DIKTISAINTEK BERDAMPAK

GEOMETRI TRANSFORMASI

Konsep Translasi Melalui GeoGebra

Program Studi Pendidikan Matematika

Pertemuan 7

Translasi atau pergeseran adalah salah satu jenis isometri (gerak kaku) yang paling sering kita temui, bahkan dalam warisan budaya kita.

Perhatikan motif Batik Ciamis atau Tasikmalaya; pola yang berulang dan identik adalah bukti nyata dari translasi.

Definisi 4.1

Suatu relasi γ dinamakan suatu translasi apabila ada ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$ sehingga setiap titik P pada bidang V, $\gamma_{AB}(P) = P'$ dan $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AB}$. Translasi seperti ini kita tulis dengan notasi γ_{AB}.

Komponen Vektor:

Ruas garis berarah $\overline{AB}$ memiliki komponen vektor (a,b) yang menentukan jarak pergeseran pada sumbu-x (a) dan sumbu-y (b).

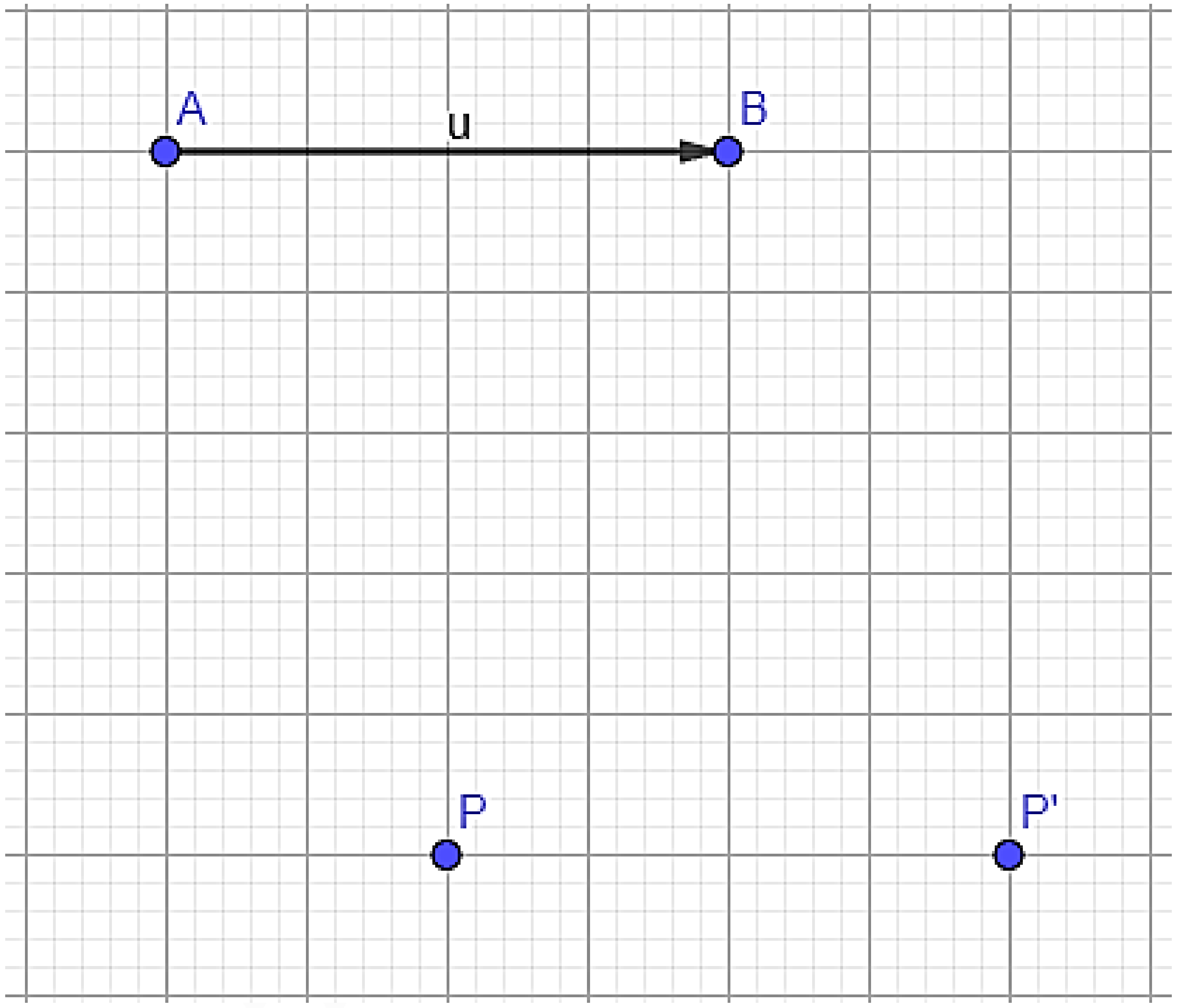
DIKTISAINTEK BERDAMPAK

Buka GeoGebra

Diberikan tiga titik A, B, dan P yang tak kolinear.

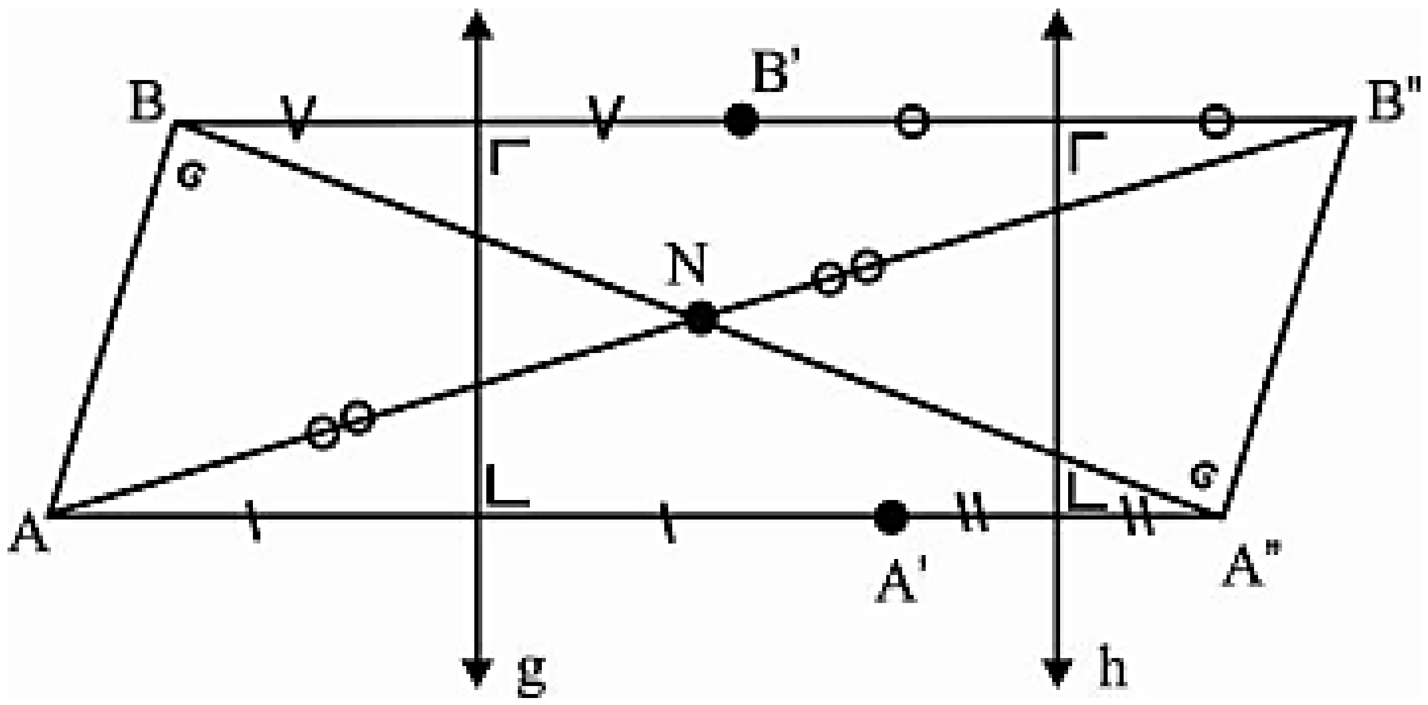
Lukislah:

titik P' sehingga $\gamma_{AB}(P) = P'$

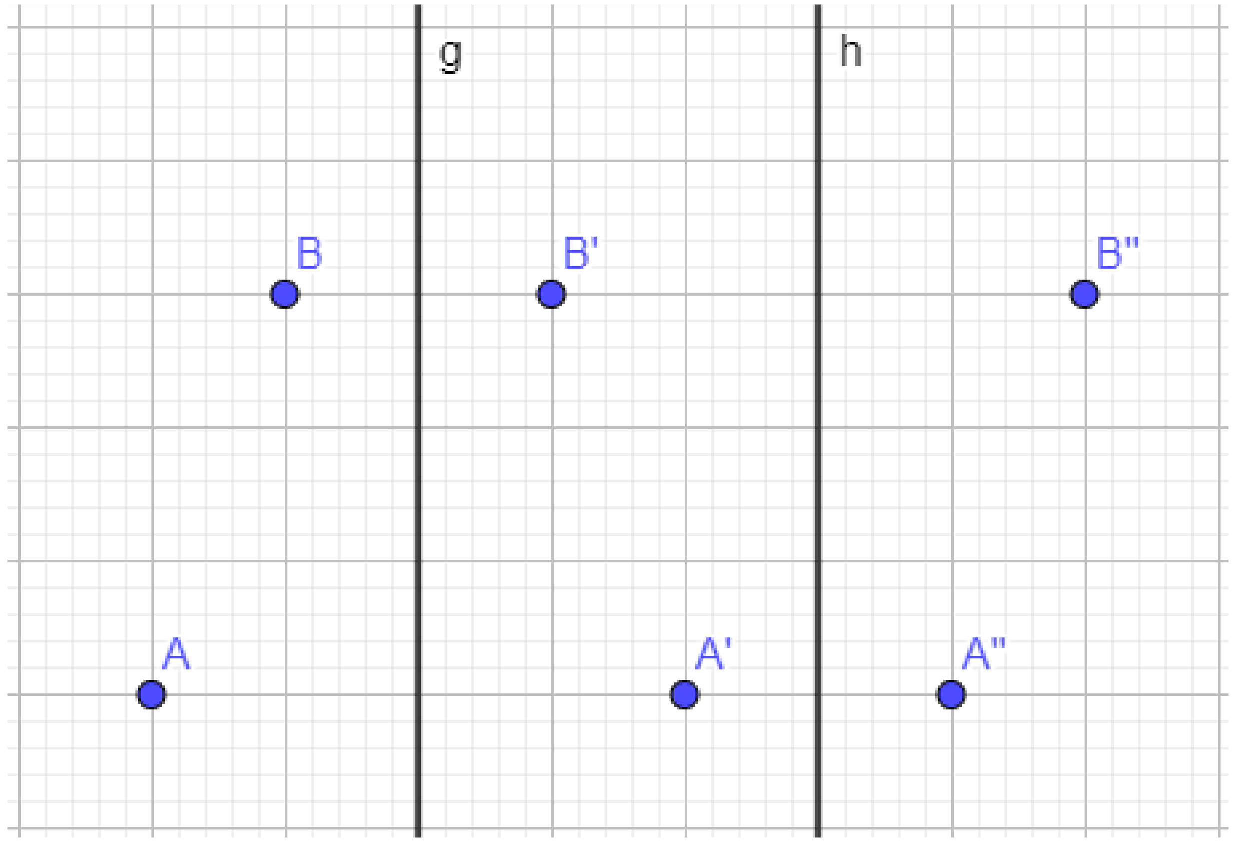


Translasi Sebagai Isometri

Teorema 4.1 Misalkan diberikan dua buah garis g dan h yang sejajar dan dua titik A dan B, maka $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''}$ dengan $A'' = (\mu_h \circ \mu_g)(A)$ dan $\overrightarrow{B''} = (\mu_h \circ \mu_g)$ (B).



Gambar 4.1



Bukti Teorema 4.1

Misalkan $A' = \mu_g(A)$, $A'' = \mu_h(A')$, maka $A'' = (\mu_h \circ \mu_g)(A)$ dan $B' = \mu_g(B)$, $B'' = \mu_g(B')$, maka $B'' = (\mu_h \circ \mu_g)(B)$ (lihat Gambar 4.1).

Akibatnya

1. $\overleftrightarrow{AA''} \perp g$, $\overleftrightarrow{AA''} \perp h$, dan $\overleftrightarrow{BB''} \perp g$, $\overleftrightarrow{BB''} \perp h$.
2. $\overleftrightarrow{AA''} // \overleftrightarrow{BB''}$
3. $AB = A''B''$, sebab $(\mu_h \circ \mu_g)$, masing-masing suatu isometri.
4. $\angle ABA'' \cong \angle B''A''B$ dan merupakan sudut lancip (sudut dalam berseberangan).

DIKTISAINTEK BERDAMPAK

Bukti Teorema 4.1

Anda perhatikan sekarang $\Delta ABA''$ dan $\Delta B''A''B$

$$AB = A''B'', \text{ akibat 3}$$

$$A''B = A''B, \text{ berhimpit}$$

$$\angle ABA'' \cong \angle B''A''B, \text{ akibat 4}$$

Dengan demikian, diperoleh $\Delta ABA'' \cong \Delta B''A''B$ (s–sd–s). Akibatnya, $AA'' = BB''$. Karena $AA'' = BB''$ dan $\overleftrightarrow{AA''} // \overleftrightarrow{BB''}$ maka segiempat $AA''B''B$ merupakan suatu jajaran genjang. Ambil N titik tengah $A''B$, akibat ini $\sigma_N(A) = B''$. Jadi, $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''}$

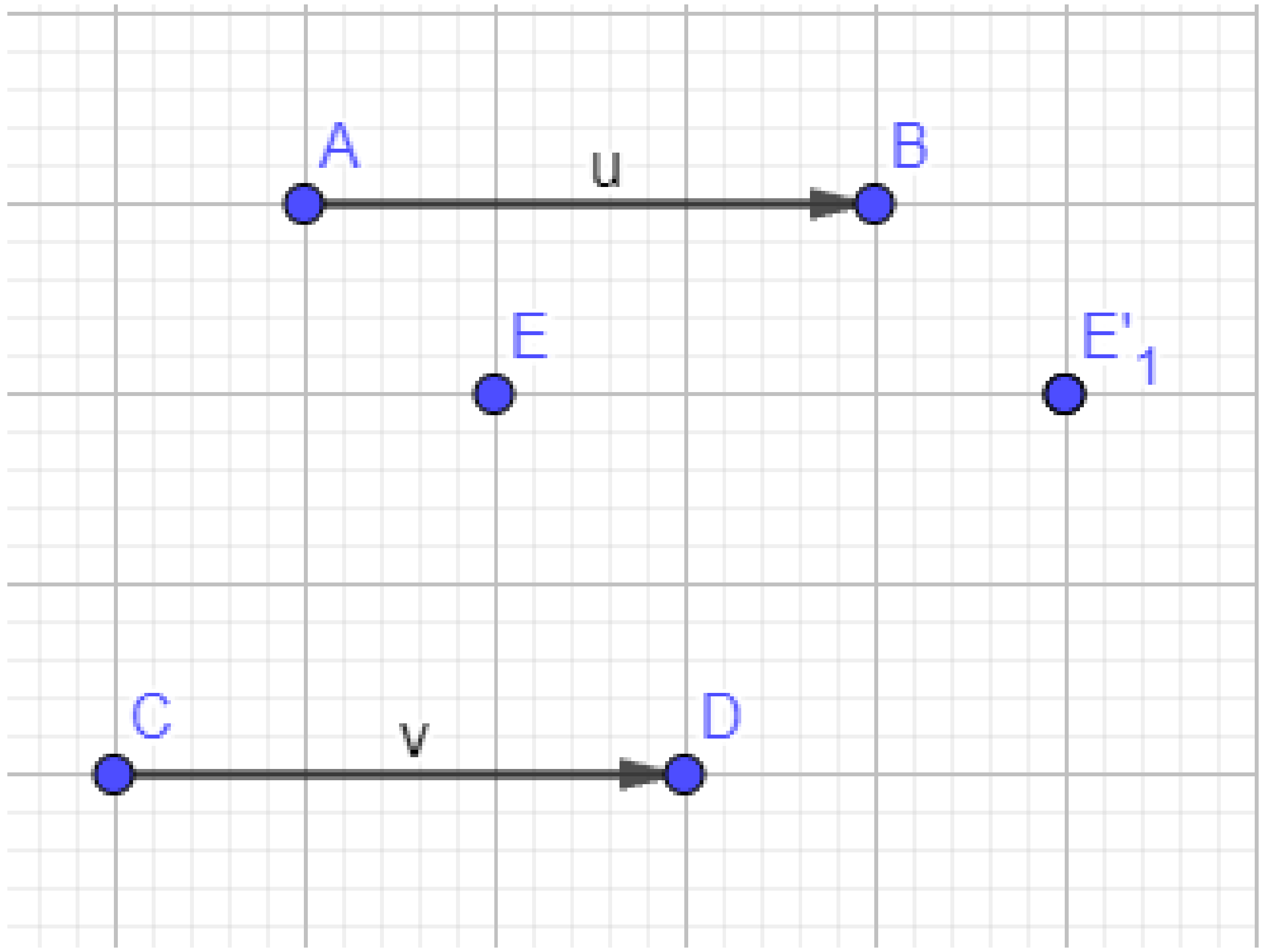
Teorema 4.2 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ jika dan hanya jika $\gamma_{AB} = \gamma_{CD}$

Bukti:

Makna dari teorema di atas adalah:

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \gamma_{AB} = \gamma_{CD}$ dan

2. $\gamma_{AB} = \gamma_{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



DIKTISAINTEK BERDAMPAK

Bukti Teorema 4.2

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \gamma_{AB} = \gamma_{CD}$

Ambil X sebarang pada *V*, harus ditunjukkan $\gamma_{AB}(X) = \gamma_{CD}(X)$.

Misalkan $X_1 = \gamma_{AB}(X)$ dan $X_2 = \gamma_{CD}(X)$. Akibatnya,

a) $\overrightarrow{XX_1} = \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{XX_2} = \overrightarrow{CD}$, tetapi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ atau $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{XX_2} = \overrightarrow{AB}$.

Hal ini berarti $\gamma_{AB}(X) = X_2$, padahal $X_2 = \gamma_{CD}(X)$. Dengan demikian, $\gamma_{AB}(X) = \gamma_{CD}(X), \forall X \in V$

Bukti Teorema 4.2

2. $\gamma_{AB} = \gamma_{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Ambil Y sebarang titik pada *V*. Misalkan $\gamma_{AB}(Y) = Y_1$ maka $\gamma_{CD}(Y) = Y_1$. Akibatnya

1) $\overrightarrow{YY_1} = \overrightarrow{AB}$ atau $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{YY_1}$

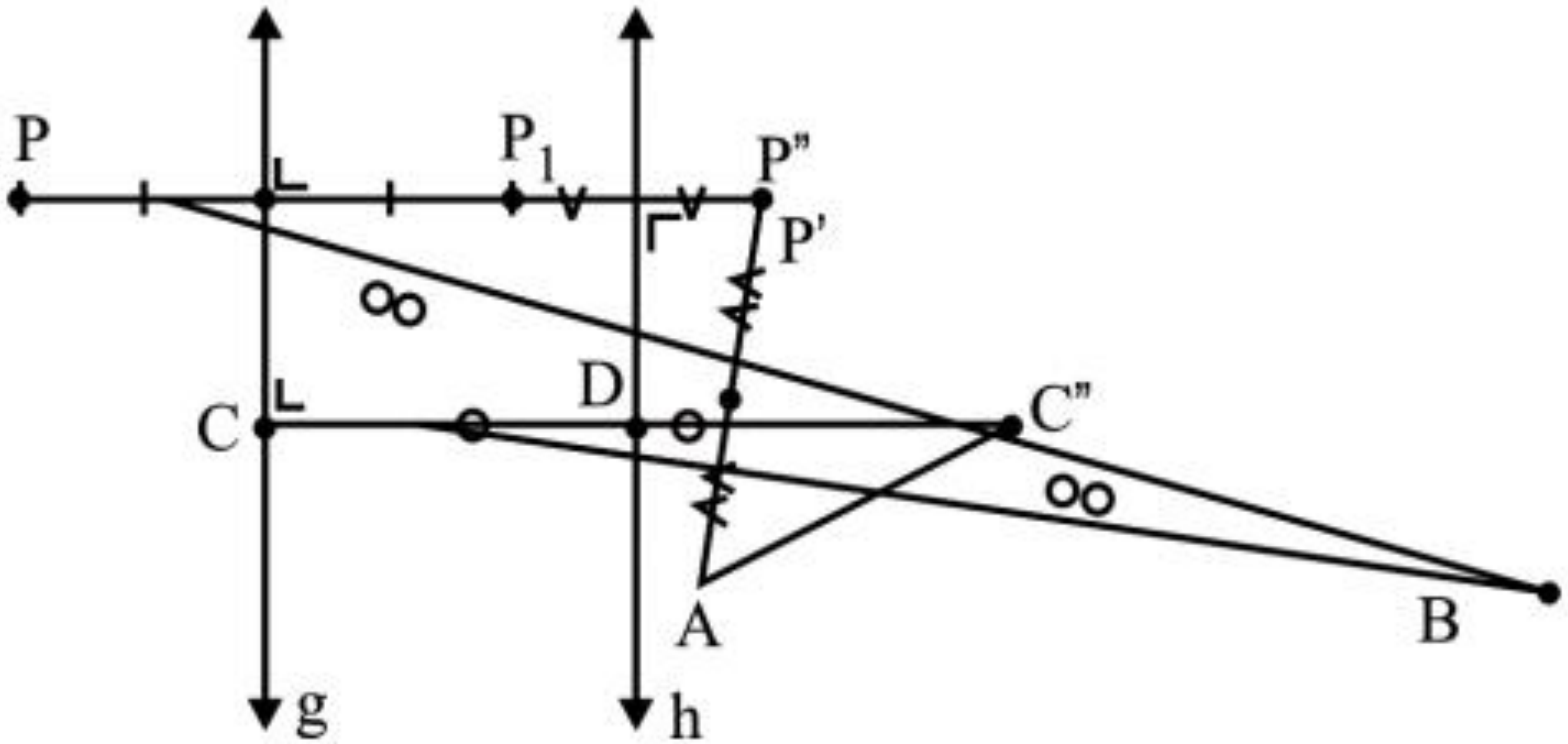
2) $\overrightarrow{YY_1} = \overrightarrow{CD}$

Berdasarkan 1) dan 2) diperoleh $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

DIKTISAINTEK
BERDAMPAK

Teorema 4.3

Apabila g // h, , $\overleftrightarrow{CD} \perp g$, $C \in g$, $D \in h$ dan $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ maka $\gamma_{AB} = \mu_h \circ \mu_g$.



Gambar 4.3

Bukti Teorema 4.3

Ambil titik sebarang $P \in V$. Misalkan $P' = \gamma_{AB}(P)$ dan $P'' = (\mu_h \circ \mu_g)(P)$. Harus ditunjukkan $P' = P''$. Perhatikan Gambar 4.3, karena $P' = \gamma_{AB}(P)$ maka $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AB}$. Tetapi diberikan $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ maka $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{CD}$. Misalkan $C'' = (\mu_h \circ \mu_g)(C)$. Karena $C \in g$ maka $C'' = \mu_h(C)$. Akibatnya, D titik tengah dari $\overrightarrow{CC''}$. Sehingga $\overrightarrow{CC''} = 2\overrightarrow{CD}$. Karena $\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{CC''}$ (Teorema 4.1) maka $\overrightarrow{PP''} = 2\overrightarrow{CD}$.

Karena $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{CD}$ dan $\overrightarrow{PP''} = 2\overrightarrow{CD}$ atau $2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{PP''}$ maka $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PP''}$.

Akibatnya $P' = P''$

Jadi, $\gamma_{AB}(P) = (\mu_h \circ \mu_g)(P), \forall P \in V$. Jadi, $\gamma_{AB} = \mu_h \circ \mu_g$

DIKTISAINTEK BERDAMPAK

Teorema 4.4 Jika γ_{AB} sebuah translasi, maka $(\gamma_{AB})^{-1} = \gamma_{BA}$

Bukti:

Perhatikan Gambar 4.4 Anda telah mengetahui bahwa $\gamma_{AB} = \mu_h \circ \mu_g = \mu_n \circ \mu_h$. Sekarang kita cari γ_{BA}. Karena $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MA}$ maka berdasarkan Teorema 4.3 diperoleh $\gamma_{BA} = \mu_g \circ \mu_h = \mu_h \circ \mu_n$.

Sehingga $(\gamma_{AB})^{-1} = (\mu_h \circ \mu_g)^{-1} = \mu_g^{-1} \circ \mu_h^{-1} = \mu_g \circ \mu_h = \gamma_{BA}$

Akibat Teorema 4.4, Anda mengetahui bahwa translasi tidak involusi.

Persamaan Translasi

Dua jemis translasi, yaitu:

1. Translasi dengan ruas garis berarah titik awal di pusat sumbu
2. Translasi dengan ruas garis berarah titik awal suatu titik sebarang.

Teorema 4.5

Apabila γ_{OA} dengan $O(0,0), A(a, b)$ dan T suatu transformasi yang ditetapkan untuk semua titik $P(x, y) \in V$ dengan rumus: $T(P) = (x + a, y + b)$ maka $T = \gamma_{OA}$.

Bukti:

Misalkan $P' = \gamma_{OA}(P)$ maka $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OA}$. Jika $P'\left(x_{p'}, y_{p'}\right)$ maka diperoleh hubungan:

$$x_{p'} - x = a - 0$$

dan $y_{p'} - y = b - 0$

Dengan demikian, $x_{p'} = x + a$ dan $y_{p'} = y + b$

Akibatnya $P'(x + a, y + b)$

Karena $T(P) = (x + a, y + b)$, $\forall P(x, y) \in V$ maka $T(P) = P' = \gamma_{OA}(P)$, $\forall P \in V$. Jadi, $T = \gamma_{OA}$.

DIKTISAINTEK
BERDAMPAK

Teorema 4.6

Jika A (a, b), B (c, d) dan P (x, y) maka
$\gamma_{AB}(P) = ((c - a) + x, (d - b) + y)$

Bukti:

Misalkan $O' = \gamma_{AB}(O)$, maka $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$. Misalkan $O'(x_0, y_0)$.

Berdasarkan pengetahuan pada ruas garis berarah didapat:

$$\left.\begin{array}{r} x_0 - 0 = c - a \\ \text{dan } y_0 - 0 = d - b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_0 = c - a \\ y_0 = d - b \end{array}$$

Dengan demikian, $O'(c-a, d-b)$.

Karena $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$ maka $\gamma_{OO'} = \gamma_{AB}$ dengan $O'(c-a, d-b)$.

Berdasarkan Teorema 4.5, Anda dapatkan
$\gamma_{AB}(P) = \gamma_{OO'}(P) = ((c - a) + x, (d - b) + y)$.

DIKTISAINTEK BERDAMPAK

Contoh:

Diberikan titik-titik $A(1,2), B(3,-1), C(-2,-3)$ dan kurva $K = \{(x, y) | y^2 = 2x - 4\}$. Tentukan:

a) titik C' sehingga $\gamma_{AB}(C) = C'$

b) titik C'' sehingga $\gamma_{AB}(C'') = C$

c) K' sehingga $K' = \gamma_{AB}(K)$

d) K'' sehingga $K = \gamma_{AB}(K'')$

DIKTISAINTEK BERDAMPAK

Penyelesaian:

a = 1, b = 2, c = 3 dan d = –1, berdasarkan Teorema 4.6 diperoleh:

$$\gamma_{AB}(P) = ((3-1)+x, (-1-2)+y), \forall P(x, y)$$
$$= (2+x, -3+y), \forall P(x, y)$$

Selanjutnya untuk:

a = 3, b = –1, c = 1 dan d = 2, berdasarkan Teorema 4.6 diperoleh:

$$\gamma_{BA}(P) = ((1-3)+x, (2+1)+y), \forall P = (x, y)$$
$$= (-2+x, 3+y), \forall P(x,y)$$

a) $C' = \gamma_{AB}(C) = \gamma_{AB}(-2,-3) = (2-2, -3-3) = (0,-6)$

DIKTISAINTEK BERDAMPAK

Penyelesaian:

b) Karena $\gamma_{AB}(C'') = C$ maka $\gamma_{BA}[\gamma_{AB}(C'')] = \gamma_{BA}(C)$.

$\Rightarrow (\gamma_{BA} \circ \gamma_{AB})(C'') = \gamma_{BA}(C) \Rightarrow \varepsilon(C'') = \gamma_{BA}(C)$

$\Rightarrow C'' = \gamma_{BA}(C) = \gamma_{BA}(-2,-3) = (-2-2, 3-3) = (-4,0)$

c) Misalkan $P(x_0, y_0) \in K$ maka $y_0^2 = 2x_0 - 4$ (1)

Misalkan $(x, y) = \gamma_{AB}(x_0, y_0) = (2 + x_0, -3 + y_0)$

maka didapat

$x_0 = x - 2$ dan $y_0 = y + 3$ (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$(y + 3)^2 = 2(x - 2) - 4$

$\Rightarrow y^2 + 6y + 9 = 2x - 4 - 4$

$\Rightarrow y^2 + 6y - 2x + 17 = 0$

Jadi, $K' = \gamma_{AB}(K) = \{(x, y) \mid y^2 + 6y - 2x + 17 = 0\}$

DIKTISAINTEK BERDAMPAK

Penyelesaian:

d) Karena $K = \gamma_{AB}\ (K'')$ maka $K'' = \gamma_{BA}\ (K)$. Misalkan $Q\ (x_1, y_1) \in K$ maka

$y_1^2 = 2x_1 - 4$, (3)

Misalkan $(x, y) = \gamma_{BA}\ (x_1, y_1) = (-2 + x_1, 3 + y_1)$, didapat

$x_1 = x + 2$ dan $y_1 = y - 3$ (4)

Dari (3) dan (4) didapat .

$(y - 3)^2 = 2\ (x + 2) - 4$

$\Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 2x + 4 - 4$

$\Rightarrow y^2 - 6y - 2x + 9 = 0$

Jadi, $K'' = \{(x.y) \mid y^2 - 6y - 2x + 9 = 0\}$

DIKTISAINTEK
BERDAMPAK

TERIMA KASIH