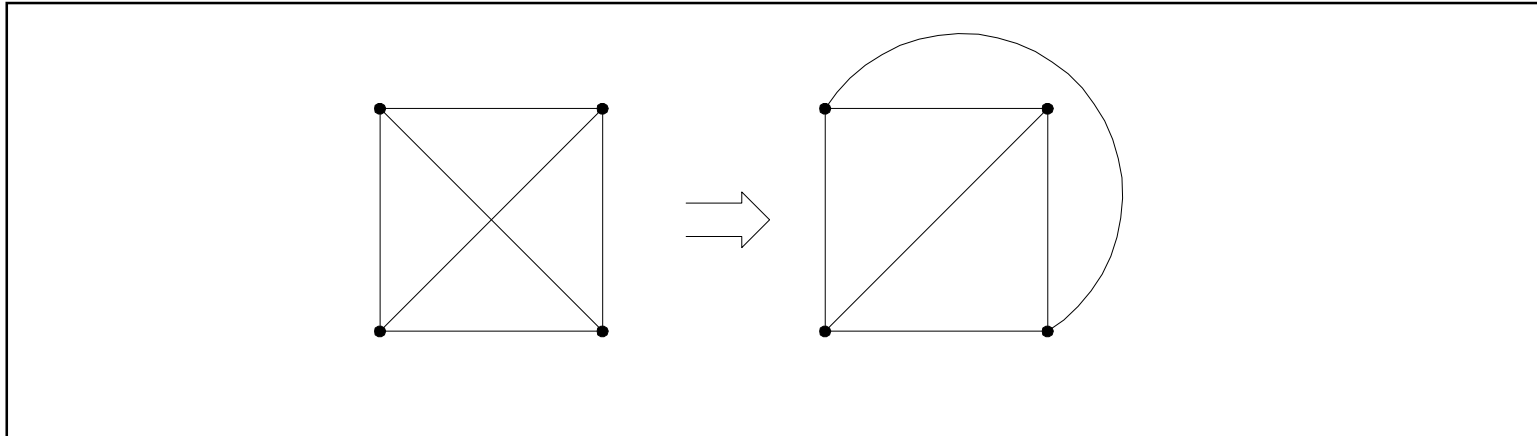


Graf Planar dan Graf Bidang

Graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong disebut sebagai **graf planar**, jika tidak, ia disebut **graf tak-planar**.

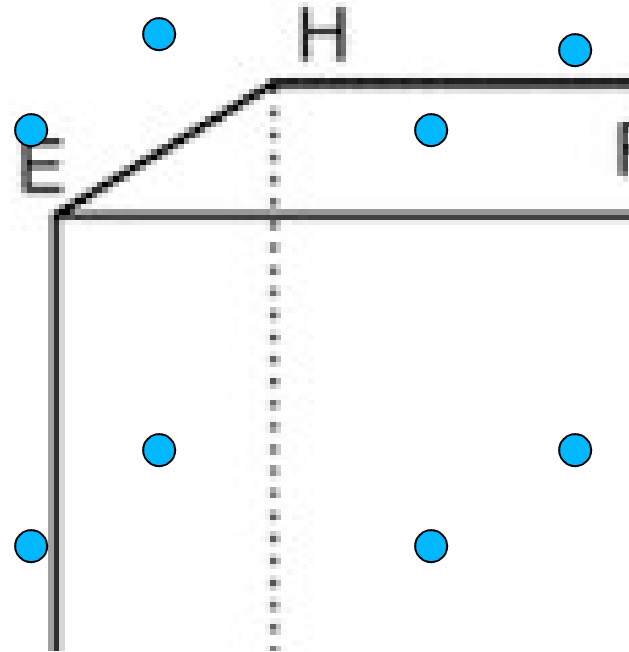
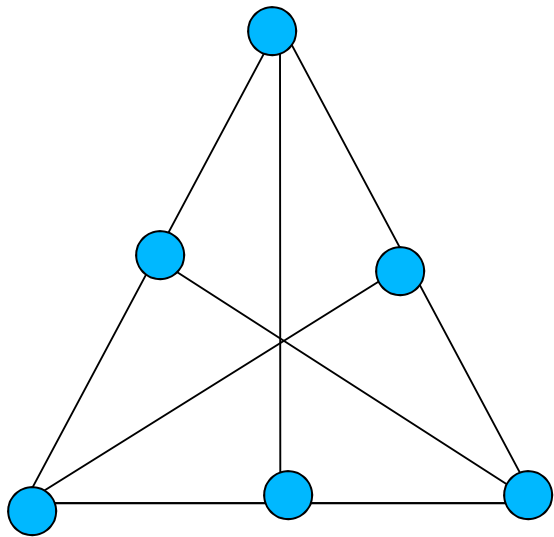
Contoh



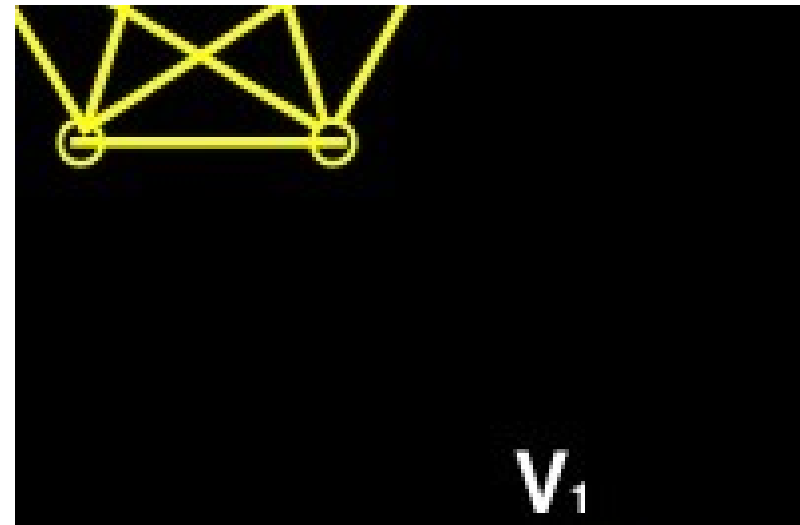
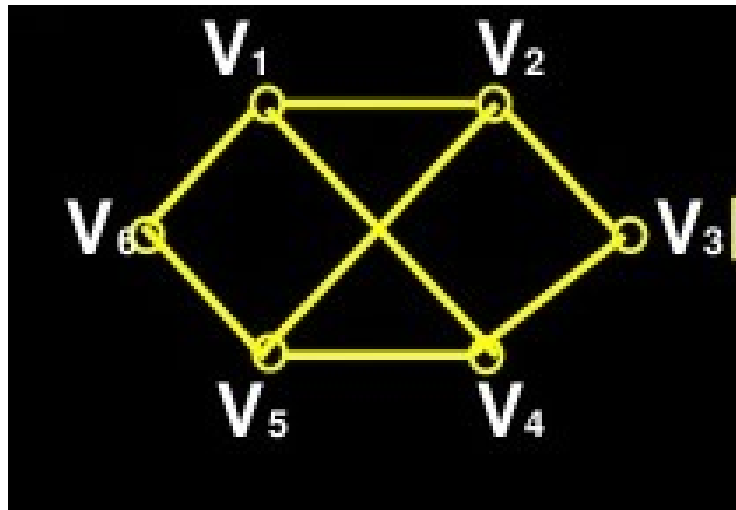
K_4 adalah graf planar

Apakah graf K_5 merupakan graf planar?

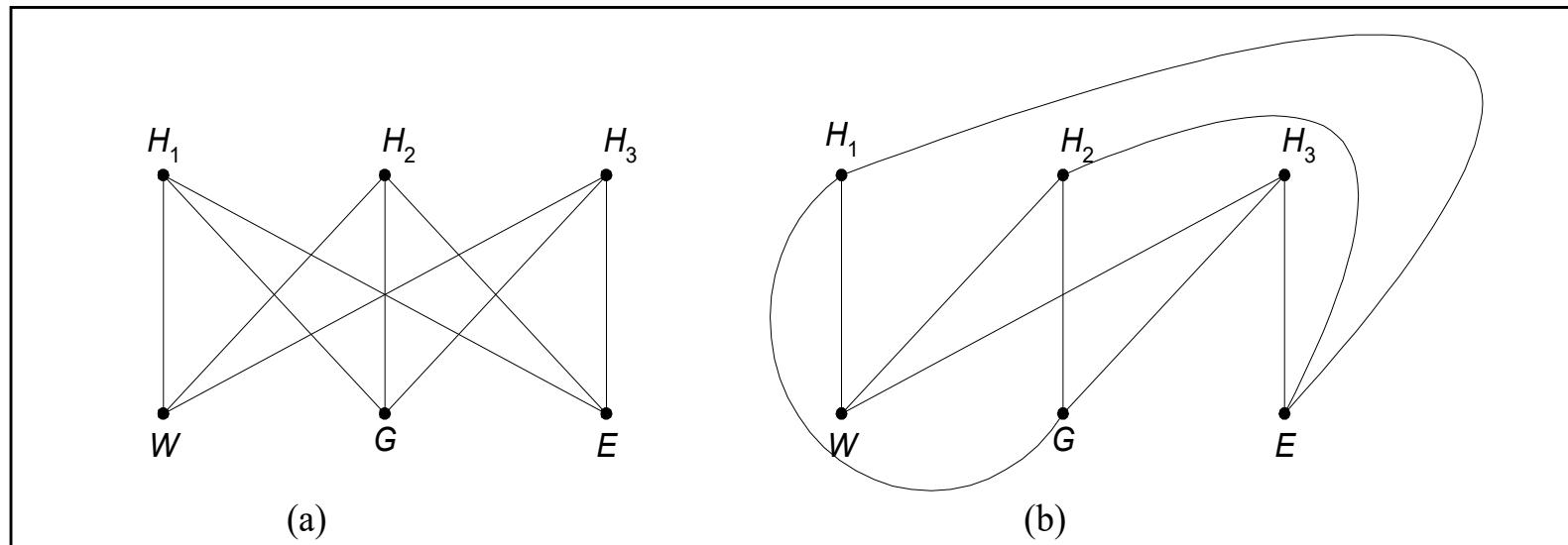
Manakah yang merupakan graf planar?



Apakah graf berikut merupakan graf planar?

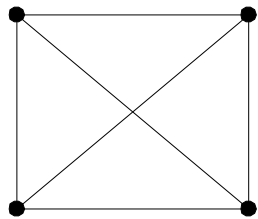


Contoh: Persoalan utilitas (*utility problem*)

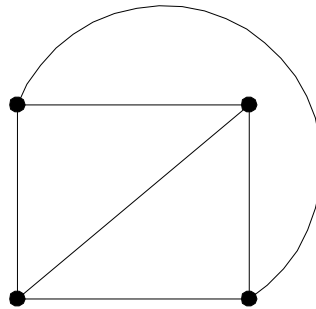


(a) Graf persoalan utilitas ($K_{3,3}$), (b) graf persoalan utilitas bukan graf planar.

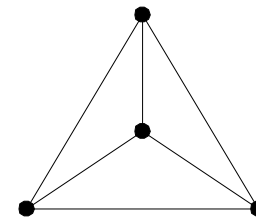
Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan disebut **graf bidang** (*plane graph*).



(a)



(b)

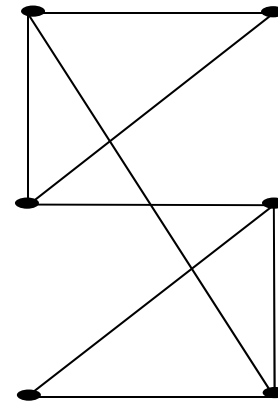
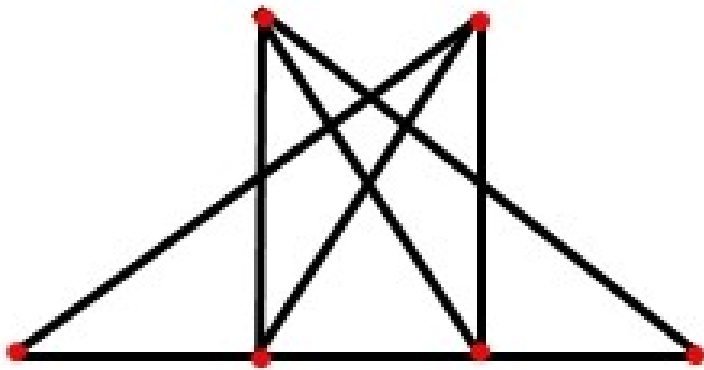


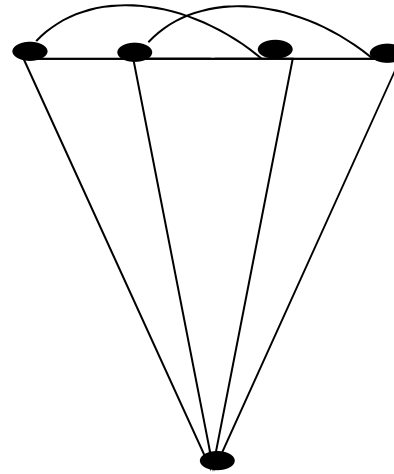
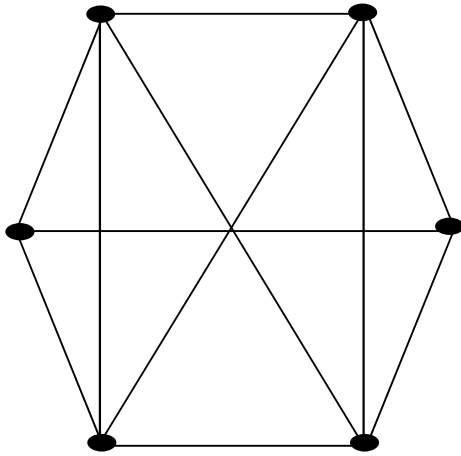
(c)

(a) Graf K_4 , (b) dan (c) graf bidang

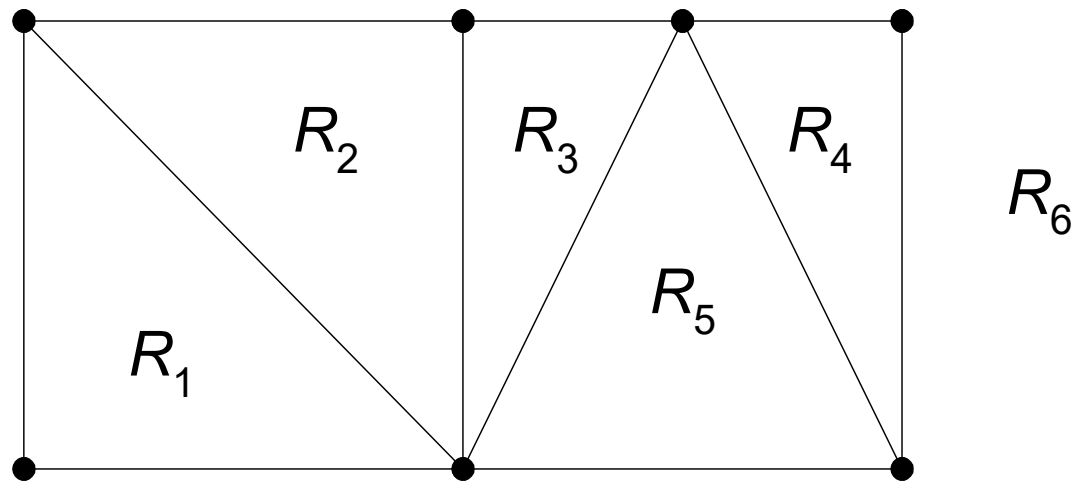
latihan

selidiki apakah graf berikut planar atau tidak !!





Sisi-sisi pada graf bidang membagi bidang datar menjadi beberapa wilayah (region) atau muka (face)



Rumus Euler

Jumlah wilayah (f) pada graf planar sederhana dapat dihitung dengan rumus Euler

$$n - e + f = 2 \quad \text{atau} \quad f = e - n + 2$$

dengan :

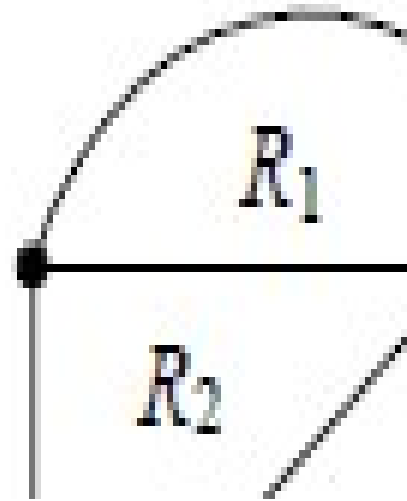
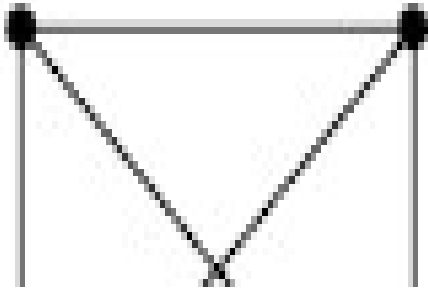
e = banyaknya sisi

n = banyaknya titik

Contoh

Pada graf planar K_4 ,

$$f = e - n + 2 = 6 - 4 + 2 = 4$$



contoh

Misalkan G graf planar dengan 20 buah titik. Setiap titik pada graf G berderajat 3. Berapa banyak wilayah yang dapat dibentuk pada graf planar G ?

Akibat 1

Jika G adalah graf planar sederhana terhubung dengan e menyatakan banyaknya sisi dan n menyatakan banyaknya titik, dalam hal ini $n \geq 3$, maka berlaku ketidaksamaan Euler,

$$e \leq 3n - 6$$

Akibat 2

Jika G adalah graf planar sederhana yang terhubung maka derajat titik graf G tidak lebih dari 5.

Akibat 3

Jika G adalah graf planar sederhana terhubung dengan n buah titik, $n \geq 3$, e buah sisi, dan tidak mempunyai sirkuit/sikel yang panjangnya 3 maka

$$e \leq 2n - 4$$

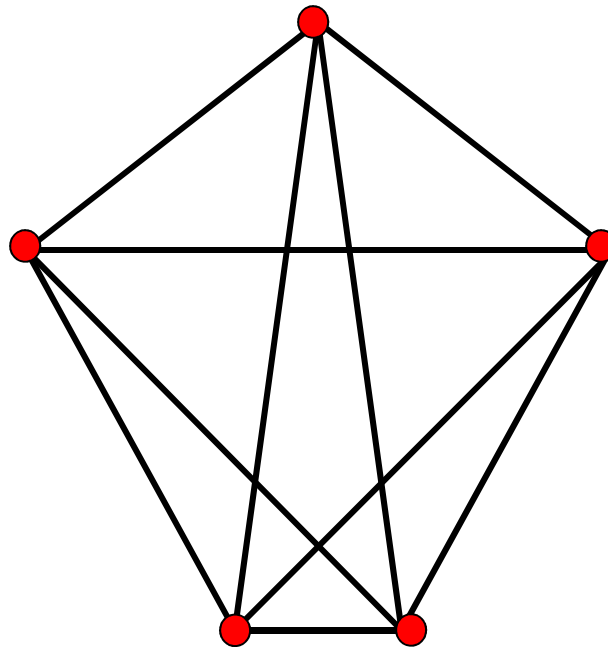
Latihan

1. Graf planar sederhana dan terhubung memiliki 18 buah titik, masing-masing titik berderajat 4. Representasi planar dari graf tersebut membagi bidang datar menjadi sejumlah wilayah atau muka. Berapa banyak wilayah yang terbentuk ?

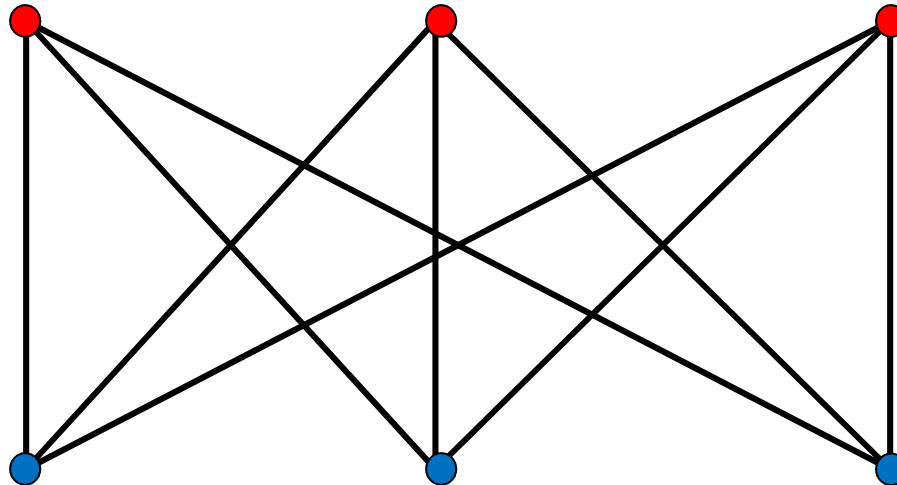
2. Tunjukkan bahwa graf K_5 bukan graf planar dengan menggunakan Akibat 1.
3. Gunakan Akibat 3 untuk menunjukkan bahwa graf $K_{3,3}$ bukan graf planar.

Teorema Kuratowski

Graf Kuratowski I, yaitu graf lengkap yang mempunyai 5 buah titik (K_5) adalah graf tidak planar



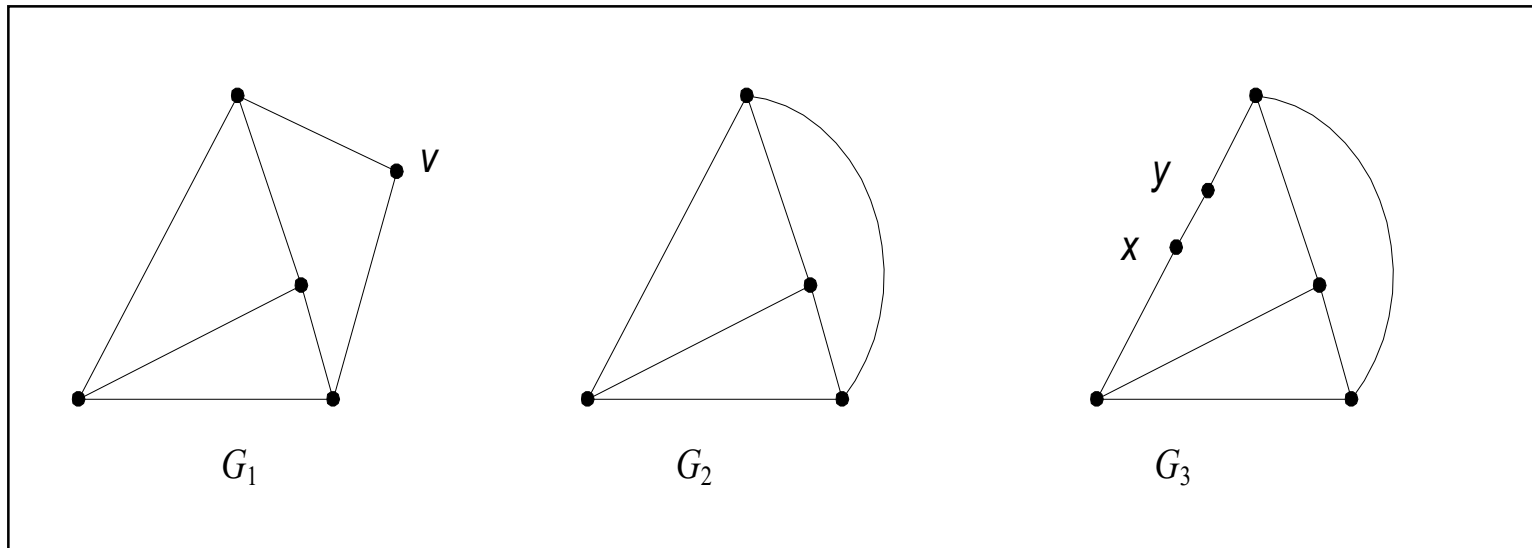
Graf Kuratowski II, yaitu graf terhubung teratur dengan 6 buah titik dan 9 buah sisi ($K_{3,3}$) adalah graf tidak planar



Sifat graf Kuratowski :

1. Kedua graf Kuratowski adalah graf teratur/reguler
2. Kedua graf Kuratowski adalah graf tidak planar
3. Penghapusan sisi atau titik dari graf Kuratowski menyebabkan menjadi graf planar
4. Graf Kuratowski I adalah graf tidak planar dengan jumlah titik minimum dan graf Kuratowski II adalah graf tidak planar dengan jumlah sisi minimum. Keduanya graf tidak planar paling sederhana

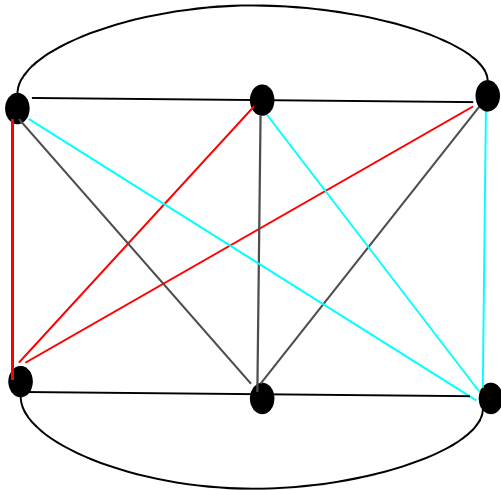
TEOREMA Kuratowski. Graf G bersifat planar jika dan hanya jika ia tidak mengandung subgraf yang sama dengan salah satu graf Kuratowski atau homeomorfik (*homeomorphic*) dengan salah satu dari keduanya.



Tiga buah graf yang homemorfik satu sama lain.

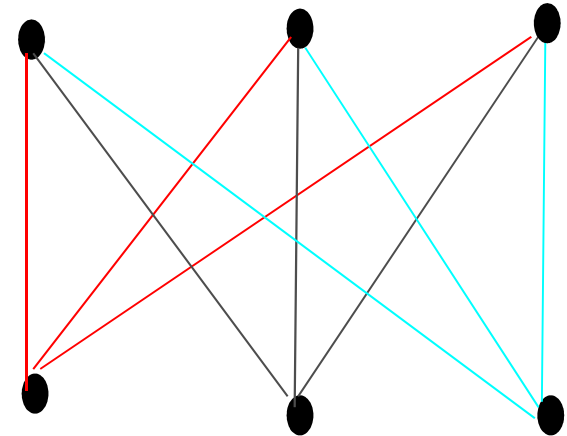
Contoh

Perhatikan graf G berikut



G

Graf G tidak planar
karena mengandung
subgraf $K_{3,3}$



$K_{3,3}$

Apakah graf berikut graf planar?

