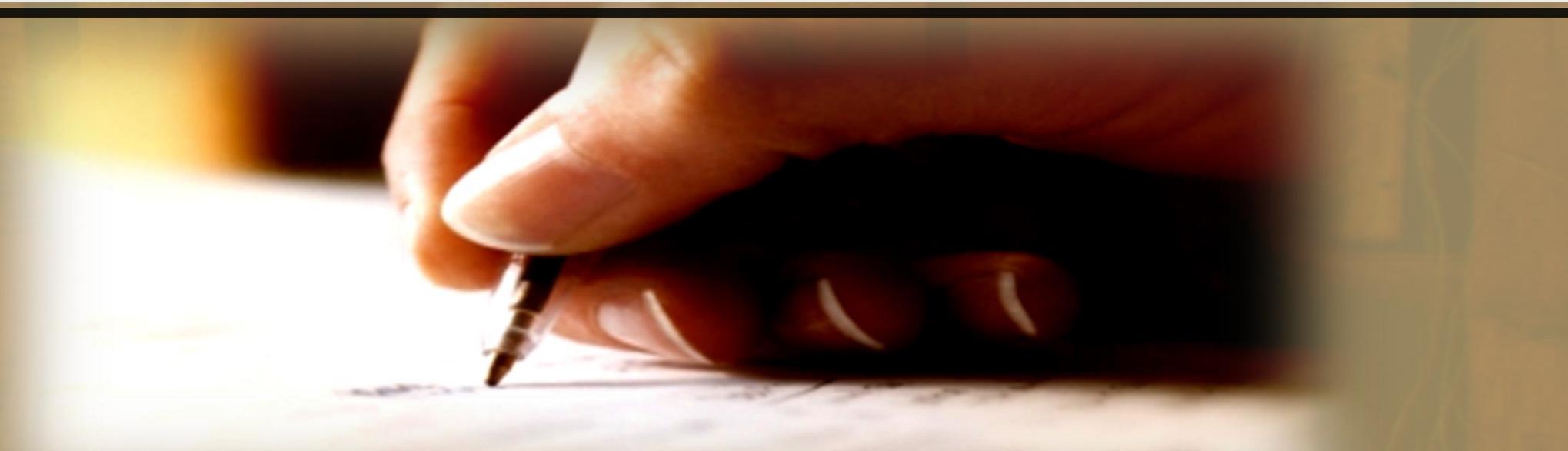




**Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya**

DEPARTEMEN TEKNIK FISIKA - FTI



VARIABEL ACAK JAMAK

Oleh: Aulia Siti Aisjah

Karakteristik Variabel Acak

Capaian Pembelajaran:

Mampu mengidentifikasi variable acak jamak dan menentukan karakteristik variable acak jamak

Kajian:

1. Pendahuluan – Var. Acak Jamak
2. Fs Distribusi Gabungan
3. Fs Marginal





PENDAHULUAN

Variabel acak jamak

Apa yang disebut dengan Var. acak Jamak?

Variabel acak jamak dapat ditemui pada saat kejadian dengan melibatkan lebih dari 1 variabel

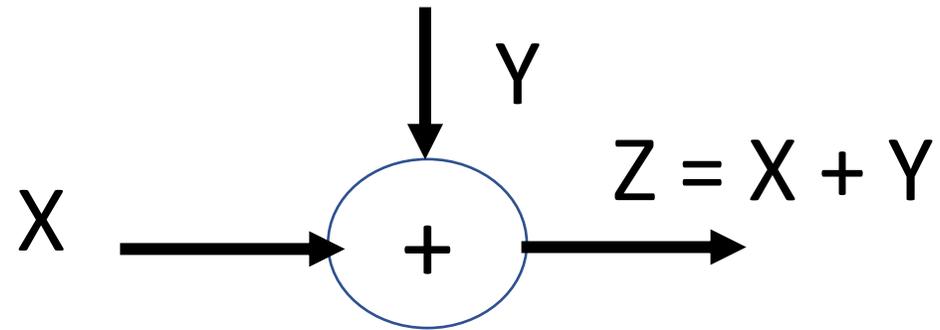
Sebagai contoh:

Kejadian pelemparan dua buah dadu, misalkan didefinisikan bahwa Variabel acak X adalah kejadian diperolehnya jumlah titik dadu < 3 , Variabel acak Y adalah kejadian diperolehnya jumlah titik dadu > 2

Karena dua dadu dilempar bersamaan, maka selalu terjadi pasangan variabel acak X dan Y , dituliskan (X,Y)

Hitung besarnya fungsi distr var acak $(X, Y) = f(X,Y)$ untuk kejadian di atas

Dua buah variabe / sinyal



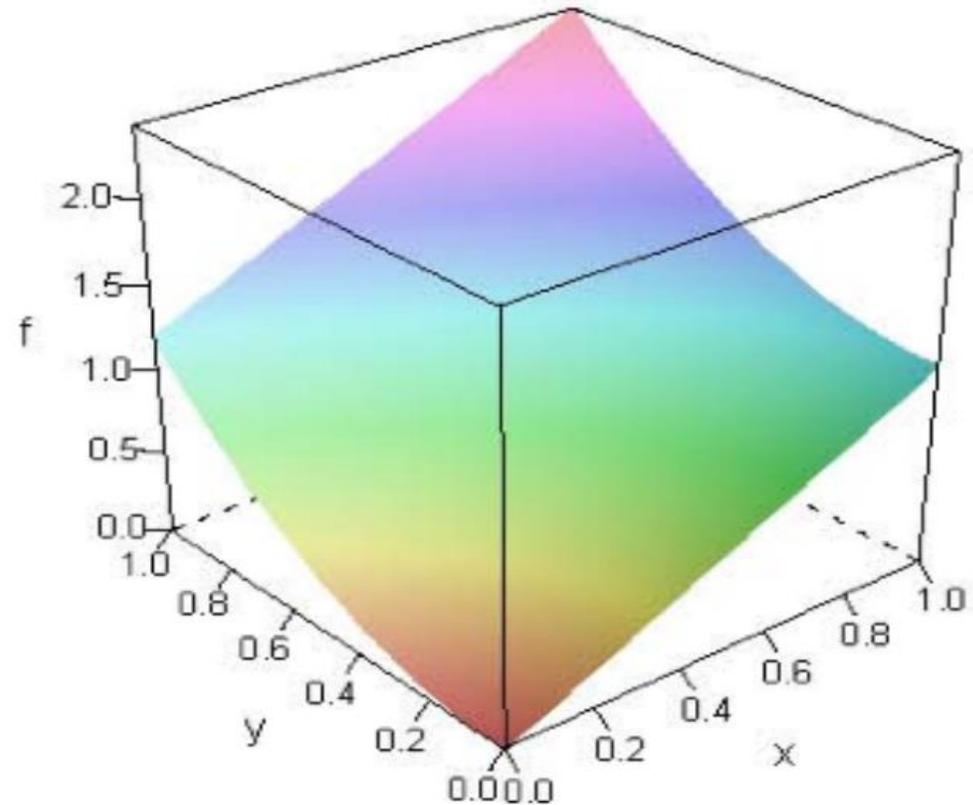
Besarnya probabilitas dari setiap nilai Variabel acak Jamak,
(contoh)

$$P(X = x, Y = y)$$

x

	1	2	3
1	0	1/6	1/6
2	1/6	0	1/6
3	1/6	1/6	0

$$f_{X,Y}(x,y).$$



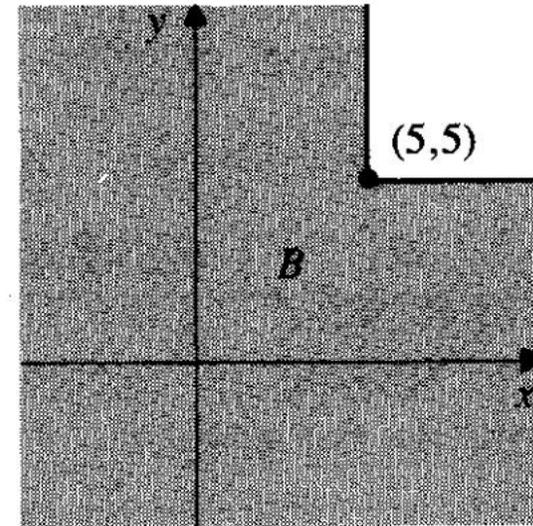
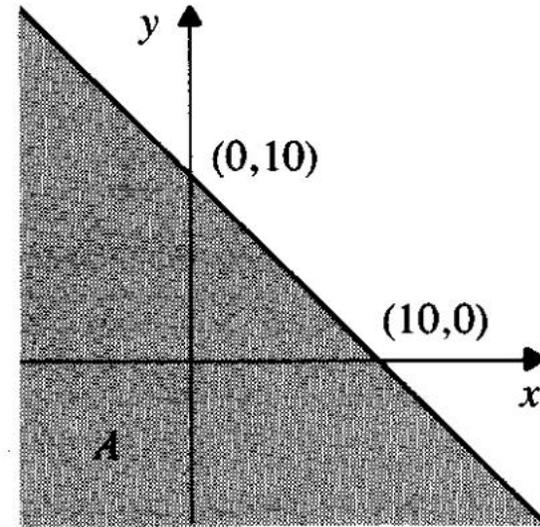
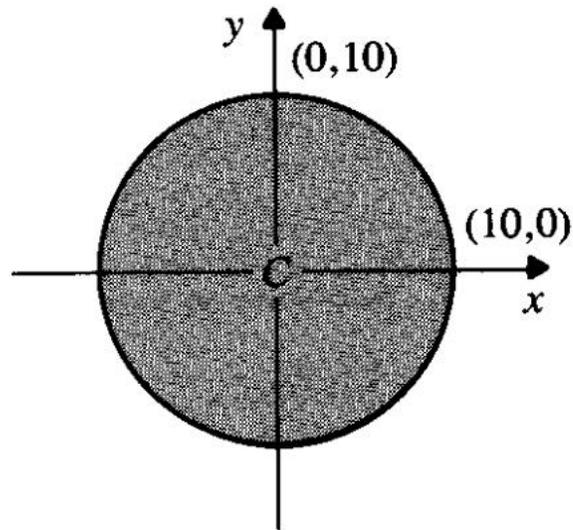
Contoh

$$\mathbf{X} = (X, Y).$$

$$A = \{X + Y \leq 10\},$$

$$B = \{\min(X, Y) \leq 5\}$$

$$C = \{X^2 + Y^2 \leq 100\}.$$





FS DISTRIBUSI GABUNGAN

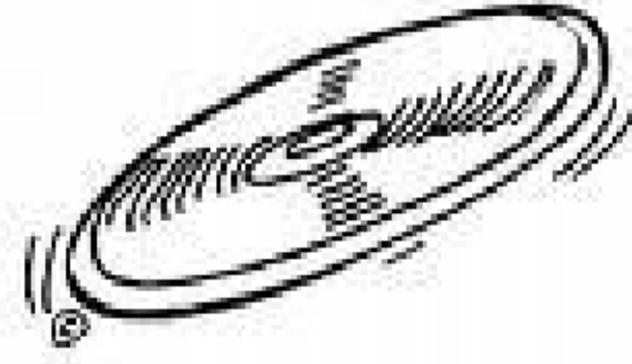
Variabel acak jamak

Jika X dan Y adalah variable acak diskrit,
maka fungsi distribusi jamak dikatakan
Fs distribusi probabilitas massa gabungan
joint probability mass function

Jika X dan Y adalah variable acak kontinyu,
maka fungsi distribusi jamak dikatakan
Fs distribusi rapat massa gabungan
joint probability density function

Contoh – pengukuran Panjang dan lebar – plastic yang digunakan untuk cover / penutup sebuah CD

Bila X adalah Panjang cover, Y adalah lebar cover, dan kemungkinan nilai dari X dan Y adalah:



Probabilitas untuk masing-masing pasangan nilai Var acak

$$X = \{129, 130, 131\}$$

$$Y = \{15, 16\}$$

X dan Y variable acak diskrit

		x=length		
		129	130	131
y=width	15	0.12	0.42	0.06
	16	0.08	0.28	0.04

		x=length		
		129	130	131
y=width	15	0.12	0.42	0.06
	16	0.08	0.28	0.04

$$f_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

$$f_{XY}(129, 15) = 0.12.$$

Tuliskan nilai fungsi distribusi rapat massa untuk pasangan nilai yang lain



SIFAT FS DISTRIBUSI GABUNGAN

Variabel acak jamak

Variabel acak jamak dapat ditemui pada saat kejadian dengan melibatkan lebih dari 1 variabel

Karakteristik Fungsi Distribusi Probabilitas Variabel Acak Jamak diskrit

$$(1) \quad f_{XY}(x, y) \geq 0$$

$$(2) \quad \sum_x \sum_y f_{XY}(x, y) = 1$$

$$(3) \quad f_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

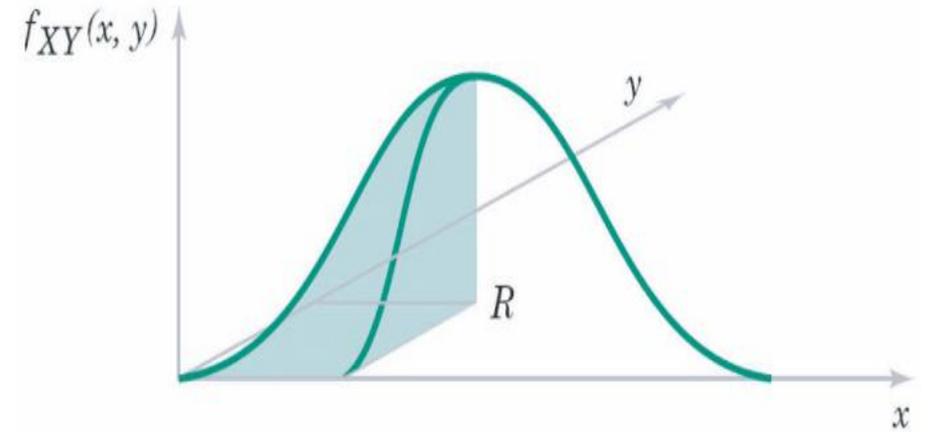
Karakteristik Fungsi Distribusi Probabilitas Variabel Acak Jamak Kontinyu

1. $f_{XY}(x, y) \geq 0$ Untuk seluruh nilai x dan y

2.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$$

3. Untuk daerah lain dalam 2 dimensi (X, Y) besarnya probabilitas

$$P((X, Y) \in R) = \int \int_R f_{XY}(x, y) dx dy$$





FS DISTRIBUSI MARGINAL

Variabel acak jamak

Tentukan besarnya probabilitas bahwa CD akan di tutupi oleh cover yang panjangnya 129 mm ($x = 129$ mm)

		x= length		
		129	130	131
y=width	15	0.12	0.42	0.06
	16	0.08	0.28	0.04

$$\begin{aligned} P(x = 129) &= P(x = 129 \text{ dan } y = 15) + \\ &\quad P(x=129 \text{ dan } y = 16) \\ &= 0.12 + 0.08 \end{aligned}$$

Perhatikan Kembali – tabel distribusi probabilitas variable acak jamak (contoh cover CD)

		x= length		
		129	130	131
y=width	15	0.12	0.42	0.06
	16	0.08	0.28	0.04
		0.20	0.70	0.10



Lihat total kolom

x	129	130	131
$f_X(x)$	0.20	0.70	0.10

		x= length			
		129	130	131	
y=width	15	0.12	0.42	0.06	0.60
	16	0.08	0.28	0.04	0.40
		0.20	0.70	0.10	1



Lihat total baris

y	15	16
$f_Y(y)$	0.60	0.40

Karena fungsi distribusi massa untuk X dan Y muncul pada margin (batas) di setiap Table (yaitu pada kolom dan baris),
dehingga seringkali dikatakan sebagai

Distribusi marginal X dan Y

Fungsi distribusi marginal untuk Var. acak diskrit

$$f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x, y)$$

$$f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x, y)$$

Contoh: Cover CD

x	129	130	131
$f_X(x)$	0.20	0.70	0.10

Fungsi distribusi marginal untuk Var. acak kontinyu

$$f_X(x) = \int_y f_{XY}(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_x f_{XY}(x, y) dx$$

2 Baterai diambil secara acak tanpa pengembalian dari sejumlah 12 baterai berikut ini: 3 Baru (B), 4 Sudah Terpakai (T), dan 5 Rusak (R)

Bila Variabel acak:

X: jumlah baterai Baru (B) yang dipilih, dan

Y: jumlah baterai yang sudah Terpakai (T) yang dipilih

Tentukan: (a) $f_{xy}(x, y)$, (b) $E(X)$

a. Kemungkinan nilai $X = (0, 1, 2)$, dan

$Y = (0, 1, 2)$

Sedangkan kejadian ini memungkinkan Variabel X berpasangan dengan Y maka dikatakan bahwa terbentuk variabel acak jamak

Dalam hal ini: $X + Y \leq 2$

Sehingga tidak semua kombinasi dari (X, Y) adalah kemungkinan yang terjadi

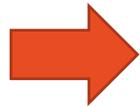
Terdapat 6 kemungkinan \rightarrow kombinasi 2 dari 3

Saat: $B = 0$, dan $T = 0 \rightarrow (X=0, Y=0)$



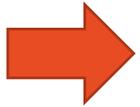
$$f_{XY}(0, 0) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = 10/66$$

Saat: $B = 0$, dan $T = 1 \rightarrow (X=0, Y=1)$



$$f_{XY}(0, 1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{5}{1}}{\binom{12}{2}} = 20/66$$

Saat: $B = 0$, dan $T = 2 \rightarrow (X=0, Y=2)$



$$f_{XY}(0, 2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = 6/66$$

Saat: $B = 1$, dan $T = 0 \rightarrow (X=1, Y=0)$

$$f_{XY}(1, 0) = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{1}}{\binom{12}{2}} = 15/66$$

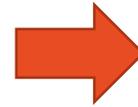
Saat: $B = 2$, dan $T = 0 \rightarrow (X=2, Y=0)$

$$f_{XY}(2, 0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{12}{2}} = 3/66$$

Ingat $X + Y \leq 2$

Kemungkinan kejadian terakhir

Saat: $B = 1$, dan $T = 1 \rightarrow (X=1, Y=1)$



$$f_{XY}(1, 1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} = 12/66$$

Dibentuk Tabel Distribusi Probabilitas



$$\sum_x \sum_y f_{XY}(x, y) = 1.$$

X

	Y		
	0	1	2
0	10/66	15/66	3/66
1	20/66	12/66	
2	6/66		

Contoh:

2 Ballpoint diambil dari sebuah kotak, dimana di dalam kotak terdapat 3 warna Biru (B), 2 warna Merah (M), dan 3 warna Hijau (H). Jika variabel acak X didefinisikan sebagai jumlah polpen Biru (B) yang terpilih dan Y adalah jumlah polpen Merah (M) yang terpilih, maka:

(a) Tentukan fungsi distribusi probabilitas gabungan $f(x, y)$

(b) $P(X, Y) \in A$, dimana A di dalam daerah yang memenuhi $\{(x, y) \mid x + y \leq 1\}$



Kejadian yang dikatakan distribusi ?

Latihan soal

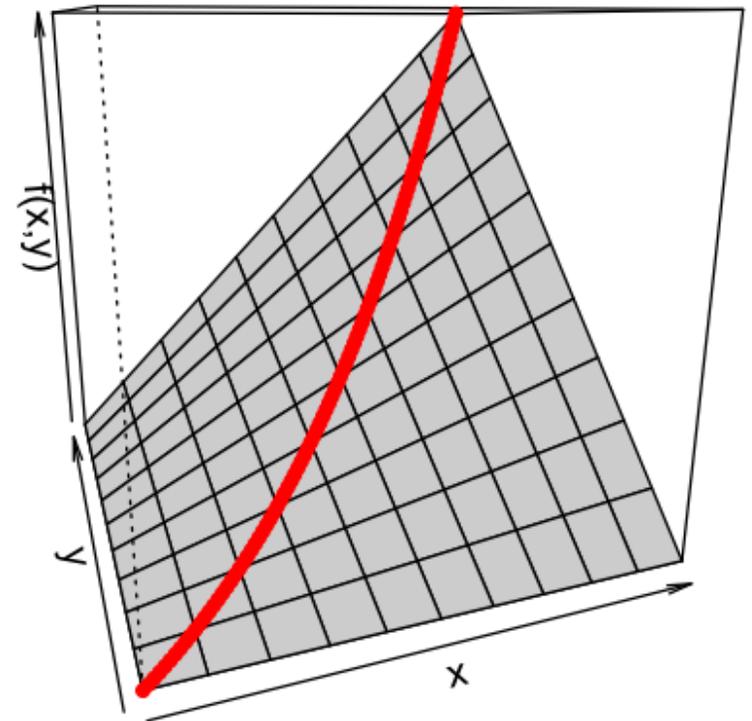
Model Gerakan partikel dalam sebuah daerah A, yang dibatasi oleh garis $x = 1$ dan garis $y = 1$.

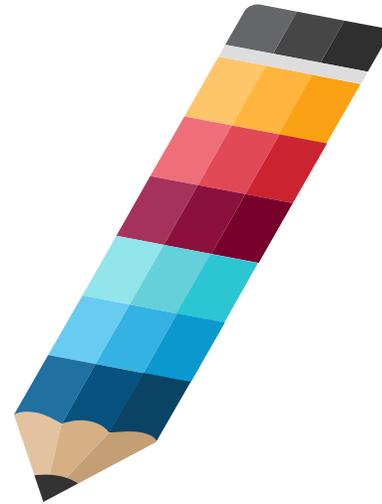
Bila (X, Y) sebagai posisi partikel pada saat ttt, serta fungsi kerapatan probabilitas adalah:

$$f_{XY}(x, y) = 8xy \quad \text{utk} \quad (x, y) \in A$$

Secara grafik besarnya fs kerapatan probabilitas
Tentukan

1. $P(0.5 < X < 1, 0 < Y < 0.5)$
2. $P(0 < X < 0.5, 0 < Y < 0.5)$
3. $P(0.5 < X < 1, 0.5 < Y < 1)$





Catat semua informasi yang tidak tertulis di dalam slide



Terimakasih