Gambar 3.16

2. ABDC jajaran genjang maka $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$.

   Karena segiempat ABDC jajaran genjang maka diagonal $\overline{AD}$ dan $\overline{BC}$ berpotongan saling membagi dua sama panjang. Artinya apabila P $= \overline{AD} \cap \overline{BC}$ maka AP = PD, BP = PC.

   Akibatnya P titik tengah $\overline{BC}$ dan $\sigma_P(A) = D$. Jadi, $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$.

Teorema 3.15

> Relasi "$\cong$" pada himpunan ruas garis berarah merupakan relasi ekuivalen. Artinya, apabila diberikan $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, dan $\overrightarrow{EF}$ maka
>
> a) $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{BA}$ (sifat refleksi)
>
> b) jika $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$ maka $\overrightarrow{CD} \cong \overrightarrow{AB}$ (sifat simetri)
>
> c) jika $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$ dan $\overrightarrow{CD} \cong \overrightarrow{EF}$ maka $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{EF}$ (sifat transitif)

Bukti:

a) Namakanlah titik tengah $\overline{AB}$ dengan P maka $\sigma_P(A) = B$. Jadi, $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{BA}$.

b) Karena $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$ maka segiempat ABDC jajaran genjang. Karena segiempat CDBA = segiempat ABDC maka segiempat CDBA jajaran genjang. Akibatnya $\overrightarrow{CD} \cong \overrightarrow{AB}$.

c) Karena $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$ maka segiempat ABDC jajaran genjang. Akibat lebih lanjut AB = CD dan $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ (1)

Karena posisi $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ maka segiempat CDFE jajaran genjang. Akibat lebih lanjut CD = EF dan $\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{EF}$ (2)

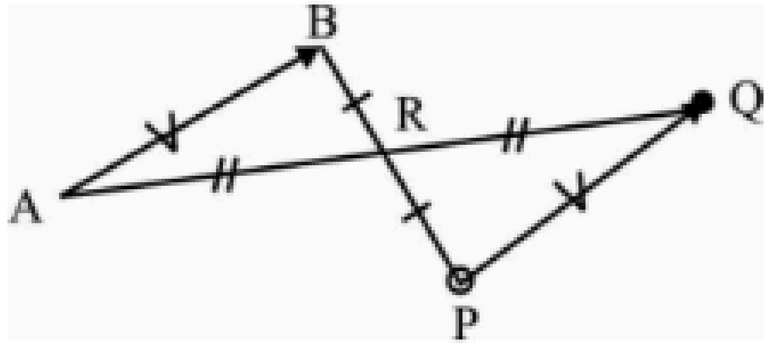
Berdasarkan (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa

AB = EF dan $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{EF}$.

Jadi, segiempat ABFE sebuah jajaran genjang. Akibatnya $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{EF}$.

Karena a), b) dan c) dapat disimpulkan bahwa relasi "$\cong$" pada himpunan ruas garis berarah merupakan relasi ekuivalen.

Teorema 3.16 Apabila diberikan titik P dan $\overrightarrow{AB}$ maka ada titik Q yang tunggal sehingga $\overrightarrow{PQ} \cong \overrightarrow{AB}$



Gambar 3.17

Bukti:

Dalam hal ini Anda harus membuktikan dua hal, yaitu

a) adanya titik Q sehingga $\overrightarrow{PQ} \cong \overrightarrow{AB}$

Misalkan R titik tengah dari BP dan Q = $\sigma_R(A)$ maka $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$.

Karena $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$, maka $\overrightarrow{PQ} \cong \overrightarrow{AB}$. Akibatnya ada Q yang memenuhi $\overrightarrow{PQ} \cong \overrightarrow{AB}$.

b) titik Q hanya ada satu, yang memenuhi $\overrightarrow{PQ} \cong \overrightarrow{AB}$.

Andaikan ada titik lain, namakanlah S sehingga $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{PS}$. Jadi, $\sigma_R(A)$ = S, tetapi Anda mengetahui bahwa $\sigma_R(A)$ = Q. Karena peta titik A oleh σ_R tunggal (ingat σ_R suatu fungsi) maka S = Q. Jadi, Q yang memenuhi $\overrightarrow{PQ} \cong \overrightarrow{AB}$ adalah tunggal.

C. KELIPATAN RUAS GARIS BERARAH

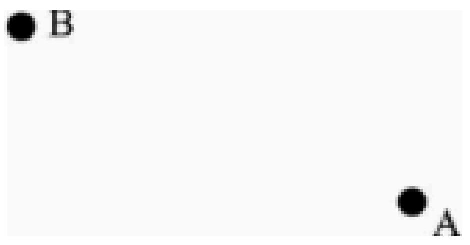
Perkalian sebuah bilangan real dengan sebuah ruas garis berarah Anda pelajari melalui Definisi 3.7.

Definisi 3.7

Andaikan diberikan $\overrightarrow{AB}$ dan k suatu bilangan real. Apabila $k > 0$ maka k $\overrightarrow{AB}$ adalah $\overrightarrow{AP}$ sehingga $P \in \overrightarrow{AB}$ dan $AP = k(AB)$. Apabila $k < 0$ maka k $\overrightarrow{AB}$ adalah $\overrightarrow{AP}$ dengan P anggota sinar yang berlawanan dengan $\overrightarrow{AB}$ sedangkan $AP = |k|AB$. Selanjutnya $\overrightarrow{AP}$ disebut kelipatan dari $\overrightarrow{AB}$.

Contoh 3.5

Apabila diberikan titik-titik A dan B seperti di bawah ini.



Gambar 3.18

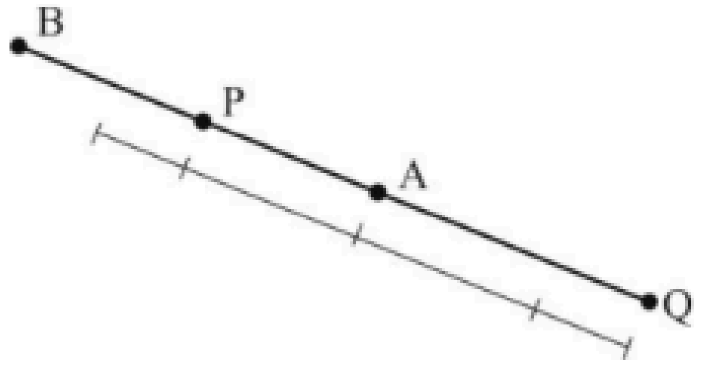
Lukis: a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

b) $-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Penyelesaian

a) Karena $k = \frac{1}{2} > 0$ maka $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ adalah $\overrightarrow{AP}$ sehingga $P \in \overrightarrow{AB}$ dengan $AP = \frac{1}{2}(AB)$.

b) Karena $k = -\frac{3}{4} < 0$ maka $-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ adalah $\overrightarrow{AQ}$ sehingga Q anggota sinar yang berlawanan dengan $\overrightarrow{AB}$, dengan $AQ = \left|-\frac{3}{4}\right| AB = \frac{3}{4} AB$.



Gambar 3.19

Dengan mempelajari uraian di atas, Anda diharapkan memperoleh gambaran yang jelas mengenai ruas garis berarah dan sifat-sifatnya.

LATIHAN SOAL

1) Diberikan titik A, B, C, dan D serta tiap tiga titik tak ada yang segaris.
Lukis: a) titik E sehingga $\overrightarrow{CE} \cong \overrightarrow{AB}$
b) titik F sehingga $\overrightarrow{DF} \cong \overrightarrow{BA}$
c) $\sigma_A(\overrightarrow{AB})$

2) Diberikan titik A, B, dan C yang tak segaris. Lukislah
a) titik D sehingga $\overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AB}$
b) titik E sehingga $\overrightarrow{AE} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$
c) titik F sehingga $\overrightarrow{CF} \cong \sqrt{2}\,\overrightarrow{AB}$

3) Buktikan bahwa apabila $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$, maka AB = CD dan $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ atau $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$.

4) Buktikan bahwa
a) Apabila $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ dan $P_3(x_3, y_3)$ titik yang diketahui, maka titik $P(x_3 + x_2 - x_1, y_3 + y_2 - y_1)$ adalah titik tunggal sehingga $\overrightarrow{P_3P} \cong \overrightarrow{P_1P_2}$.
b) Apabila $P_n(x_n, y_n)$, n = 1, 2, 3, 4 maka $\overrightarrow{P_1P_2} \cong \overrightarrow{P_3P_4}$ jika dan hanya jika $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ dan $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$.

5) Diketahui A(2, 1), B(3, –4), dan C(–1, 5). Tentukan
a) D sehingga $\overrightarrow{CD} \cong \overrightarrow{AB}$
b) E sehingga $\overrightarrow{AE} \cong \overrightarrow{BC}$
c) F sehingga $\overrightarrow{AF} \cong \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

6) Apabila A(1, 3), B(2, 7), dan C(–1, 4) titik-titik sudut jajaran genjang ABCD. Tentukan koordinat titik D.

7) Apabila A(–2, 4), B(h, 3), C(3, 0), dan D(5, k) titik-titik sudut jajaran genjang ABCD, tentukan nilai h dan k.

8) Diketahui garis g dan h sejajar. Titik $P \in g$ sedangkan titik Q tidak pada g maupun h.
a.) Lukis $P_1 = (\mu_h \circ \mu_g)(P)$ dan $Q' = (\mu_h \circ \mu_g)(Q)$
b) Buktikan bahwa $\overrightarrow{PQ} \cong \overrightarrow{P'Q'}$.

Terima Kasih