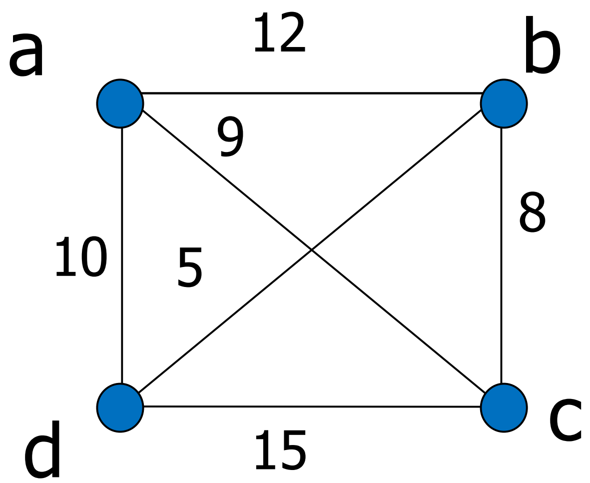
2. Travelling Salesman Problem (TSP)

Persoalan perjalanan pedagang (Travelling Salesman Problem). TSP tidak lain adalah menentukan sirkuit Hamilton yang memiliki bobot minimum pada sebuah graf terhubung. Ide dasar dari masalah ini adalah bagaimana mengunjungi beberapa kota dan kembali ke kota semula sedemikian sehingga setiap kota dikunjungi tepat satu kali dengan jarak total yang dilalui sependek mungkin.

Contoh 1:

Selesaikan TSP yang direpresentasikan oleh graf G berikut



Penyelesaian:

Misalkan a titik awal.

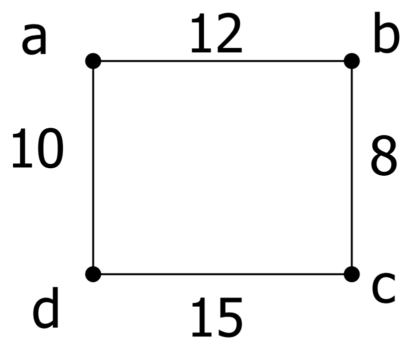
Graf G merupakan graf lengkap dengan n = 4 titik.

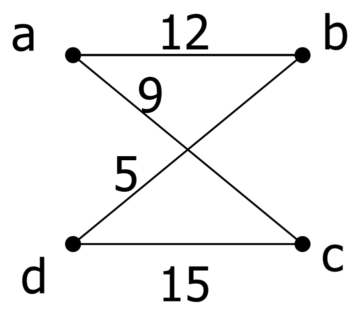
Menurut teorema 3 terdapat (4-1)!/2=3 sirkuit Hamilton

sirkuit I_1 =(a, b, c, d, a)

atau (a, d, c, b, a)

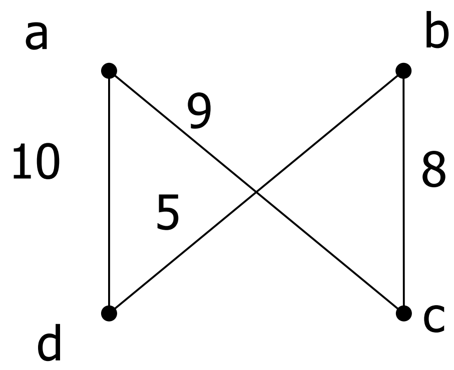
panjang rute = 12+8+5+10 = 45





sirkuit I_2 = (a, b, d, c, a) atau (a, c, d, b, a)

panjang rute = 12 + 9 + 15 + 5 = 41



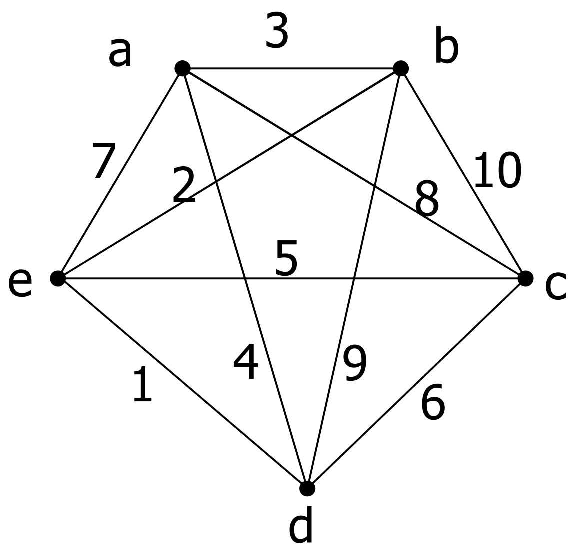
sirkuit I_3= (a, c, b, d, a) atau (a, d, b, c, a)

panjang rute = 5 + 8 + 9 + 10 = 32

Jadi, sirkuit Hamilton terpendek adalah sirkuit I_3 dengan panjang rutenya 32.

Contoh 2:

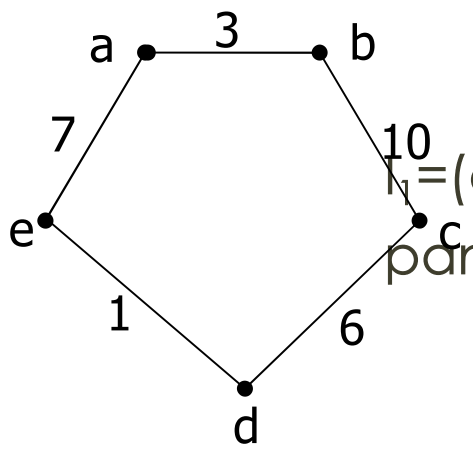
Carilah solusi dari TSP untuk graf berikut dengan menemukan seluruh sirkuit Hamilton dengan setiap bobotnya dan tentukan sirkuit Hamilton dengan minimum.



Penyelesaian:

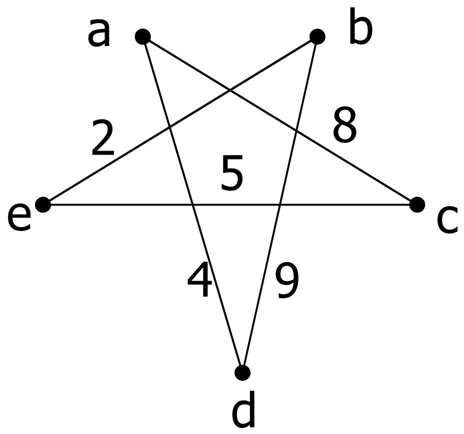
Misal a titik awal

Terdapat (5-1)!/2=12 sirkuit Hamilton.



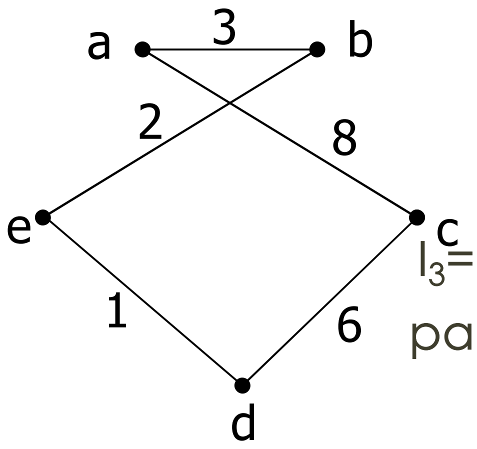
I_1=(a, b, c, d, e, a) atau (a, e, d, c, b, a)

panjang rute = 3+10+6+1+7 = 27



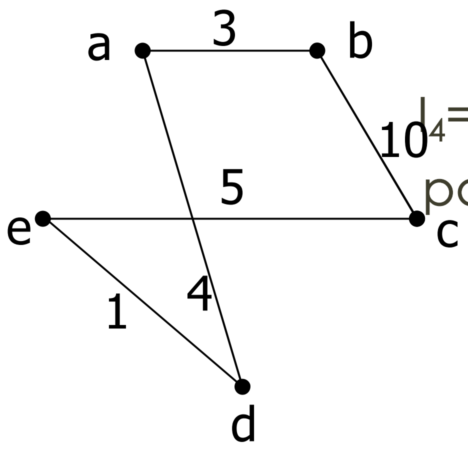
I_2 = (a, c, e, b, d, a) atau (a, d, b, e, c, a)

panjang rute = 8+9+2+5+4 = 28



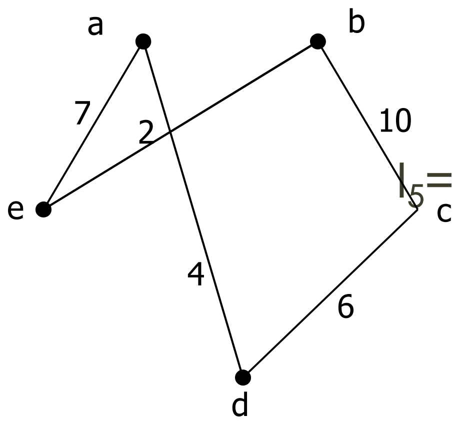
I_3=(a, b, e, d, c, a) atau (a, d, b, e, c, a)

panjang rute=3+2+1+6+8=20



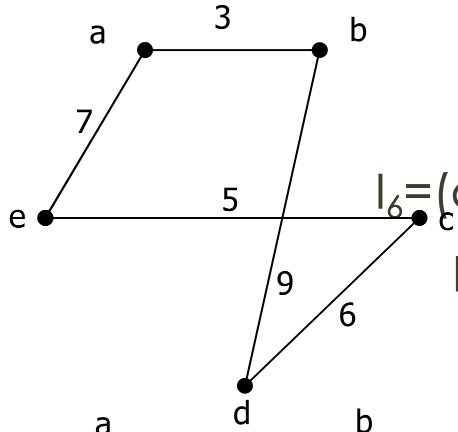
I_4=(a, b, c, e, d, a) atau (a, d, e, c, b, a)

panjang rute=3+10+5+1+4=23



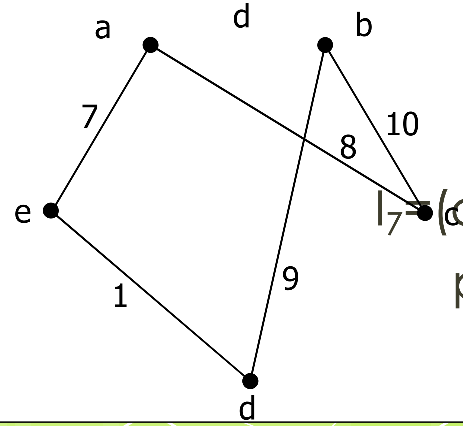
l_5=(a, d, c, b, e, a) atau (a, e, b, c, d, a)

panjang rute=7+4+6+10+2=29



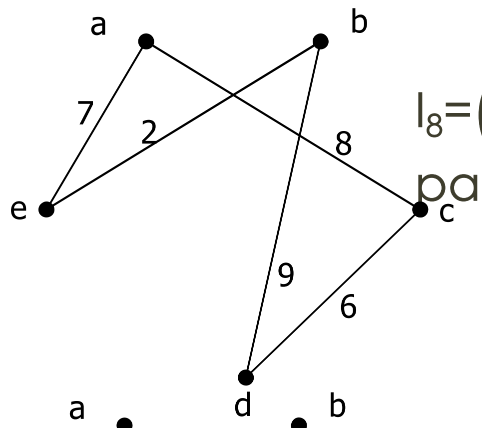
l_6=(a, b, d, c, e, a) atau (a, e, c, d, b, a)

panjang rute=3+9+6+5+7=30



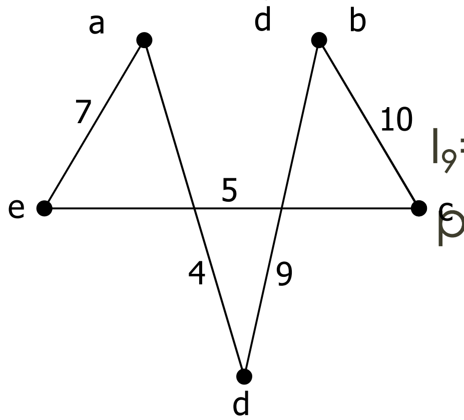
l_7=(a, c, b, d, e, a) atau (a, e, d, b, c, a)

panjang rute=8+10+9+1+7=35



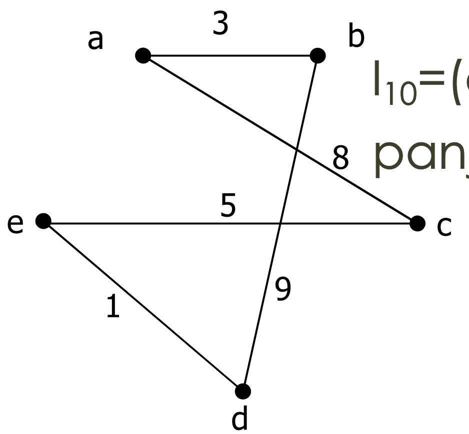
l_8=(a, c, d, b, e, a) atau (a, e, b, d, c, a)

panjang rute=8+9+6+2+7=32



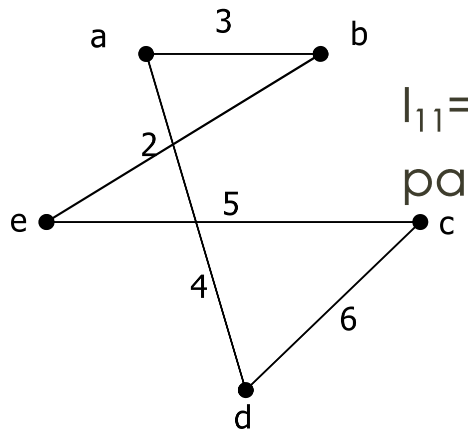
l_9=(a, d, b, c, e, a) atau (a, e, c, b, d, a)

panjang rute=4+9+10+5+7=35



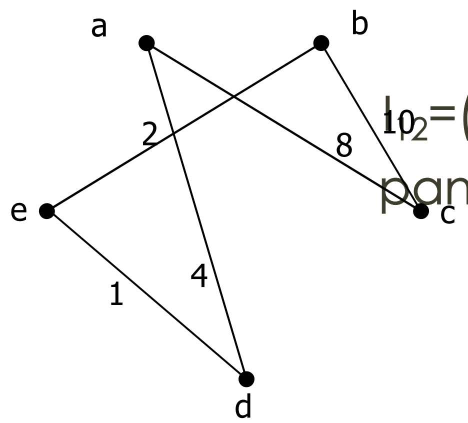
l_{10}=(a, b, d, e, c, a) atau (a, c, e, d, b, a)

panjang rute=3+9+1+5+8=26



l_{11}=(a, b, e, c, d, a) atau (a, d, c, e, b, a)

panjang rute=3+2+5+6+4=20



l_{12}=(a, c, b, e, d, a) atau (a, d, e, b, c, a)

panjang rute=10+8+2+1+4=25

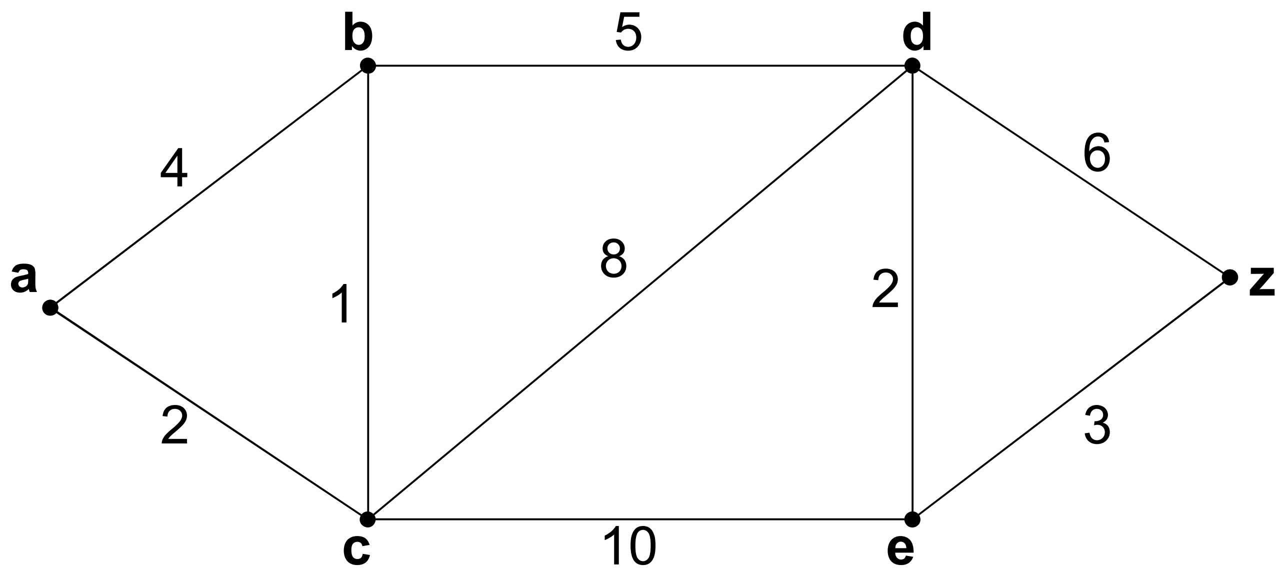
jadi, sirkuit Hamilton terpendek adalah sirkuit l_3 dan sirkuit l_{11} dengan panjang rutenya 20.

Masalah Lintasan Terpendek

Banyak persoalan yang dapat dimodelkan dengan menggunakan graf. Sebagai contoh, sistem penerbangan yang dapat dimodelkan dengan graf. Titik pada graf dapat merepresentasikan kota, dan sisi pada graf dapat merepresentasikan jalur penerbangan antara dua kota. Pencarian lintasan terpendek antara kota A ke kota B dapat dimodelkan dengan graf berbobot.

Contoh

Carilah Lintasan terpendek dari titik **a** ke titik **z** pada graf berikut:



Algoritma Dijkstra

Salah satu algoritma yang digunakan untuk mencari lintasan terpendek.

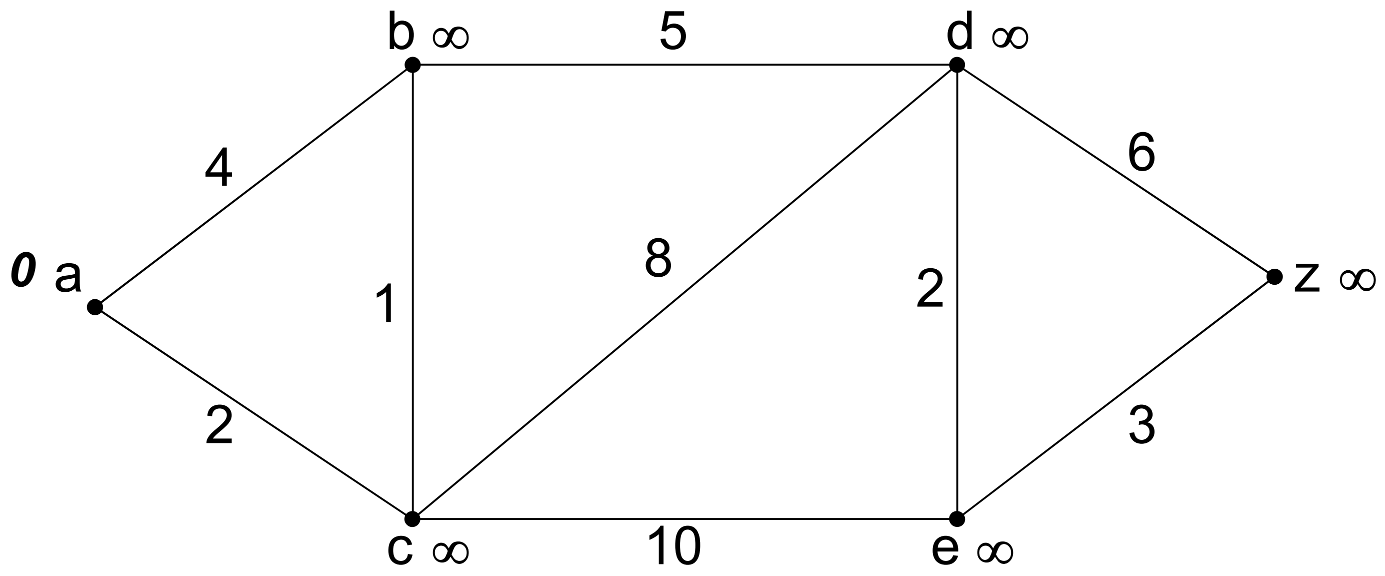
Algoritma Dijkstra mencari lintasan terpendek dari satu titik ke titik lain (misal dari a ke z) dengan cara menemukan panjang lintasan terpendek dari a ke titik pertama, kemudian panjang lintasan terpendek dari a ke titik kedua, dan seterusnya sampai panjang lintasan terpendek dari a ke z ditemukan.

Prosedur Algoritma Dijkstra:

Titik-titik pada graf , misal titik w, dilabeli dengan panjang lintasan terpendek dari a ke w dan titik-titik yang dilintasi lintasan tersebut.

Langkah-langkah Algoritma Dijkstra:

- labeli titik awal, misal titik a dengan 0 dan titik lain dengan ∞.



- gunakan notasi $L_0(a) = 0$ dan $L_0(v) = \infty$ untuk pelabelan sebelum dilakukan iterasi. Subskrip 0 menunjukkan iterasi ke 0.

- Label ini adalah panjang lintasan terpendek dari a ke titik yang lain dengan lintasan yang hanya terdiri dari titik a (karena belum ada lintasan dari a ke titik yang lain, ∞ adalah panjang lintasan terpendek antara a dengan titik-titik tersebut).

- Algoritma Dijkstra memproses dengan membentuk himpunan titik-titik yang berbeda.
- Misalkan S_k melambangkan himpunan setelah k iterasi dari prosedur pelabelan.
- Dimulai dengan $S_0 = \varnothing$.
- Himpunan S_k dibentuk dari himpunan S_{k-1} dengan menambahkan titik u (yang mempunyai label terkecil) yang tidak berada di S_{k-1} .

- Setelah titik u ditambahkan, kemudian label semua titik yang tidak ada di S_k diperbaharui, sehingga $L_k(v)$ (label dari titik v pada tahap ke-k) adalah panjang lintasan terpendek dari a ke v yang berisi titik-titik yang ada di S_k.
- Misalkan v adalah titik yang tidak berada di S_k. Untuk memperbaharui label dari v, perlu diperhatikan bahwa $L_k(v)$ adalah panjang lintasan terpendek dari a ke v yang berisi titik-titik yang ada di S_k.

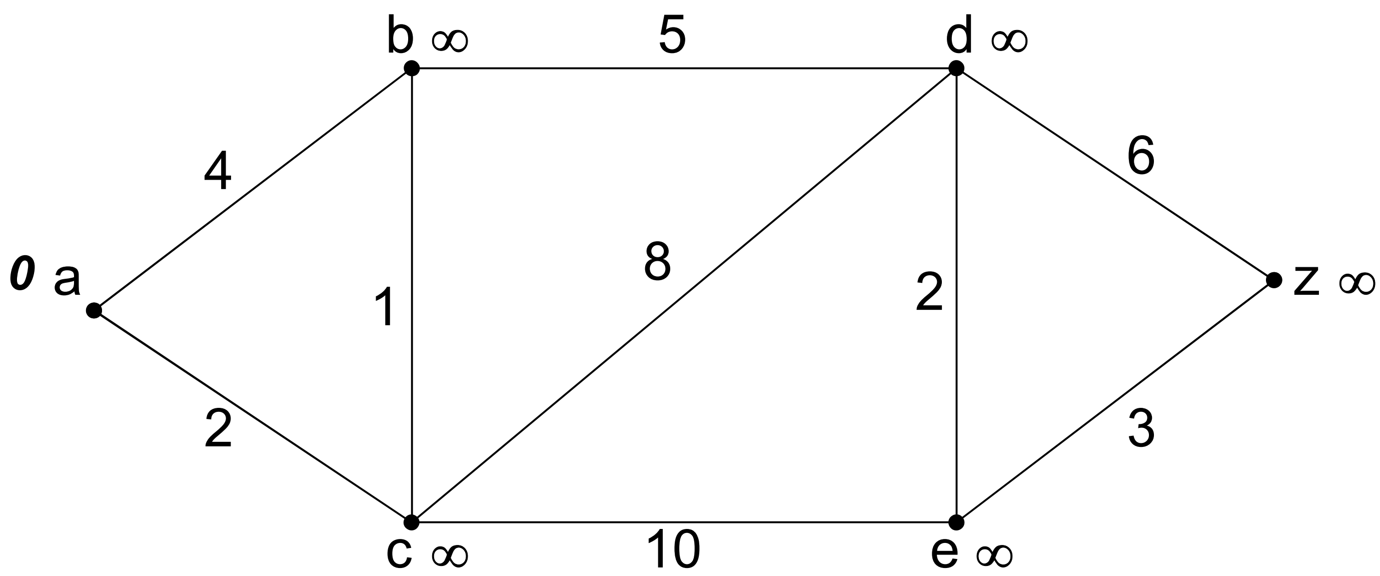
- Pembaharuan dapat dilakukan dengan efisien jika observasi berikut digunakan:
- Lintasan terpendek dari a ke v yang berisi hanya titik-titik yang ada di S_k adalah lintasan terpendek dari a ke v yang berisi hanya titik-titik yang ada di S_{k-1} (tidak termasuk titik u), atau lintasan terpendek dari a ke u pada tahap ke-(k-1) dengan menambahkan titik (u,v). Atau bisa dituliskan dengan

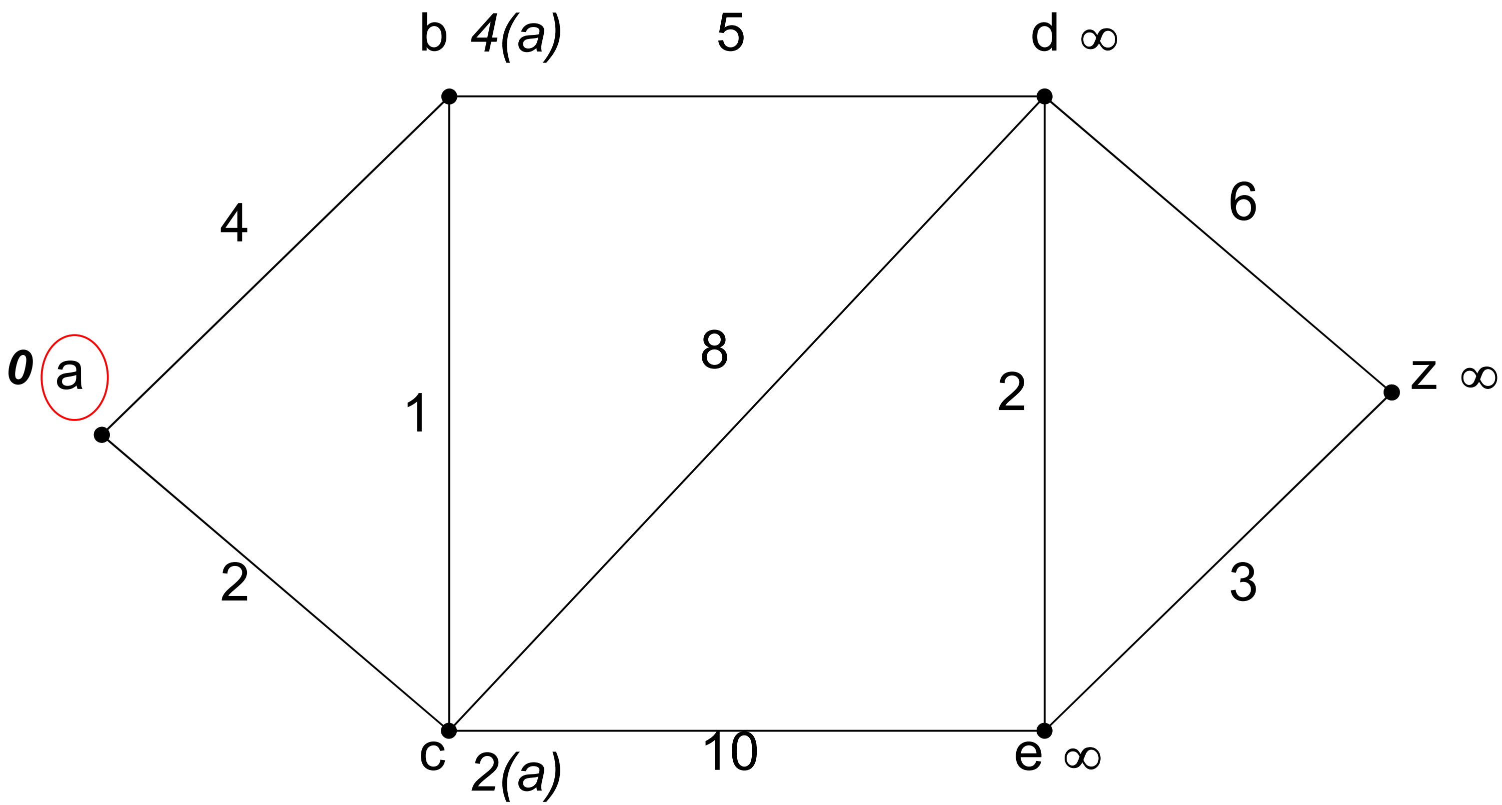
$$L_k(a,v) = \min \{L_{k-1}(a,v),\ L_{k-1}(a,u)+w(u,v)\}$$

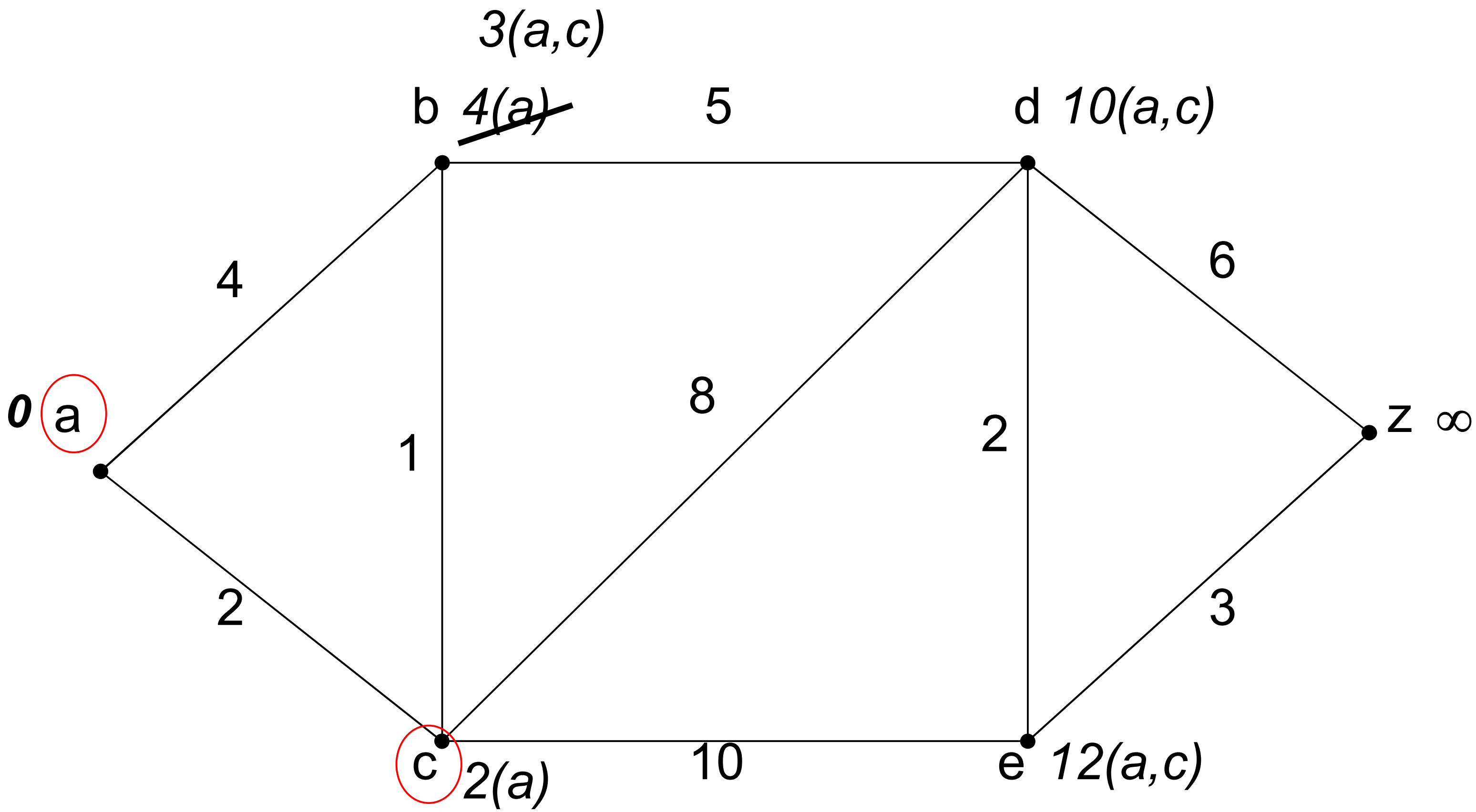
- Prosedur selesai setelah titik z ditambahkan. Saat z ditambahkan dalam himpunan S, labelnya adalah panjang lintasan terpendek dari a ke z.

Contoh

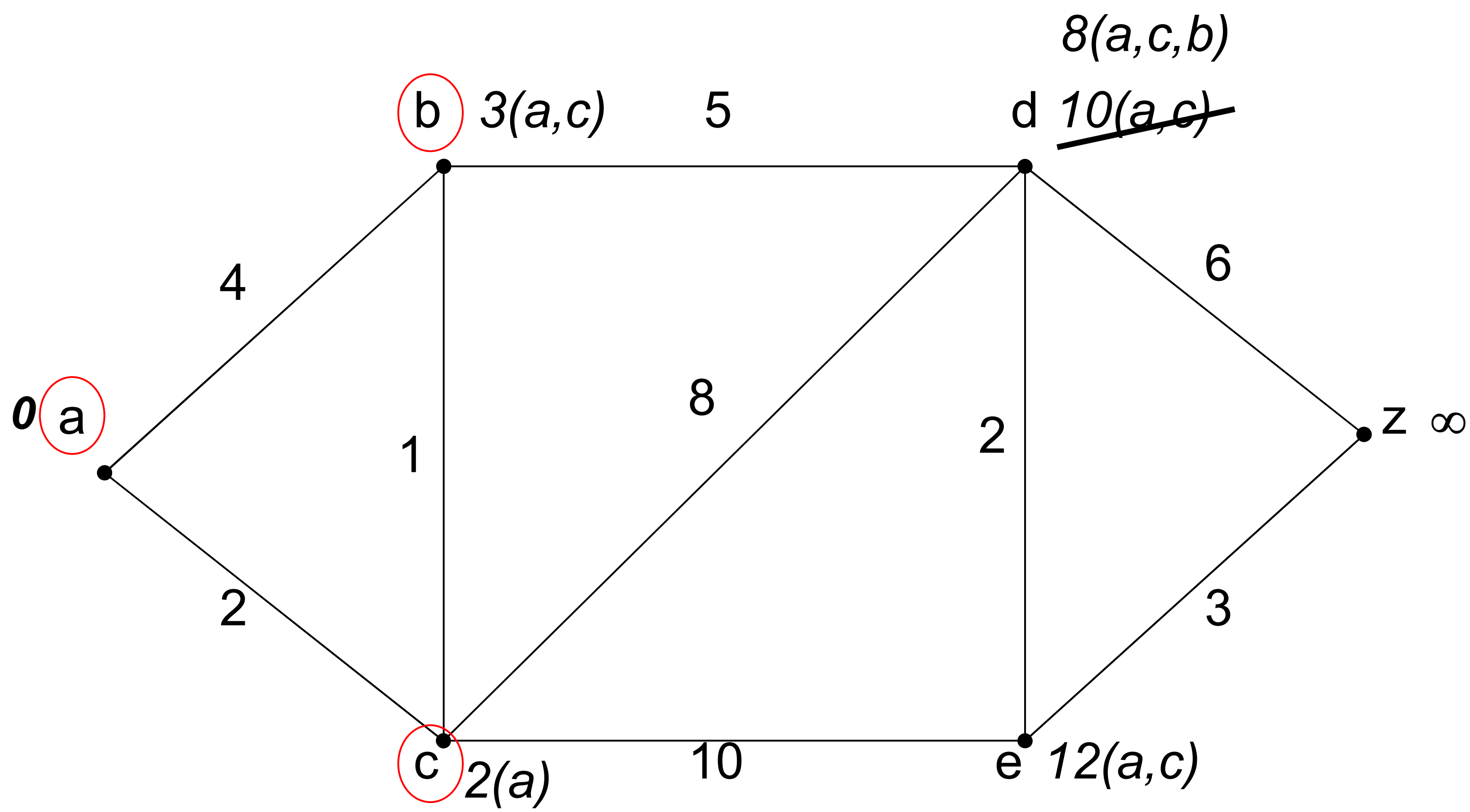
Dimulai dengan melabeli a dengan 0 dan titik lain dengan ∞.

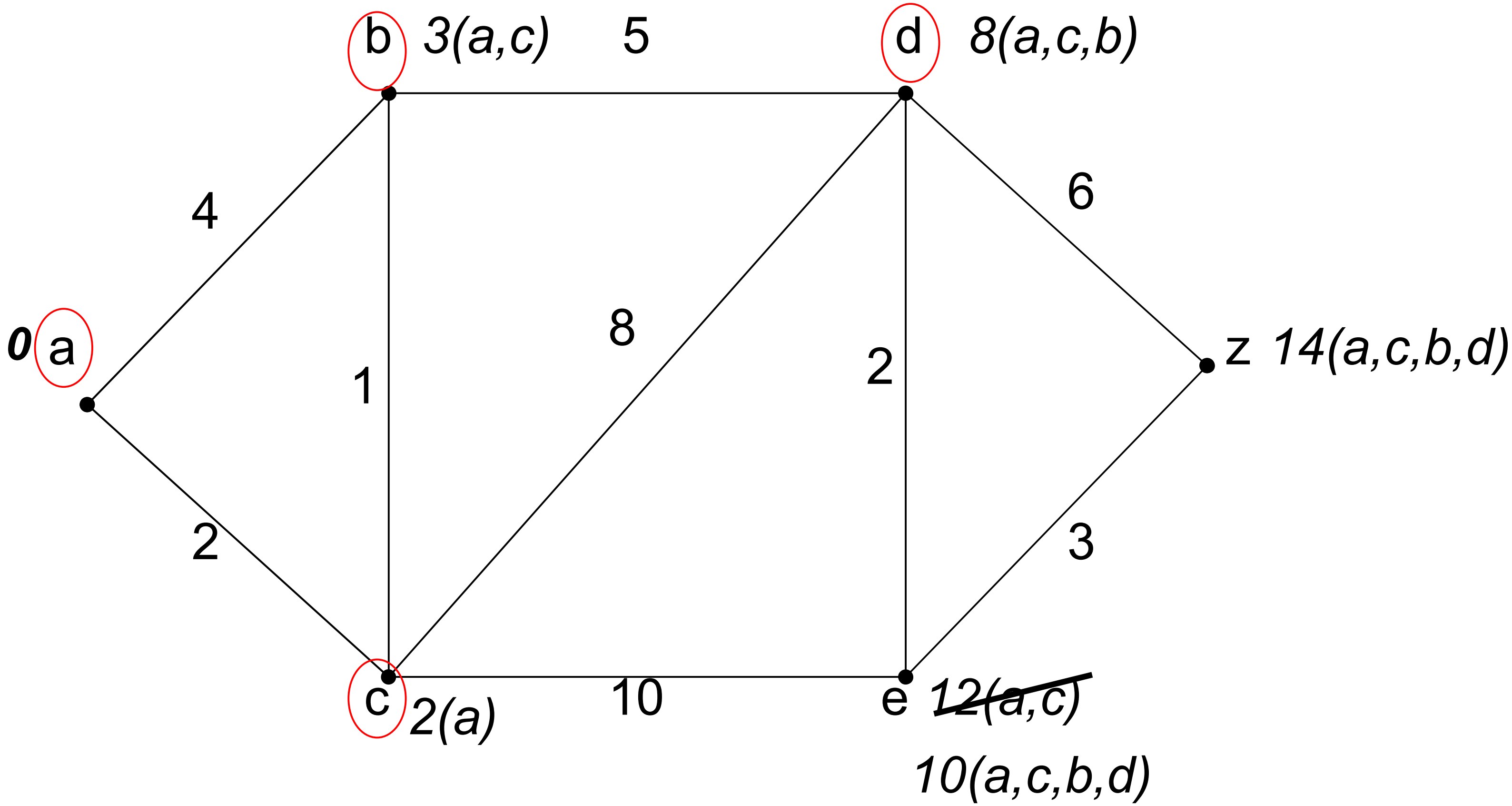



b 4(a)
5
d ∞
4
6
0 a
8
1
2
z ∞
2
3
c 2(a)
10
e ∞

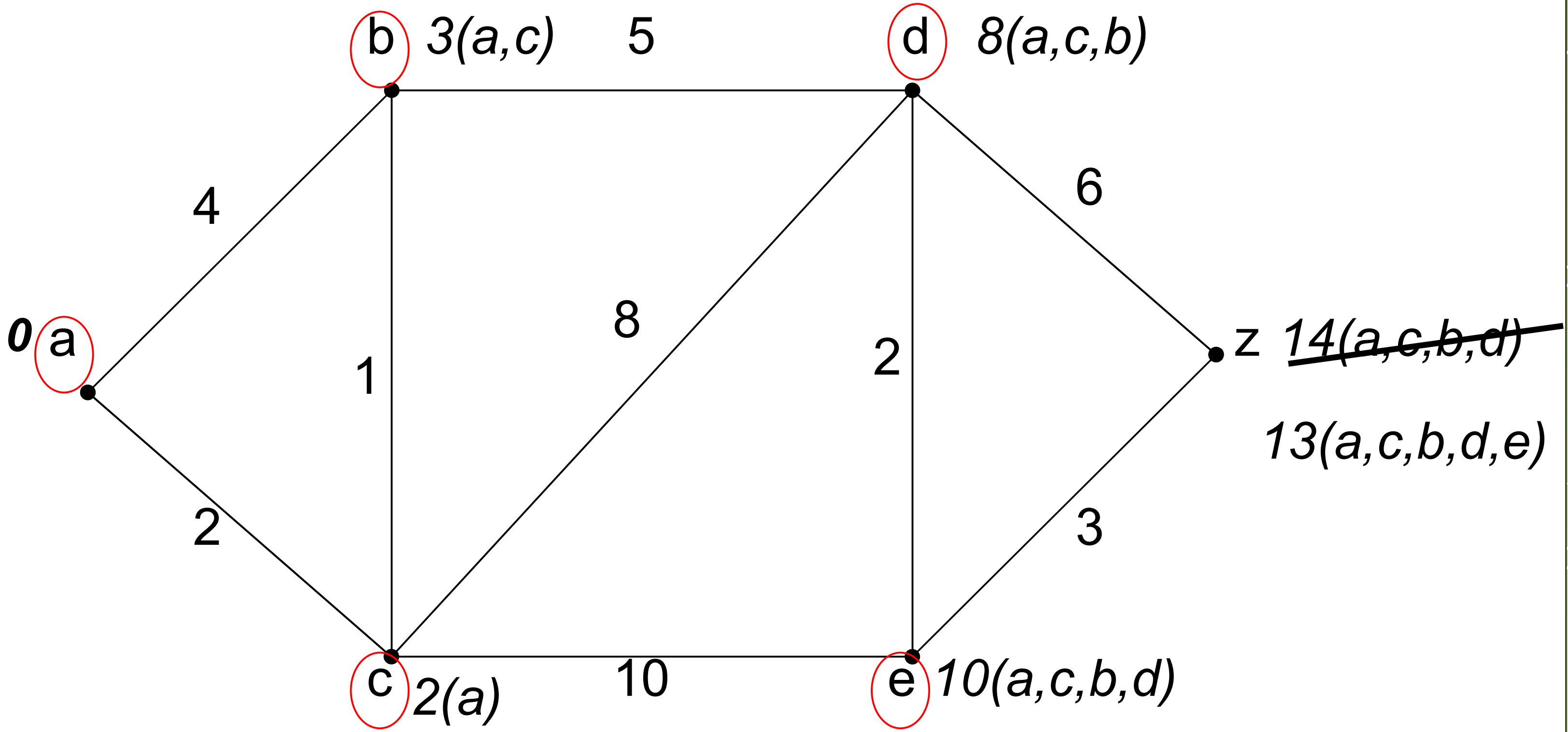


3(a,c)
b ~~4(a)~~
5
d 10(a,c)
4
6
0 a
1
8
2
z ∞
2
3
c 2(a)
10
e 12(a,c)

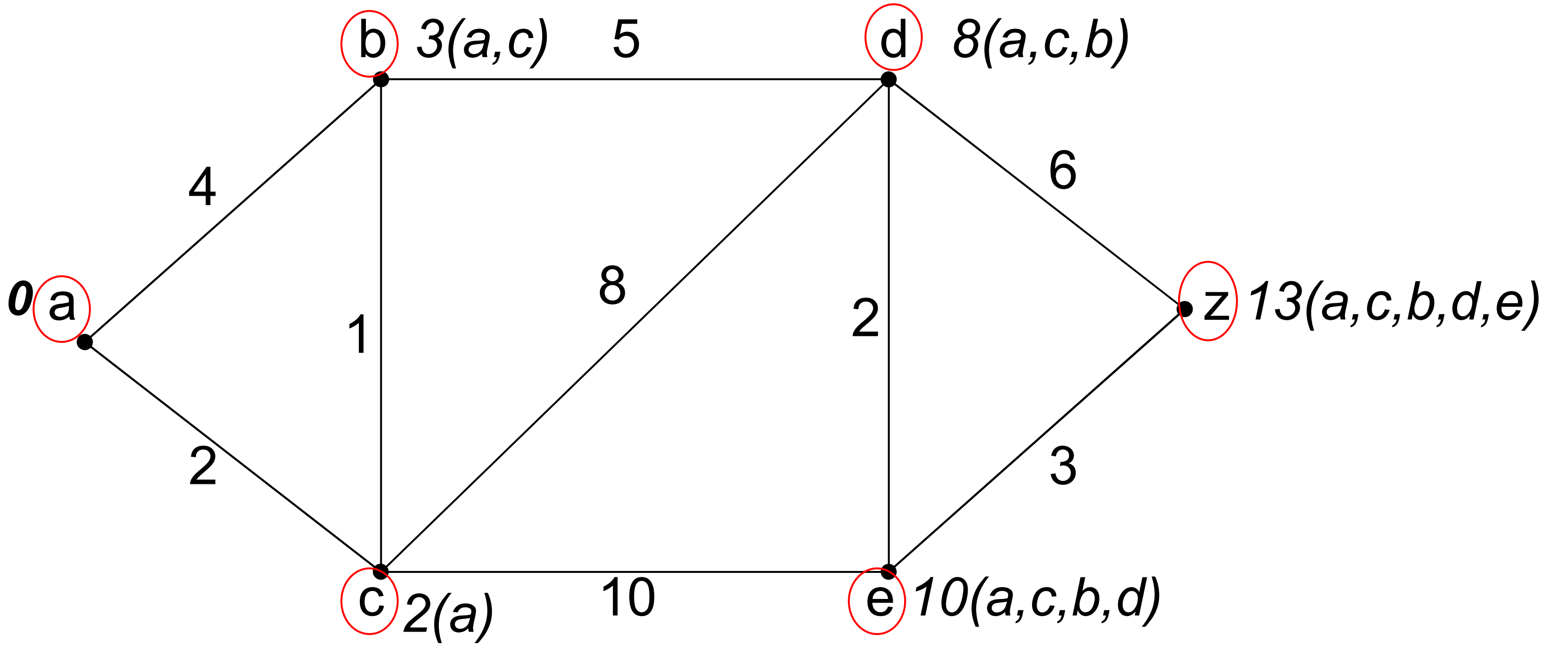

8(a,c,b)
b 3(a,c)
5
d ~~10(a,c)~~
4
6
0 a
1
8
2
z ∞
2
3
c 2(a)
10
e 12(a,c)



b
3(a,c)
5
d
8(a,c,b)
4
6
0
a
1
8
2
z
14(a,c,b,d)
2
3
c
2(a)
10
e
~~12(a,c)~~
10(a,c,b,d)



b 3(a,c)
5
d 8(a,c,b)
4
6
0 a
1
8
2
z ~~14(a,c,b,d)~~
13(a,c,b,d,e)
2
3
c 2(a)
10
e 10(a,c,b,d)



Jadi lintasan terpendek dari titik a ke titik z adalah a,c,b,d,e dengan panjang lintasan terpendeknya adalah 13.

Latihan

Find a route with the least total airfare that visits each of the cities in this graph, where the weight on an edge is the least price available for a flight between the two cities.