Peubah Acak Diskrit dan Distribusi Peluang

Peubah Acak

- Peubah Acak (Random Variable): Sebuah keluaran numerik yang merupakan hasil dari percobaan (eksperimen)
- Untuk setiap anggota dari ruang sampel percobaan, peubah acak bisa mengambil tepat satu nilai

Peubah Acak

- Peubah Acak Diskrit : Sebuah Peubah Acak yang hanya bisa bernilai terbatas atau terhitung
- Peubah Acak Kontinu: Sebuah Peubah Acak yang bisa bernilai pada sebarang nilai dalam sebuah selang

Peubah Acak

- Peubah Acak dituliskan sebagai huruf kapital (X, *Y*, *Z*)
- Nilai-nilai tertentu yang merupakan keluaran percobaan dituliskan dengan huruf kecil (x, *y*, *z*)

Distribusi Peluang

- Distribusi Peluang adalah tabel, gambar, atau persamaan yang menggambarkan atau mendeskripsikan nilai-nilai yang mungkin dari peubah acak dan peluang yang bersesuaiannya (Peubah Acak Diskrit) atau kepadatan (Peubah Acak Kontinu)

Distribusi Peluang

- Distribusi Peluang Diskrit:
  - Memberikan peluang kepada tiap keluaran percobaan
  - Merupakan probability mass functions (pmf)
- Distribusi Peluang Kontinu:
  - Memberikan kepadatan (frekuensi) pada tiap titik, peluang pada selang bisa didapatkan dengan mengintegralkan fungsi (probability density function/pdf)

Distribusi Peluang

- Peluang Diskrit dituliskan sebagai: p(*y*) = P(*Y*=*y*)
- Kepadatan Kontinu dituliskan sebagai: f(*y*)
- Fungsi Distribusi Kumulatif: F(*y*) = P(*Y*≤*y*)
- Cumulative Distribution Function (cdf)

Distribusi Peluang Diskrit (PMF)

$$\text{Probability (Mass) Function:}$$
$$p(y) = P(Y = y)$$
$$p(y) \geq 0 \quad \forall y$$
$$\sum_{\text{semua } y} p(y) = 1$$

Discrete Probability Distributions

Cumulative Distribution Function (CDF):

$$F(y)=P(Y\le y)$$

$$F(b)=P(Y\le b)=\sum_{y=-\infty}^{b} p(y)$$

$$F(-\infty)=0 \quad F(\infty)=1$$

$F(y)$ adl naik scr monoton di y

Contoh – Melempar 2 dadu (Merah/Hijau)

Y = Jumlah muka dadu yang nampak. Tabel dibawah memberikan semua nilai yang mungkin dalam himpunan S

Merah\Hijau	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Contoh – Melempar 2 dadu (Merah/Hijau)

Y = Jumlah muka dadu yang nampak. Tabel dibawah memberikan semua nilai yang mungkin dalam himpunan S

Merah\Hijau	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

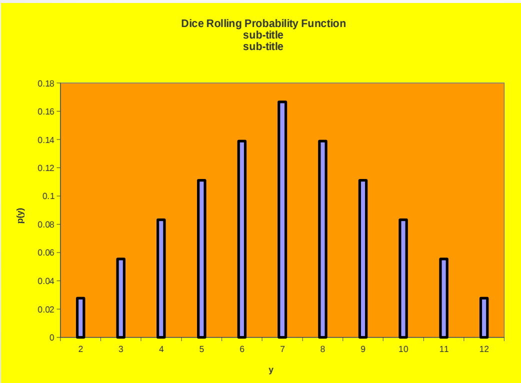
Melempar 2 Dadu – Probability Mass Function (pmf) & CDF

y	p(y)	F(y)
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/36	6/36
5	4/36	10/36
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	36/36

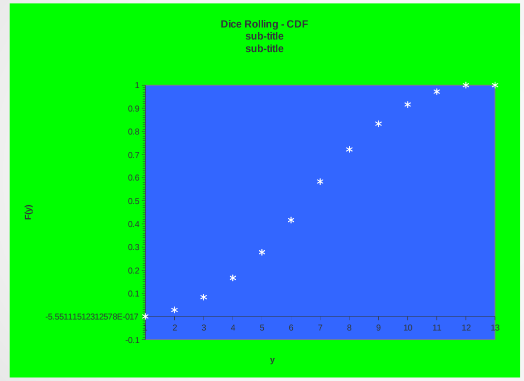
$$p(y)=\frac{\#\text{ banyak cara 2 dadu dijumlahkan sbg } y}{\#\text{ cara 2 dadu dijumlahkan}}$$

$$F(y)=\sum_{t=2}^{y} p(t)$$

Melempar 2 Dadu – Probability Mass Function (pmf)



Melempar 2 Dadu – Cumulative Distribution Function (cdf)



Nilai Harapan Peubah Acak Diskrit

- Mean (alias Nilai Harapan) – Rata-rata dari peubah acak yang diharapkan muncul dalam percobaan yang berulang-ulang.
- Varians – Rata-rata beda kuadrat antara nilai nyata dari peubah acak dan meannya
- Standard Deviasi – Akar positif dari varians (unitnya sama dengan datanya)
- Notasi:
  - Mean: E(Y) = μ
  - Varians: V(Y) = σ^2
  - Standard Deviasi: σ

Nilai Harapan

$$\text{Mean: } E(Y)=\mu=\sum_{\text{semua } y} yp(y)$$

$$\text{Mean dari fungsi } g(Y):\ E[g(Y)]=\sum_{\text{semua } y} g(y)p(y)$$

Varians dan Standard Deviasi

Varians: $V(Y)=\sigma^2=E\left[(Y-E(Y))^2\right]=E\left[(Y-\mu)^2\right]$

$$=\sum_{\text{all } y}(y-\mu)^2 p(y)=\sum_{\text{semua } y}\left(y^2-2y\mu+\mu^2\right)p(y)$$

$$=\sum_{\text{all } y} y^2 p(y)-2\mu\sum_{\text{semua } y} yp(y)+\mu^2\sum_{\text{semua } y} p(y)$$

$$=E\left[Y^2\right]-2\mu(\mu)+\mu^2(1)=E\left[Y^2\right]-\mu^2$$

Standard Deviasi: $\sigma=+\sqrt{\sigma^2}$

Nilai Harapan dari Fungsi Linear Peubah Acak

Fungsi Linear: $g(Y)=aY+b \quad (a,b\equiv \text{konstan})$

$$E[aY+b]=\sum_{\text{all } y}(ay+b)p(y)=$$

$$=a\sum_{\text{all } y} yp(y)+b\sum_{\text{all } y} p(y)=a\mu+b$$

Varians dan Standard Deviasi dari Fungsi Linear Peubah Acak

Fungsi Linear : $g(Y)=aY+b \quad (a,b\equiv \text{konstan})$

$$V[aY+b]=\sum_{\text{all } y}\left((ay+b)-(a\mu+b)\right)^2 p(y)=$$

$$\sum_{\text{all } y}(ay-a\mu)^2 p(y)=\sum_{\text{all } y}\left[a^2(y-\mu)^2\right]p(y)=$$

$$=a^2\sum_{\text{all } y}(y-\mu)^2 p(y)=a^2\sigma^2$$

$$\sigma_{aY+b}=|a|\sigma$$

Contoh – Melempar 2 Dadu

$$\mu=E(Y)=\sum_{y=2}^{12} yp(y)=7.0$$

$$\sigma^2=E\left[Y^2\right]-\mu^2=\sum_{y=2}^{12} y^2 p(y)-\mu^2$$

$$=54.8333-(7.0)^2=5.8333$$

$$\sigma=\sqrt{5.8333}=2.4152$$

Definisi: Bernoulli

Percobaan Bernoulli: Hanya terdapat satu kali percobaan dengan peluang sukses *p* dan peluang gagal *1-p*

Peluang Sukses: $P(X=1)=\binom{1}{1}p^1(1-p)^{1-1}=p$

Peluang Gagal: $P(X=0)=\binom{1}{0}p^0(1-p)^{1-0}=1-p$

Perilaku Distribusi Bernoulli

$E(Y) = p$

$Var\ (Y) = p(1-p)$

$$\begin{aligned} Var(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\ &= [1^2 p + 0^2(1-p)] - [1p + 0(1-p)]^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

Contoh Binomial

Melempar koin sebanyak 5 kali. Berapa peluang mendapatkan tepat 3 kepala?

Catatan:

- Percobaan Diskrit
- Mempunyai keluaran biner (ya dan tidak atau 1 dan 0)
- mempunyai peluang yang sama tiap kali lemparan

Contoh Binomial

Penyelesaian:

Satu cara mendapat tepat 3 kepala: HHHTT

Peluangnya adalah:

P(heads)xP(heads) xP(heads)xP(tails)xP(tails) $=(1/2)^3 \times (1/2)^2$

Cara lain mendapatkan tepat 3 kepala: THHHT

Peluangnya = $(1/2)^1 \times (1/2)^3 \times (1/2)^1 = (1/2)^3 \times (1/2)^2$

Contoh Binomial

Jadi, $(1/2)^3$ *x* $(1/2)^2$ merupakan peluang untuk mendapatkan tepat 3 kepala dan 2 ekor

Sehingga, peluang untuk mendapat 3 kepala dan 2 ekor (sejauh yang kita dapat sekarang) adalah:

$1/2)^3 \; x \; (1/2)^2 + (1/2)^3 \; x \; (1/2)^2 + (1/2)^3 \; x \; (1/2)^2 + \ldots..$

Namun, terdapat lebih dari satu cara mendapatkan 3 kepala dan 2 ekor.

Ada berapa cara untuk mengambil tepat 3 kepala dari 5 kali lemparan?

Contoh Binomial

Keluaran	Peluang
THHHT	$(1/2)^3 \; x \; (1/2)^2$
HHHTT	$(1/2)^3 \; x \; (1/2)^2$
TTHHH	$(1/2)^3 \; x \; (1/2)^2$
HTTHH	$(1/2)^3 \; x \; (1/2)^2$
HHTTH	$(1/2)^3 \; x \; (1/2)^2$
HTHHT	$(1/2)^3 \; x \; (1/2)^2$
THTHH	$(1/2)^3 \; x \; (1/2)^2$
HTHTH	$(1/2)^3 \; x \; (1/2)^2$
HHTHT	$(1/2)^3 \; x \; (1/2)^2$
THHTH	$(1/2)^3 \; x \; (1/2)^2$
HTHHT	$(1/2)^3 \; x \; (1/2)^2$

10 pengaturan $x \; (1/2)^3 \; x \; (1/2)^2$

$\binom{5}{3}$ cara untuk mengambil 3 kepala dalam 5 percobaan

${}_5C_3 = 5!/3!2! = 10$

Peluang dari tiap cara yang unik

Cat: peluangnya sama

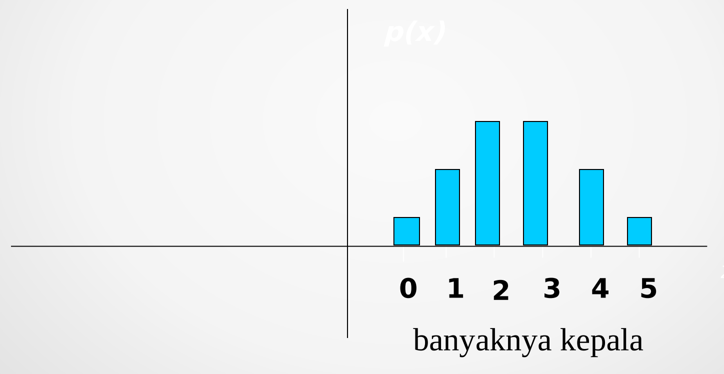
$\therefore$ **P(3 kepala dan 2 ekor)** $= \binom{5}{3} \; x \; P(heads)^3 \; x \; P(tails)^2 =$

$10 \; x \; (½)^5 = 31.25\%$

Atau lihat tabel Binomial

Binomial distribution function:

X= banyaknya keluar kepala dari 5 kali percobaan



Distribusi Peluang Binomial

- Banyak yang tepat dari sejumlah observasi (percobaan), *n*
  - Contoh: koin dilempar 15 kali, 20 pasien, 1000 orang yang ikut survei
- Peubah Acak Biner
  - Contoh: kepala atau ekor, sembuh atau tidak sembuh, laki atau perempuan
  - Secara umum disebut “sukses” atau “gagal”
  - Peluang sukses adalah p, peluang gagal adalah 1 – p
- Untuk setiap observasi percobaan adalah konstan
  - Contoh: peluang mendapatkan kepala adalah sama untuk tiap percobaan

Distribusi Binomial, secara umum

Bentuk umum dari distribusi Binomial adalah:

n = banyak percobaan

$$\binom{n}{X} p^X (1-p)^{n-X}$$

X = # banyak sukses dari n percobaan

p = peluang sukses

1-p = peluang gagal

Definisi: Binomial

- **Binomial:** Misal terdapat *n* percobaan yang saling bebas, dan tiap percobaan menghasilkan sebuah sukses dengan peluang *p* dan gagal dengan peluang *1-p*. Jika total banyaknya sukses, *X*, merupakan peubah acak Binomial dengan parameter *n* dan *p*.
- Penulisannya adalah: ***X ~ Bin (n, p)*** *{dibaca: “X berdistribusi binomial dengan parameter n dan p}*
- Dan peluang bahwa *X=r* (i.e., terdapat tepat r sukses) adalah:

$$P(X=r)=\binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

Definisi: Binomial

Jika *X* mengikuti distribusi binomial dengan parameter *n* dan *p*: ***X ~ Bin (n, p)***

Maka:

$\mu_x = E(X) = np$

$\sigma_x^2 = Var(X) = np(1-p)$

$\sigma_x = SD(X) = \sqrt{np(1-p)}$

catatan: varians akan berada antara

0*N - 0.25 *N

p(1-p) mencapai maks saat p=.5

P(1-p)=.25

Definisi: Binomial

Untuk

X~Bin(N,p)

$$X=\sum_{i=1}^{n} Y_{Bernoulli}; Var(Y)=p(1-p)$$

$$¿\, Var(X)=Var\left(\sum_{i=1}^{n} Y\right)=\sum_{i=1}^{n} Var(Y)=np(1-p)$$