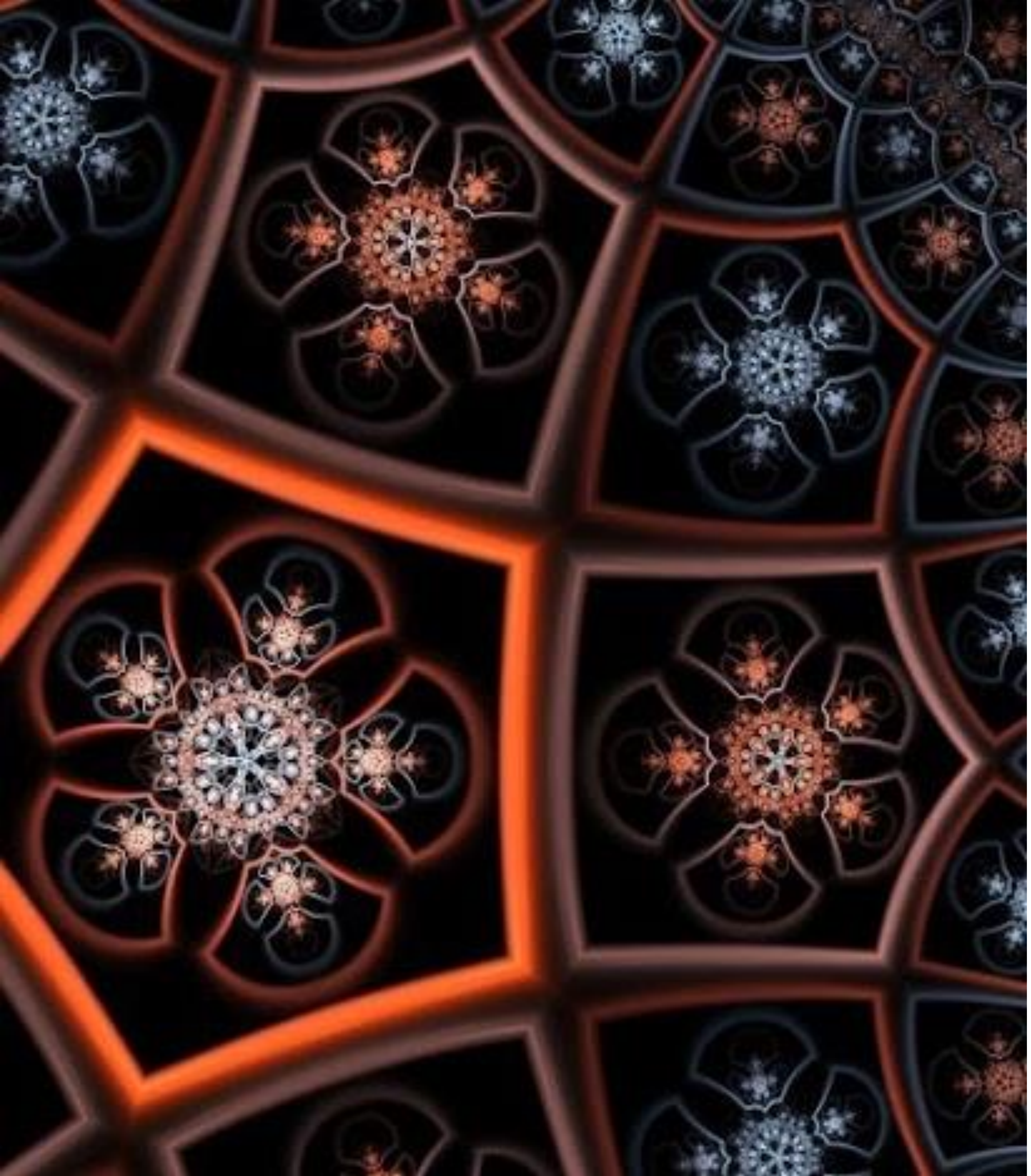


Pembelajaran
Digital Kolaboratif

PEMBELAJARAN DIGITAL KOLABORATIF
GEOMETRI TRANSFORMASI
UNIVERSITAS GALUH – UNIVERSITAS SILIWANGI

DILATASI
(Pertemuan-13)
20 November 2025

Dosen: Dr. Eko Yulianto

Pengantar

Pada topik isometri, pembicaraan kita tidak lepas dari pencerminan sebab pencerminan merupakan topik dasar untuk membangun isometri yang lainnya, seperti translasi, rotasi, dan refleksi geser. Teorema utamanya menyatakan bahwa setiap isometri dapat dibentuk paling banyak oleh komposisi dari tiga pencerminan. Bagaimana tentang kesebangunan? Apakah ada topik dasar yang digunakan untuk membuat kesebangunan? Tentu saja ada. Hal tersebut akan kita pelajari berikut ini.

Definisi

Diketahui, sebuah titik A dan bilangan positif r. Pemetaan yang berpusat A dengan faktor skala r disebut dilatasi (dinotasikan $D_{A,r}$) jika dan hanya jika untuk setiap titik P di v berlaku:

a) jika $P = A$ maka $D_{A,r}(P) = A$

b) jika $P \neq A$ maka $D_{A,r}(P) = P'$ dengan P' adalah titik pada sinar $\overrightarrow{AP}$ sehingga $\overrightarrow{AP'} = r(\overrightarrow{AP})$. Pernyataan ini ekuivalen dengan P', yaitu titik yang mengakibatkan $\overrightarrow{AP'} = r(\overrightarrow{AP})$.

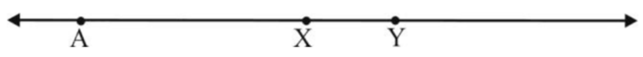
- Dari definisi tersebut, setiap titik A dan bilangan positif r yang diketahui akan selalu ada sebuah dilatasi yang dinotasikan dengan $D_{A,r}$
- Mungkin Anda bertanya, apakah dilatasi merupakan transformasi? Jawabnya benar bahwa dilatasi merupakan suatu transformasi. Untuk menunjukkannya, kita lakukan dengan cara memperlihatkan bahwa $D_{A,r}$ surjektif dan $D_{A,r}$ injektif.

1. Memperlihatkan $D_{A,r}$ Surjektif

Untuk memperlihatkan bahwa $D_{A,r}$ surjektif, kita harus memperlihatkan bahwa setiap titik pada bidang mempunyai tepat satu peta oleh dilatasi $D_{A,r}$. Ambil $Y \in V$. Harus diperlihatkan bahwa Y mempunyai prapeta. Misalkan $X \in \overrightarrow{AY}$ sehingga $AX = \frac{1}{r}(AY)$. Dengan menggunakan definisi dilatasi $D_{A,r}$, bila X' peta dari X maka $D_{A,r}(X) = X'$. Jadi, $AX' = r(AX)$.

$$AX' = r\left(\frac{1}{r}AY\right) \text{ atau } AX' = AY.$$

Karena A, X', dan Y segaris maka $X' = Y$.

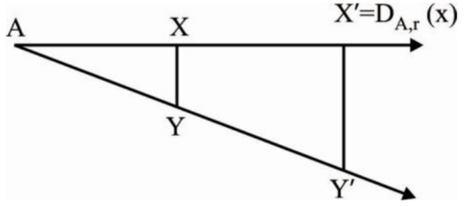


Gambar 8.7

Maka itu, kita memperoleh $D_{A,r}(X) = Y$. Ini berarti Y memiliki prapeta, yaitu X. Jadi, $D_{A,r}$ adalah surjektif.

2. Menunjukkan $D_{A,r}$ Injektif

Ambil X dan Y dua titik di v dengan $X \neq Y$. Harus dibuktikan bahwa $D_{A,r}(X) \neq D_{A,r}(Y)$. Andaikan $X' = Y'$ dengan $X' = D_{A,r}(X)$ dan $Y' = D_{A,r}(Y)$. $X'Y' = 0$ (sebab $X' = Y'$). Menurut definisi dilatasi, $X'Y' = r(XY)$. Karena $X'Y' = 0$ maka $r(XY) = 0$ atau $XY = 0$. Hal ini disebabkan $r \neq 0$. Ini berakibat $X = Y$ (kontradiksi dengan yang kita ambil, yaitu $X \neq Y$). Jadi, pengandaian bahwa $X' = Y'$ tidak benar. Oleh karena itu, haruslah $X' \neq Y'$ atau $D_{A,r}(X) \neq D_{A,r}(Y)$. Jadi, $D_{A,r}$ injektif. Karena $D_{A,r}$ surjektif dan injektif maka $D_{A,r}$ adalah transformasi.

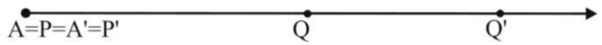


❖ Sifat-sifat Dilatasi

Sifat dilatasi berikutnya yang akan kita pelajari adalah kesebangunan. Untuk memperlihatkan hal tersebut, ambillah dua titik sebarang di bidang, misalnya P dan Q. Harus diperlihatkan $P'Q' = r(PQ)$ dengan $r > 0$, $P' = D_{A,r}(P)$ dan $Q' = D_{A,r}(Q)$.

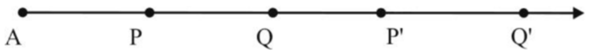
Berikut ini, ada beberapa kasus yang mungkin terjadi.

1) Salah satu titik merupakan pusat dilatasi.
Misalnya, $P = A$, $Q \neq A$ (ini sama dengan $Q = A$, $P \neq A$). $P' = A' = A$ dan $Q' = D_{A,r}(Q)$ sehingga $P'Q' = AQ' = r(AQ) = r(PQ)$.



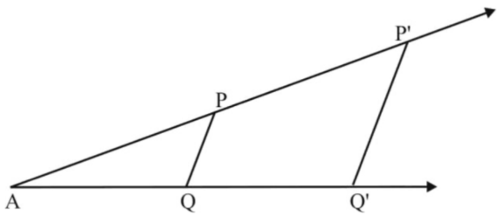
2) $P \neq A$ dan $Q \in \overrightarrow{AP}$
Andaikan P antara A dan Q, menurut aksioma urutan, $AP + PQ = AQ$. Dari persamaan tersebut, kita memperoleh hubungan bahwa $AP < AQ$. Karena $r > 0$, pertidaksamaan di atas bisa diubah menjadi:

$r(AP) < r(AQ)$ atau $AP' < AQ'$. Mengapa?



Berdasarkan teorema urutan, P' terletak di antara A dan Q' sehingga
$P'Q' = AQ' - AP'$ (lihat gambar!)
$P'Q' = r(AQ) - r(AP) = r(AQ - AP) = r(PQ)$.
Anda cobalah mengerjakan soal bila Q terletak di antara A dan P. Apakah akan diperoleh $P'Q' = r(PQ)$?

3) A,P, dan Q tak segaris. Untuk kasus ini, kita tentukan dahulu peta-peta titik A, P, dan Q, yaitu $D_{A,r}(A) = A'$, $D_{A,r}(P) = P'$, dan $D_{A,r}(Q) = Q'$, sehingga $AP' = r(AP)$ dan $AQ' = r(AQ)$.



Kita bentuk perbandingan berikut $\frac{AP'}{AP} = \frac{AQ'}{AQ} = r$.

Dengan menggunakan teorema kesebangunan (s, sd, s), $\Delta AP'Q' \approx \Delta APQ$. Akibat kesebangunan tersebut, sisi-sisi kedua segitiga yang seletak adalah sebanding. Sehingga kita peroleh:

$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{AP'}{AP} = r$ atau $\frac{P'Q'}{PQ} = r$ atau $P'Q' = r(PQ)$.

Karena titik P dan Q yang diambil di atas sebarang, berarti berlaku $P'Q' = r(PQ)$ untuk semua titik P dan Q pada bidang. Jadi, $D_{A,r}$ adalah kesebangunan.

Berdasarkan uraian di atas, terbuktilah teorema pertama bahwa ***setiap dilatasi adalah kesebangunan***

❖ Teorema 1

Karena kesebangunan memetakan garis menjadi garis serta mengekalkan kesejajaran dan ketegaklurusan, berarti dilatasi juga mempunyai sifat tersebut. Selain itu, dilatasi mempunyai sifat seperti pada teorema berikut.

Jika s garis dan s' peta garis s oleh dilatasi $D_{A,r}$ maka:
a) $s' = s$, jika A elemen s
b) $s' // s$, jika A bukan elemen s

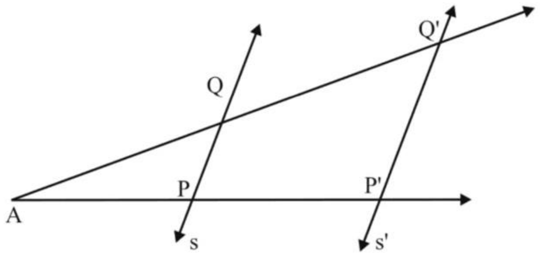
Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $s \subseteq s'$ dan $s' \subseteq s$

a) Jika $A \in s$ (pusat dilatasi pada s)
Ambil $X \in s$. Maka, ada $Y \in s$ sehingga $AX = r(AY)$. Akibatnya, menurut definisi dilatasi, $D_{A,r}(Y) = X$. Karena $Y \in s$ maka $D_{A,r}(Y) \in D_{A,r}(s) = s'$. Jadi, $X \in s'$. Dengan mengambil $X \in s$, kita berhasil membuktikan $X \in s'$ yang berarti $s \subseteq s'$.

Ambil $X \in s' = D_{A,r}(s)$. Maka, ada $Y \in s$ sehingga $D_{A,r}(Y) = X$. Ini berarti $AX = r(AY)$ dan X, A, Y segaris. Karena $A \in s$ dan $Y \in s$ maka $X \in s$. Jadi, $s' \subseteq s$. Karena $s \subseteq s'$ dan $s' \subseteq s$ maka $s' = s$.

b) Jika $A \notin s$.
Ambil $P \in s$ dan $Q \in s$ dengan $P \neq Q$.
$D_{A,r}(P) = P'$ sehingga $AP' = r(AP)$.
$D_{A,r}(Q) = Q'$ sehingga $AQ' = r(AQ)$. Kita bentuk perbandingan berikut.
$\frac{AP'}{AP} = \frac{AQ'}{AQ} = r$.



Menurut teorema kesebangunan, $\Delta APQ \approx \Delta AP'Q'$ (s, sd, s). Akibatnya, $\angle APQ \cong \angle AP'Q'$ atau $s // \overleftrightarrow{P'Q'}$. Karena $P \in s$ dan $Q \in s$ maka $P' \in s'$ dan $Q' \in s'$. Yang melalui titik P' dan Q' hanya ada sebuah garis, yaitu $s' = \overleftrightarrow{P'Q'}$ sehingga $s // \overleftrightarrow{P'Q'} = s'$. Jadi, $s // s'$.

❖ Contoh 1

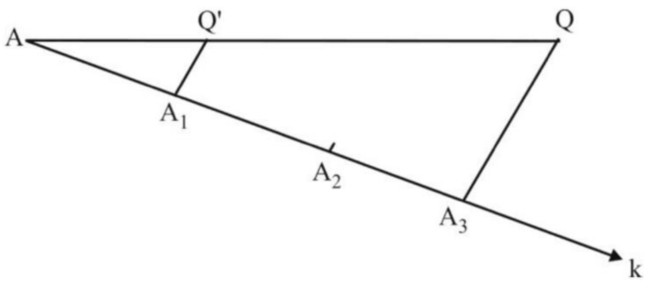
Diketahui titik-titik A, P, dan Q yang tak segaris.
Lukislah $D_{A,1/3}(Q)$!

Penyelesaian:

Misalkan $D_{A,1/3}(Q) = Q'$ sehingga $AQ' = \frac{1}{3}AQ$.

Cara melukisnya:

1) Buat $\overline{AQ}$ (panjangnya disesuaikan keperluan).
2) Buat garis k melalui A tidak berimpit dengan $\overline{AQ}$.
3) Pada garis k buat tiga buah titik dengan skala yang sama, yaitu A_1, A_2, dan A_3.
4) Hubungkan A_3 dengan Q.
5) Buat $\overline{A_1Q'}$ sejajar dengan $\overline{A_3Q}$.



❖ Contoh 2

Jika O(0, 0) dan B(2, 5), tentukan koordinat $B' = D_{O,3}(B)$!

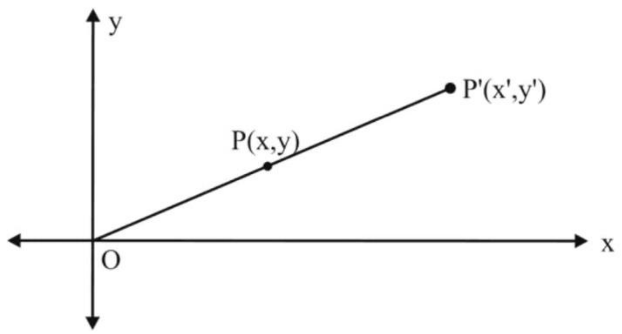
Penyelesaian:

Menurut definisi dilatasi, bila $D_{0,3}(B) = B'$ maka $OB' = 3(OB)$. Karena O(0, 0), B(2, 5), dan misalkan $B'(x', y')$ maka $OB' = 3(OB)$ atau $(x' - 0, y' - 0) = 3(2 - 0, 5 - 0)$ atau $(x', y') = 3(2, 5)$. Sehingga kita peroleh $x' = 6$ dan $y' = 15$. Jadi, koordinat $B'(6, 15)$.

❖ KOMPOSISI DILATASI

Pada pembicaraan mengenai isometri, kita telah membahas komposisi-komposisi antardua isometri atau lebih. Kita tahu bahwa isometri-isometri tersebut merupakan transformasi. Kita telah membuktikan bahwa dilatasi merupakan transformasi. Oleh karena itu, pada dilatasi, kita dapat membuat komposisi-komposisi, baik dengan dilatasi itu sendiri maupun dengan jenis transformasi (isometri) yang pada komposisi tersebut memuat satu dilatasi atau lebih. Manfaat utama komposisi tersebut di antaranya untuk menentukan koordinat peta suatu titik oleh dilatasi tertentu.

Bagaimana caranya menentukan peta titik P(x, y) oleh suatu dilatasi dengan pusat O(0, 0) dan faktor skala r? Misalnya, peta P(x, y) adalah $P'(x', y')$ dan $D_{O,r}(P) = P'$ maka $OP' = r(OP)$ atau $OP' = r(OP) = (x' - 0, y' - 0) = r(x - 0, y - 0)$ atau $(x', y') = r(x, y)$. Dari persamaan tersebut, kita memperoleh $x' = rx$ dan $y' = ry$. Jadi, koordinat titik $P'(rx, ry)$. Maka itu, $D_{O,r}(P) = D_{O,r}(x,y) = (rx, ry)$ untuk setiap P(x, y).

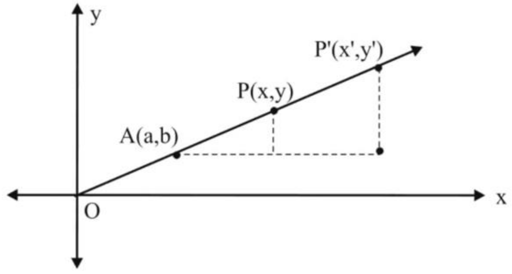


Bila pusat dilatasinya adalah A(a, b) dan faktor skala adalah r, $D_{A,r}$ dapat dibentuk menjadi komposisi antara translasi dan dilatasi sebagai berikut.

$$D_{A,r} = \gamma_{OA} D_{O,r} \gamma_{AO}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} D_{A,r}(P) &= \gamma_{OA} D_{O,r} \gamma_{AO}(P) \\ &= \gamma_{OA}\, D_{O,r}[\gamma_{AO}(x, y)] \\ &= \gamma_{OA}(D_{O,r}(x - a, y - b)) \\ &= \gamma_{OA}(r(x - a), r(y - b)) \\ &= (r(x - a) + a, r(y - b)+b) \\ &= ((rx + a(1 - r), ry + b(1 - r)) \end{aligned}$$



❖ TEOREMA 2

Jika $D_{A,r}$ adalah dilatasi dengan pusat $A(a, b)$ dan faktor skala r maka untuk $P(x, y)$ sebarang titik di bidang, berlaku $D_{A,r}(P) = \big((rx + a(1 - r), (ry + b(1 - r)\big)$

Diketahui, padanan T yang memetakan P(x, y) pada titik $P' = T(P) = (rx + c, ry + d)$ dengan $r > 0$ dan $r \neq 1$. Maka, padanan T tersebut adalah suatu dilatasi. Untuk menentukan pusat dilatasi tersebut, kita ubah c dan d menjadi $c = \frac{c}{1-r}\,1-r$ dan $d = \frac{d}{1-r}\,1-r$. Dengan demikian, $T(P) = \left(rx + \frac{c}{1-r}(1-r), ry + \frac{d}{1-r}(1-r)\right)$. Berdasarkan Teorema 8.6, pusat dilatasi T adalah $\left(\frac{c}{1-r}, \frac{d}{1-r}\right)$.

Sebagai lanjutan penggunaan teorema di atas, berikut ini akan diperlihatkan komposisi dua dilatasi. Pada umumnya, hasil komposisi dua dilatasi adalah sebuah dilatasi, kecuali bila syarat tertentunya tidak dipenuhi (yaitu jika perkalian faktor skalanya sama dengan satu) maka komposisi dua dilatasi adalah translasi.

❖ Contoh 3

Diketahui A(1, 3) dan P(x_0, y_0) adalah titik sebarang. Tentukan koordinat P′ = $D_{A,\frac{3}{4}}$ (P)!

Penyelesaian

Andaikan P′(x′, y′) maka (x′, y′) = $D_{A,\frac{3}{4}}(x_0, y_0)$

$$= \left(\frac{3}{4}x_0 + 1\left(1 - \frac{3}{4}\right), \frac{3}{4}y_0 + 3\left(1 - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{3}{4}x_0 + \frac{1}{4}, \frac{3}{4}y_0 + \frac{3}{4}\right)$$

❖ Contoh 4

Jika s = [(x, y)|2x + y = 8], tentukan persamaan s′ = $D_{A,\frac{4}{3}}$(s) dengan A(1, 3)!

Penyelesaian

Andaikan (x_0, y_0) ∈ s maka $2x_0 + y_0 = 8$ .... (i)

$$D_{A,\frac{4}{3}}(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{3}x_0 + 1\left(1 - \frac{4}{3}\right), \frac{4}{3}y_0 + 3\left(1 - \frac{4}{3}\right)\right) = x', \ y'$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}x_0 - \frac{1}{3}, \frac{4}{3}y_0 - 1\right) = x', \ y'$$

Diperoleh $x_0 = \dfrac{1 + 3x'}{4}$ dan $y_0 = \dfrac{3 + 3y'}{4}$ .... (ii)

Dari (i) dan (ii), didapat: $2\left(\dfrac{1 + 3x'}{4}\right) + \dfrac{3 + 3y'}{4} = 8$

$$\Leftrightarrow 6x' + 3y' = 27$$

$$\Leftrightarrow 2x' + y' = 9$$

Jadi, s′ = {(x, y) | 2x + y = 9}.