

Masalah Transportasi dan Penugasan

A. Masalah Transportasi

- Masalah transportasi diformulasikan menurut karakteristik-karakteristik unik sebagai berikut :
 - (1). Suatu barang dipindahkan, dari sejumlah sumber ke tempat tujuan dengan biaya seminimum mungkin
 - (2). Setiap sumber dapat memasok suatu jumlah yang tetap dan tiap tempat tujuan mempunyai permintaan yang tetap.

Contoh :

Gandum di panen di Kansas City, Omaha, dan Des Moines kemudian dikirim di 3 penggilingan tepung yang berlokasi di Chicago, St.Louis, dan Cincinnati. Datanya sebagai berikut :

Tempat Panen	Jumlah yang ditawarkan
1. Kansas City	150
2. Omaha	175
3. Des Moines	275
	600 ton

- Jumlah gandum yang diminta dari tempat penggilingan adalah

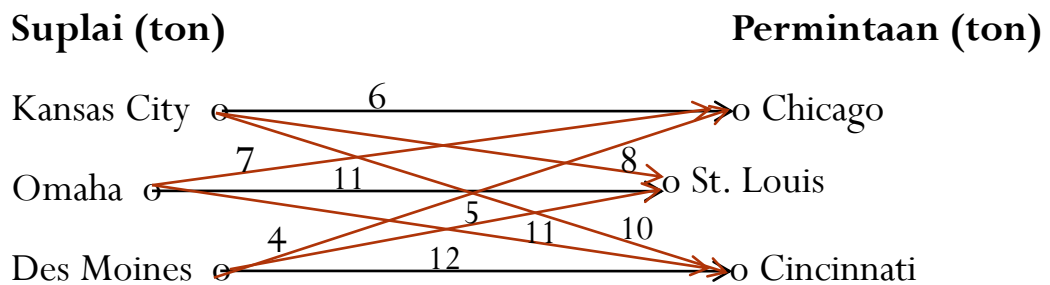
Tempat Penggilingan	Jumlah yang diminta
A. Chicago	200
B. St. Louis	100
C. Cincinati	300
	600 ton

- Biaya pengiriman 1 ton gandum dari setiap tempat panen (sumber) ke tempat penggilingan adalah

Tempat Panen	Biaya Penggilingan (\$)		
	Chicago	St. Louis	Cincinati
	A	B	C
Kansas City	6	8	10
Omaha	7	11	11
Des Moines	4	5	12

Persoalannya adalah untuk mengirim gandum dari tempat panen ke tempat penggilingan setiap bulannya agar total biaya transportasi minimum

- Rute transportasi pengiriman gandum



- Formulasi program linearnya adalah

$$\text{Minimumkan } Z = 6x_{1A} + 8x_{1B} + 10x_{1C} + 7x_{2A} + 11x_{2B} + 11x_{2C} + 4x_{3A} + 5x_{3B} + 12x_{3C}$$

$$\text{Batasan } x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} = 150$$

$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} = 175$$

$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} = 275$$

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 200$$

$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 100$$

$$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 300$$

$$x_{ij} \geq 0$$

B. Solusi Model Transportasi

- Penyelesaian Program Linear dengan metode simpleks akan membutuhkan banyak waktu karena melibatkan 9 peubah keputusan dan 6 batasan oleh karena itu digunakan solusi alternatif yang lebih memerlukan sedikit usaha

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	6	8	10	150
	2	7	11	11	
	3	4	5	12	
Permintaan		200	100	300	600

- Pada model ini solusi fisibel awal dapat ditentukan dengan metode alternatif, yaitu: metode northwest corner, metode biaya sel minimum, dan metode pendekatan vogel

1. Metode Northwest Corner

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	6 150	8	10	150
	2	7 50	11 100	11 25	175
	3	4	5	12 275	275
Permintaan		200	100	300	600

Masukan 150 (pasokan paling besar) ke sel 1A, masukan nilai 50 ke sel 2A, masukan 100 ke sel 2B, masukan nilai 15 ke sel 2C, masukan nilai 275 ke sel 3C.

$$Z = 6.150 + 7.50 + 11.100 + 11.25 + 12.275 = 5.925.$$

- Ringkasan langkah-langkah pada metode northwest corner:
 1. Alokasikan sebanyak mungkin ke sel di pojok kiri atas, disesuaikan dengan batasan penawaran dan permintaan.
 2. Alokasikan sebanyak mungkin ke sek feasibel berikutnya yang berdekatan.
 3. Ulangi langkah 2 sampai semua kebutuhan telah terpenuhi.

2. Metode Biaya Sel Minimum

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	6	8	10	150
			25	125	
	2	7	11	11	
			175		
3	4	5	12	275	
	200	75			
Permintaan		200	100	300	600

$$Z = 4.550$$

- Langkah-langkah yang dilakukan pada metode biaya sel minimum
 - Alokasikan sebanyak mungkin ke sel fisibel dengan biaya transportasi minimum, dan sesuaikan dengan kebutuhan.
 - Ulangi langkah a sampai semua kebutuhan terpenuhi.

3. Metode Pendekatan Vogel

- Biaya Penalti VAM

		Tujuan			Pasokan	
		A	B	C		
Sumber	1	6	8	10	150	2
	2	7	11	11	175	4
	3	4	5	12	275	1
Permintaan		200	100	300	600	
		2	3	1		

- Alokasi Awal

		Tujuan			Pasokan	
		A	B	C		
Sumber	1	6	8	10	150	2
	2	7	11	11	175	
	3	4	5	12	275	1
	Permintaan	200	100	300	600	
		2	3	2		

- Alokasi VAM kedua

		Tujuan			Pasokan	
		A	B	C		
Sumber	1	6	8	10	150	4
	2	7	11	11	175	
	3	4	5	12	275	8
	Permintaan	200	100	300	600	
		2		2		

- Alokasi VAM Ketiga

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	6	8	10	150
	2	7	11	11	175
	3	4	5	12	275
	Permintaan	200	100	300	600

4

- Solusi VAM Awal

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	6	8	10	150
	2	7	11	11	175
	3	4	5	12	275
	Permintaan	200	100	300	600

- Metode Northwest nilai $Z = \$5.925$, metode biaya sel minimum nilai $Z = \$4.550$, dan Metode Pendekatan Vogel nilai $Z = \$5.125$

- Ringkasan langkah-langkah yang dilakukan pada metode pendekatan Vogel
 1. Tentukan biaya penalti untuk tiap baris dan kolom dengan cara mengurangkan biaya sel terendah pada baris dan kolom terhadap biaya sel terendah berikutnya pada baris atau kolom sel yang sama.
 2. Pilih baris atau kolom dengan biaya tertinggi.
 3. Alokasikan biaya sebanyak mungkin ke sel feasible dengan biaya transportasi terendah pada baris atau kolom dengan biaya penalti tertinggi.
 4. Ulangi langkah 1, 2, dan 3 sampai semua kebutuhan terpenuhi

4. Metode Solusi Stepping-Stone

Ada dua metode solusi yaitu : Stepping-Stone dan metode modified distribution (MODI).

Pertama, Metode Solusi Stepping-Stone. Gunakan tabel solusi awal dari metode Solusi Biaya Sel Minimum karena mempunyai nilai Z paling minimum.

Solusi Biaya Sel Minimum

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	6	8	10	150
			25	125	
	2	7	11	11	175
				175	
3	4	5	12	275	
	200	75			
Permintaan	200	100	300	600	

- Prinsipnya menggunakan sel-sel kosong yang ada. Apakah sel-sel kosong tersebut jika digunakan dapat menghasilkan biaya transportasi yang lebih kecil ?.

Alokasi Satu Ton ke sel A

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	+1 6	8	10	150
			25	125	
	2	7	11	11	175
				175	
3	4	5	12	275	
	200	75			
Permintaan		200	100	300	600

151

- **Pengurangan 1 Ton dari sel B**

		Tujuan			Pasokan		
		A	B	C			
Sumber	1	+1	6	-1	8	10	150
				25		125	
	2		7		11	11	
	3		4		5	12	275
		200		75			
	Permintaan	200	100		300		600

- **Penambahan 1 Ton ke Sel 3B dan Pengurangan 1 Ton dari Sel 3A**

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	+1	-1	10	150
	2	7	11	11	
	3	-1	+1	12	275
Permintaan		200	100	300	600

1A → 1B → 3B → 3A

$$+\$6 - \$8 + \$5 - \$4 = -\$1$$

- **Lintasan Stepping-stone untuk sel 2A**

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	6	- ← 8	+ 10	150
			25	125	
	2	+ 7	11	- 11	175
	3	- 4	+ 5	12	275
		200	75		
Permintaan		200	100	300	600

2A → 2C → 1C → 1 B → 3B → 3A

$$+7 - 11 + 10 - 8 + 5 - 4 = -1$$

- **Lintasan Stepping-stone untuk Sel 2B**

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	6	25	10	150
	2	7	11	11	
	3	4	5	12	
Permintaan		200	100	300	600

2B → 2C → 1C → 1B

$$+11 - 11 + 10 - 8 = +2$$

- Lintasan Stepping-Stone untuk sel 3C

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	6	+ ← 8	- 10	150
	2	7	25	125	
	3	4	- 5 →	+ 12	175
		200	75		275
	Permintaan	200	100	300	600

3C → 1C → 1B → 3B

$$+12 - 10 + 8 - 5 = +3$$

- Kembali ke lintasan Stepping-stone untuk sel 1A

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	+ 6 25	- 8	10 125	150
	2	7	11	11 175	175
	3	- 4 175	+ 5 100	12	275
Permintaan		200	100	300	600

- Pengulangan kedua dari Metode Stepping-Stone

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	6 25	8	10 125	150
	2	7	11	11 175	175
	3	4 175	5 100	12	275
Permintaan		200	100	300	600

- Lintasan Stepping-Stone untuk Sel 2A

		Tujuan			Pasokan		
		A	B	C			
Sumber	1	-	6	8	+	10	150
		25			125		
	2	+	7	11	-	11	175
	3		4	5		12	
		175	100				275
	Permintaan	200	100		300		600

2A → 2C → 1C → 1A

$$+7 - 11 + 10 - 6 = 0$$

Lintasan Stepping-Stone untuk sel 1B

		Tujuan			Pasokan	
		A	B	C		
Sumber	1	- 25	6 → +	8	10 125	150
	2				11 175	175
	3	+ 175	← 4	-	5	12 100
Permintaan		200	100		300	600

1B → 3B → 3A → 1A

$$+8 - 5 + 4 - 6 = +1$$

- **Lintasan Stepping-Stone untuk Sel 2B**

		Tujuan			Pasokan		
		A	B	C			
Sumber	1	- 25	← 6	8 → +	10 125	150	
	2	↓	7	+ ↑	11 → -	11 175	175
	3	+	4 →	-	5	12	275
Permintaan		200	100		300	600	

2B → 2C → 1C → 1A → 3A → 3B

$$+11 - 11 + 10 - 6 + 4 - 5 = +3$$

- Lintasan Stepping-Stone untuk sel 3C

		Tujuan			Pasokan	
		A	B	C		
Sumber	1	+ 25	6	8	- 125	150
	2	7	11	11	175	175
	3	- 175	4	5	+ 12	275
Permintaan		200	100	300	600	

3C → 3A → 1A → 1C

$$+12 - 10 + 6 - 4 = +4$$

Evaluasi atas ke-empat sel menunjukkan tidak ada lagi penurunan biaya, sehingga solusi optimalnya adalah

$x_{1A} = 25$ ton, $x_{1C} = 125$ ton, $x_{2C} = 175$ ton, $x_{3A} = 175$ ton, dan $x_{3B} = 100$ ton

$$Z = 6(25) + 10(125) + 11(175) + 5(100) + 4(175) = 4.525$$

- Ringkasan langkah-langkah pada metode Stepping-Stone adalah:
 - a. Tentukan lintasan Stepping-Stone dan perubahan biaya untuk setiap sel yang kosong dalam Tabel.
 - b. Alokasikan sebanyak mungkin ke sel kosong yang mengalami penurunan terbesar
 - c. Ulangi langkah a dan b sampai semua sel kosong memiliki perubahan biaya yang positif yang mengindikasikan tercapainya solusi optimal

- **Solusi Optimal Alternatif**

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	6	8	10	150
	2	7	11	11	
	3	4	5	12	150
		25			175
		175	100		275
Permintaan		200	100	300	600

5. Metode Distribusi yang Dimodifikasi (MODI)

Merupakan suatu modifikasi dari metode Stepping-Stone tanpa melibatkan identifikasi sel-sel kosong. Sebagai contoh akan digunakan Tabel Solusi Awal Biaya Sel Minimum.

Tambahan simbol u_i pada kolom sisi kiri dan v_j pada baris teratas dalam MODI. Nilai-nilai ini dihitung untuk semua sel berisi pengalokasian dengan menggunakan formula sbb :

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

c_{ij} adalah nilai biaya transportasi barang untuk sel ij . Sebagai contoh formula untuk sel 1B adalah

Solusi Awal Biaya Sel Minimum

	v_j	$v_A =$	$v_B =$	$v_C =$	
u_i		A	B	C	Pasokan
$u_1 =$	1	6	8	10	150
			25	125	
$u_2 =$	2	7	11	11	175
				175	
$u_3 =$	3	4	5	12	275
		200	75		
Permintaan		200	100	300	600

$x_{1B} : u_1 + v_B = c_{1B} = 8$; $x_{1C} : u_1 + v_C = 10$; $x_{2C} : u_2 + v_C = 11$; $x_{3A} :$
 $u_3 + v_A = 4$; $x_{3B} : u_3 + v_B = 5$. Misal $u_1 = 0$ (untuk memperoleh nilai-nilai u_i dan v_j lainnya).

Diperoleh $v_B = 8$; $v_C = 10$; $u_2 = 1$; $u_3 = -3$, $v_A = 7$.

- Solusi Awal dengan Semua Nilai u_i dan v_j

	v_j	$v_A = 7$	$v_B = 8$	$v_C = 10$	
u_i		A	B	C	Pasokan
$u_1 = 0$	1	6	8	10	150
			25	125	
$u_2 = 1$	2	7	11	11	175
				175	
$u_3 = -3$	3	4	5	12	275
		200	75		
Permintaan		200	100	300	600

- Selanjutnya sel-sel kosong dapat dievaluasi oleh formula berikut:
 $C_{ij} - u_i - v_j = k_{ij}$. k_{ij} adalah penurunan atau kenaikan biaya yang timbul karena pengalokasian pada sebuah sel.

$$x_{1A}: k_{1A} = c_{1A} - u_1 - v_A = 6 - 0 - 7 = -1$$

$$x_{2A}: k_{2A} = c_{2A} - u_2 - v_A = 7 - 1 - 7 = -1$$

$$x_{2B}: k_{2B} = c_{2B} - u_2 - v_B = 11 - 1 - 8 = 2$$

$x_{3C}: k_{3C} = c_{3C} - u_3 - v_C = 12 - (-3) - 10 = 5$. Perhatikan sel 1A dan 2A akan menurunkan biaya sebesar \$1 per ton. Pilih secara acak.

- Misal sel 1A dipilih sebagai variabel non-dasar. Maka

$$x_{1A} = u_1 + v_A = 6; x_{1C}: u_1 + v_C = 10; x_{2C}: u_2 + v_C = 11; x_{3A}:$$

$$u_3 + v_A = 4; x_{3B}: u_3 + v_B = 5. \text{ Misal } u_1 = 0 \text{ (untuk memperoleh nilai-nilai } u_i \text{ dan } v_j \text{ lainnya).}$$

$$\text{Diperoleh } v_A = 6; v_C = 10; u_2 = 1; u_3 = -2, v_B = 7.$$

Diperoleh Tabel:

	v_j	$v_A = 6$	$v_B = 7$	$v_C = 10$	
u_i		A	B	C	Pasokan
$u_1 = 0$	1	6 25	8	10 125	150
$u_2 = 1$	2	7	11	11 175	175
$u_3 = -2$	3	4 175	5 100	12	275
Permintaan		200	100	300	600

Untuk sel yang kosong berlaku :

$$x_{1B}: k_{1B} = c_{1B} - u_1 - v_B = 8 - 0 - 7 = 1$$

$$x_{2A}: k_{2A} = c_{2A} - u_2 - v_A = 7 - 1 - 6 = 0$$

$$x_{2B}: k_{2B} = c_{2B} - u_2 - v_B = 11 - 1 - 7 = 3$$

$$x_{3C}: k_{3C} = c_{3C} - u_3 - v_C = 12 - (-2) - 10 = 4. \text{ Perhatikan tidak ada nilai negatif berarti sudah optimal.}$$

- Ringkasan langkah-langkah metode distribusi yang dimodifikasi.
 - a. Tentukan solusi awal menggunakan salah satu dari ketiga metode yang ada.
 - b. Hitung nilai u_i dan v_j untuk setiap baris dan kolom dengan menerapkan formula $u_i + v_j = c_{ij}$ pada sel yang telah memiliki alokasi.
 - c. Hitung perubahan biaya, k_{ij} , untuk setiap sel kosong dengan menggunakan rumus $c_{ij} - u_i - v_j = k_{ij}$.
 - d. Alokasikan sebanyak mungkin ke sel kosong yang menghasilkan penurunan biaya bersih terbesar (k_{ij} yang paling negatif). Alokasi sesuai dengan lintasan stepping-stone untuk sel terpilih.
 - e. Ulangi langkah b sampai d sampai semua nilai k_{ij} positif atau nol.

6. Model Transportasi tidak Seimbang

Sering muncul permasalahan penawaran tidak seimbang dengan permintaan. Misalkan :

Tempat Panen	Jumlah yang ditawarkan
1. Kansas City	150
2. Omaha	175
3. Des Moines	275
	600 ton

Tempat Penggilingan	Jumlah yang diminta
A. Chicago	200
B. St. Louis	100
C. Cincinnati	350
	650 ton

Permintaan 650 ton sedangkan penawaran 600 ton. Untuk mengatasi persoalan ini ditambahkan peubah dummy pada baris.

- Suatu model tidak seimbang (Permintaan > Penawaran)

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	6	8	10	150
	2	7	11	11	175
	3	4	5	12	275
	<i>Dummy</i>	0	0	0	50
	Permintaan	200	100	350 (asalnya 300)	650

Baris *dummy* ditugaskan untuk memasok sebanyak 50 ton. Permintaan tambahan sebesar 50 ton yang tidak akan dipasok, akan dialokasikan ke sebuah sel dalam baris *dummy*. Sel-sel *dummy* ini sebenarnya merupakan variabel pengurang.

- Suatu model tidak seimbang (Penawaran > Permintaan)

		Tujuan				Pasokan
		A	B	C	Dummy	
Sumber	1	6	8	10	0	150
	2	7	11	11	0	175
	3	4	5	12	0	375 (awalnya 275)
	Permintaan	200	100	300	100	700

Penambahan sebuah baris atau kolom *dummy* tidak mempengaruhi solusi awal atau metode untuk menentukan solusi optimal. Sel-sel baris atau kolom *dummy* diperlakukan sama seperti sel lainnya dalam Tabel.

7. Degenerasi

Kondisi berikut dibawah ini dipenuhi dalam semua tabel yang memperlihatkan solusi permasalahan transportasi gandum.

m baris + n kolom - 1 = jumlah sel dengan alokasi.

Sebagai contoh pada sel seimbang sebelumnya berlaku $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$ sel dengan alokasi.

Tabel-tabel akan selalu mempunyai sel dengan alokasi. Jika kondisi ini tidak terpenuhi dan sel yang teralokasi mempunyai sel kurang dari $m + n - 1$, tabel dinyatakan terjadi degenerasi. Misalkan :

- Solusi Awal Biaya Sel Minimum

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	6	8	10	150
			100	50	
	2	7	11	11	250
				250	
3	4	5	12	200	
	200				
Permintaan	200	100	300	600	

Tabel diatas tidak memenuhi kondisi $m + n - 1 = 5$ sel. Alasannya untuk lintasan tertutup pada metode stepping-stone dan semua perhitungan $u_i + v_j = c_{ij}$ pada MODI tidak bisa dilengkapi. Untuk menciptakan suatu lintasan tertutup suatu sel artifisial harus diperlakukan seperti sel beralokasi, masukan nilai nol pada sebuah sel. Sel tersebut akan diperlakukan sebagaimana sel beralokasi baik pada stepping-stone ataupun MODI.

- Pengalokasian 0 pada sebuah sel bersifat acak, karena tidak ada jaminan pengalokasian 0 pada sebuah sel akan terbentuk semua lintasan.
- Contoh jika 0 dialokasikan ke sel 2B bukannya sel 1A tidak ada satupun lintasan stepping stone akan terbentuk .

Solusi awal 0 dialokasikan ke sel 1A

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	6 0	8 100	10 50	150
	2	7	11	11 250	
	3	4 200	5	12	
Permintaan	200	100	300	600	

$$x_{2A}: 2A \rightarrow 2C \rightarrow 1C \rightarrow 1A;$$

$$7 \quad -11 \quad 10 \quad -6 = 0$$

$$x_{3B}: 3B \rightarrow 1B \rightarrow 1A \rightarrow 3A;$$

$$5 \quad -8 \quad 6 \quad -4 = -1$$

$$x_{2B}: 2B \rightarrow 2C \rightarrow 1C \rightarrow 1B;$$

$$11 \quad -11 \quad 10 \quad -8 = 2$$

$$x_{3C}: 3C \rightarrow 1C \rightarrow 1A \rightarrow 3A;$$

$$12 \quad -10 \quad 6 \quad -4 = 4$$

- Pengulangan Stepping-stone kedua

		Tujuan			Pasokan
		A	B	C	
Sumber	1	6 100	8 100	10 50	150
	2	7 100	11 100	11 250	250
	3	4 100	5 100	12 100	200
	Permintaan	200	100	300	600

Berlaku $m + n - 1 = 5$

8. Rute yang Dilarang

Kadangkala satu atau lebih rute tidak boleh dilalui. Dalam hal ini ditambahkan nilai biaya M (angka yang sangat besar) pada sel dengan rute yang tidak boleh dilalui tersebut. Cara ini sama seperti pada metode simplek yang menambahkan nilai M pada peubah artifisial.

Model Penugasan

- Model penugasan adalah model khusus dari program linear yang mirip dengan model transportasi. Perbedaannya adalah setiap penawaran pada setiap sumber dan permintaan pada setiap tujuan dibatasi hanya 1 unit saja. Model penugasan ada dua berdasarkan tujuannya yaitu meminimumkan dan memaksimumkan.

Model Penugasan untuk Meminimumkan

- Contoh penugasan tim oleh sebuah organisasi untuk memantau 4 pertandingan. Jarak tempuh, Tim, dan lokasi pertandingan adalah sebagai berikut:

Tim	Lokasi pertandingan			
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson
A	210	90	180	160
B	100	70	130	200
C	175	105	140	170
D	80	65	105	120

Tabel penugasan dengan pengurangan baris

Tim	Lokasi pertandingan			
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson
A	120	0	90	70
B	30	0	60	130
C	70	0	35	65
D	15	0	40	55

- Tabel dengan pengurangan kolom

Tim	Lokasi pertandingan			
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson
A	105	0	55	15
B	15	0	25	75
C	55	0	0	10
D	0	0	5	0

- Tabel dengan garis pengujian. Coret semua angka nol dengan menggunakan banyaknya garis semimumimum mungkin.

Tim	Lokasi pertandingan			
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson
A	105	0	55	15
B	15	0	25	75
C	55	0	0	10
D	0	0	5	0

- Disebabkan banyaknya garis belum sama dengan banyak baris yaitu 4 baris maka nilai yang tidak dicoret dikurangkan dengan nilai yang terkecil. Lalu nilai terkecil tersebut dijumlahkan dengan nilai yang ada pada perotongan garis.

Tim	Lokasi pertandingan			
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson
A	90	0	40	0
B	0	0	10	60
C	55	15	0	10
D	0	15	5	0

- Coret semua nol dengan menggunakan banyaknya garis yang seminimum mungkin. Lihat Tabel di bawah, karena banyaknya baris sudah sama dengan banyaknya garis maka solusi yang unix sudah dapat diperoleh.

Tim	Lokasi pertandingan			
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson
A	90	0	40	0
B	0	0	10	60
C	55	15	0	10
D	0	15	5	0

Penugasan	Lokasi	Jarak
Tim A	Atlanta	90
Tim B	Raleigh	100
Tim C	Durham	140
Tim D	Clemson	120
		450 mil

Penugasan	Lokasi	Jarak
Tim A	Clemson	160
Tim B	Atlanta	70
Tim C	Durham	140
Tim D	Raleigh	80
		450 mil

- Seandainya ditemukan model penugasan tidak seimbang maka ditambahkan dummy. Sebagai contoh ada 5 tim pemantau dan 4 lokasi pertandingan, maka tambahkan kolom dummy untuk lokasi pertandingan.

Tim	Lokasi pertandingan				Dummy
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson	
A	210	90	180	160	0
B	100	70	130	200	0
C	175	105	140	170	0
D	80	65	105	120	0
E	95	115	120	100	0

- Hasil pengurangan pada masing-masing kolom oleh nilai yang terkecilnya.

Tim	Lokasi pertandingan				
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson	Dummy
A	130	25	75	60	0
B	20	5	25	100	0
C	95	40	35	70	0
D	0	0	0	20	0
E	15	50	15	0	0

- Coret semua bilangan nol dengan menggunakan banyaknya garis sesedikit mungkin

Tim	Lokasi pertandingan				
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson	Dummy
A	130	25	75	60	0
B	20	5	25	100	0
C	95	40	35	70	0
D	0	0	0	20	0
E	15	50	15	0	0

- Hasil pengurangan pada nilai yang tidak kena garis dengan nilai yang terkecil dari bilangan-bilangan yang tidak kena garis tersebut. Lalu nilai yang terkecil tersebut dijumlahkan dengan nilai pada perpotongan garis.

Tim	Lokasi pertandingan				
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson	Dummy
A	125	20	70	55	0
B	15	0	20	95	0
C	90	35	30	65	0
D	0	0	0	20	5
E	15	50	15	0	5

- Coret semua nilai nol dengan menggunakan banyaknya garis semimum mungkin

Tim	Lokasi pertandingan				
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson	Dummy
A	125	20	70	55	0
B	15	0	20	95	0
C	90	35	30	65	0
D	0	0	0	20	5
E	15	50	15	0	5

- Karena banyaknya garis belum sama dengan banyaknya baris (5 baris) maka nilai-nilai yang belum tercoret dikurangi dengan nilai terkecil pada nilai-nilai yang belum tercoret tersebut. Lalu tambahkan nilai terkecil pada nilai yang ada diperpotongan garis.

Tim	Lokasi pertandingan				
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson	Dummy
A	110	5	55	55	0
B	15	0	20	110	15
C	75	20	15	65	0
D	0	0	0	35	20
E	0	35	0	0	20

- Coret semua nilai nol dengan menggunakan banyaknya garis seminimum mungkin

Tim	Lokasi pertandingan				
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson	Dummy
A	110	5	55	55	0
B	15	0	20	110	15
C	75	20	15	65	0
D	0	0	0	35	20
E	0	35	0	0	20

- Karena banyaknya garis belum sama dengan banyaknya baris (5 baris) maka nilai-nilai yang belum tercoret dikurangi dengan nilai terkecil pada nilai-nilai yang belum tercoret tersebut. Lalu tambahkan nilai terkecil pada nilai yang ada diperpotongan garis.

Tim	Lokasi pertandingan				
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson	Dummy
A	105	0	50	50	0
B	15	0	20	110	20
C	70	15	10	60	0
D	0	0	0	35	25
E	0	35	0	0	25

- Coret semua nilai nol dengan menggunakan banyaknya garis semimum mungkin

Tim	Lokasi pertandingan				
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson	Dummy
A	105	0	50	50	0
B	15	0	20	110	20
C	70	15	10	60	0
D	0	0	0	35	25
E	0	35	0	0	25

- Karena banyaknya garis belum sama dengan banyaknya baris (5 baris) maka nilai-nilai yang belum tercoret dikurangi dengan nilai terkecil pada nilai-nilai yang belum tercoret tersebut. Lalu tambahkan nilai terkecil pada nilai yang ada diperpotongan garis.

Tim	Lokasi pertandingan				
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson	Dummy
A	95	0	40	40	0
B	5	0	10	100	20
C	60	15	0	50	0
D	0	10	0	35	35
E	0	45	0	0	35

- Coret semua nilai nol dengan menggunakan sebanyak garis seminimum mungkin

Tim	Lokasi pertandingan				
	Raleigh	Atlanta	Durham	Clemson	Dummy
A	95	0	40	40	0
B	5	0	10	100	5
C	60	15	0	50	0
D	0	10	0	35	35
E	0	45	0	0	20

- Oleh karena itu pembagian tugasnya adalah :

Tim	Lokasi	Biaya
A	Dummy	0
B	Atlanta	70
C	Durham	140
D	Raleigh	80
E	Clemson	100
Total Biaya		390

- Ringkasan untuk menemukan solusi pada persoalan penugasan:
 - a. Lakukan pengurangan baris dengan cara mengurangi nilai terendah pada baris tersebut dari unsur-unsur baris lainnya.
 - b. Lakukan pengurangan kolom dengan cara mengurangi nilai terendah pada kolom tersebut dari unsur-unsur pada kolom lainnya.
 - c. Tarik sejumlah garis horisontal atau vertikal untuk mencoret angka nol pada tabel biaya opportunity yang lengkap.
 - d. Jika diperlukan garis lagi karena belum mencapai m garis, maka semua nilai lain yang tidak tercoret dikurangkan nilai terendah dari nilai—nilai yang tidak tercoret tersebut. Kemudian nilai terendah tersebut ditambah pada sel-sel dimana dua baris berpotongan, sedangkan nilai yang lain tetap, dan ulangi langkah c.
 - e. Jika ditemukan garis sebanyak m , maka solusi optimal tercapai sehingga dapat dilakukan m penugasan yang unik. Jika diperlukan garis lagi untuk mencapai m garis maka ulangi langkah d.

Model Penugasan untuk Memaksimumkan

- Contoh : ada 3 salesman untuk 3 daerah pemasaran dengan perkiraan penjualan sebagai berikut :

		Pasar		
		P	Q	R
Salesman	A	25	31	35
	B	15	20	24
	C	22	19	17

- Langkah pertama mencari penugasan maksimum adalah menyusun Tabel Regret dengan cara kurangkan nilai terbesar dengan nilai yang ada pada masing-masing baris.

		Pasar		
		P	Q	R
Salesman	A	10	4	0
	B	9	4	0
	C	0	3	5

Model Penugasan untuk Memaksimumkan

- Tabel opportunity cost dengan pengurangan baris dan kolom. Pengurangan baris dilakukan dengan mengurangi nilai pada baris oleh nilai yang terkecilnya. Sedangkan pengurangan kolom diselenggarakan dengan mengurangi nilai-nilai pada kolom oleh nilai terkecil pada kolom yang bersangkutan.

		Pasar		
		P	Q	R
Salesman	A	10	1	0
	B	9	1	0
	C	0	0	5

- Coret semua angka nol dengan banyaknya garis seminimum mungkin.

		Pasar		
		P	Q	R
Salesman	A	10	1	0
	B	9	1	0
	C	0	0	5

Model Penugasan untuk Memaksimumkan

- Karena banyaknya garis tidak sama dengan banyaknya baris (3) maka nilai yang tidak tecoret oleh garis dikurangi oleh nilai yang paling minimumnya. Lalu nilai minimum tersebut ditambahkan pada nilai di garis yang berpotongan.

		Pasar		
		P	Q	R
Salesman	A	9	0	0
	B	8	0	0
	C	0	0	6

- Karena jumlah garis samadengan jumlah baris maka solusi unix sudah diperoleh. Tabel di bawah adalah solusi dan alternatif.

Salesman	Pasar	
A	Q	31
B	R	24
C	P	22
Banyaknya penjualan		77

Salesman	Pasar	
A	R	35
B	Q	20
C	P	22
Banyaknya penjualan		77