Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya

DEPARTEMEN TEKNIK FISIKA - FTI

KAREKTERISTIK FS VARIABEL ACAK JAMAK

Oleh: Aulia Siti Aisjah

Karakteristik Fungsi Variabel Acak Jamak

Capaian Pembelajaran:

Mampu mengidentifikasi variable acak jamak dan menentukan karakteristik variable acak jamak

Kajian:

1. Probabilitas Bersyarat
2. Variabel acak jamak yang independent
3. Operasi Operator E pada Variabel acak jamak
4. Fs Distribusi Gabungan dan Fs distribusi bersyarat
5. Kovarian dan Korelasi

1

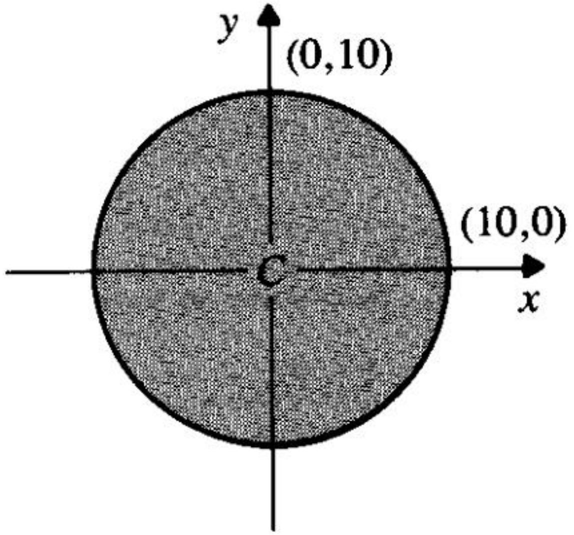
PROBABILITAS BERSYARAT

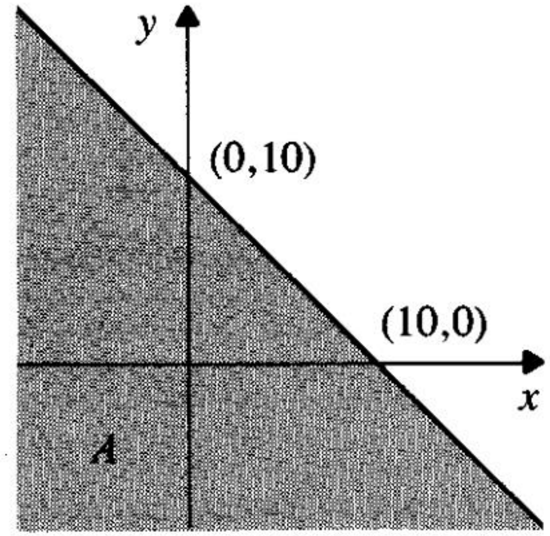
Variabel acak jamak

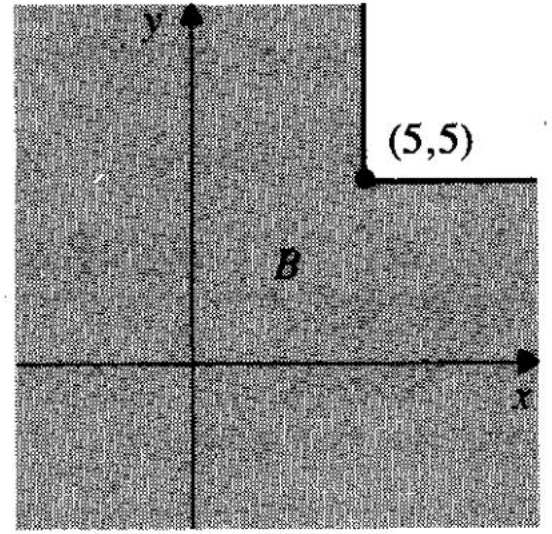
Contoh pada M7.1

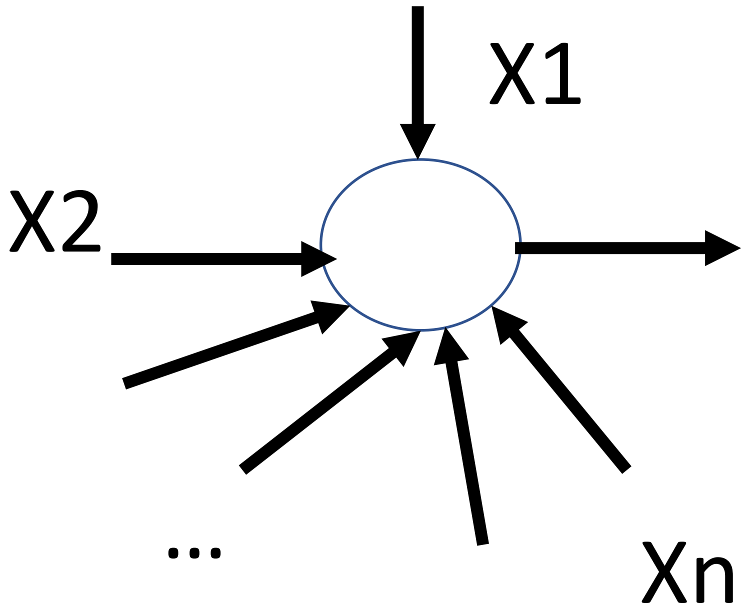
$$\boldsymbol{X} = (X, Y).$$

$$A = \{X + Y \leq 10\},$$
$$B = \{min(X, Y) \leq 5\}$$
$$C = \{X^2 + Y^2 \leq 100\}.$$









Variabel acak **X** berdimensi n

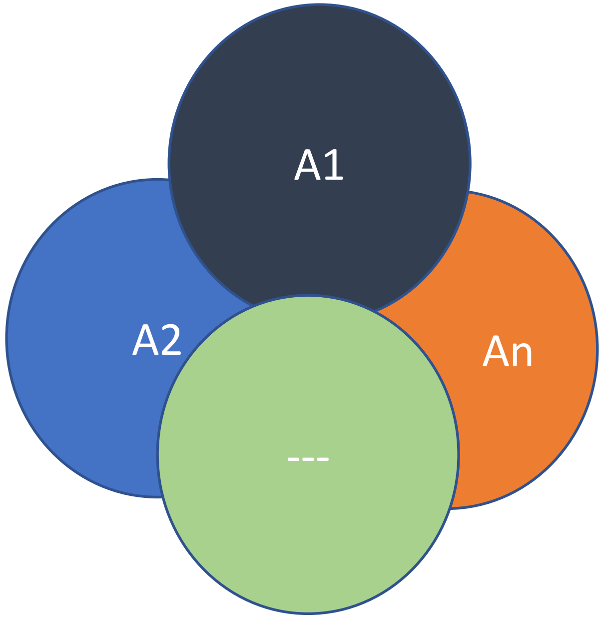
$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

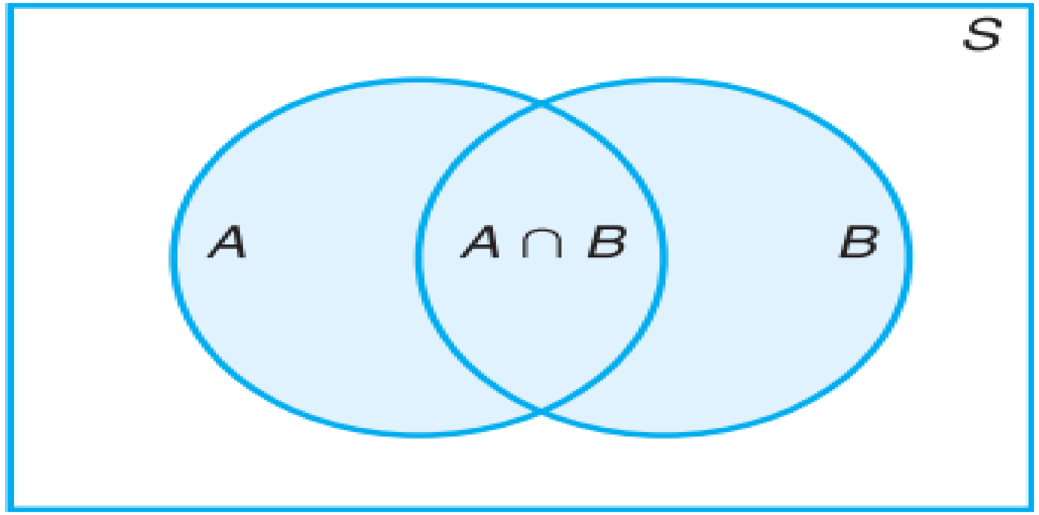
Bila Ak adalah kejadian untuk 1 dimensi yang hanya melibatkan Xk

Maka bentuk perkalian kejadian didefinisikan sebagai

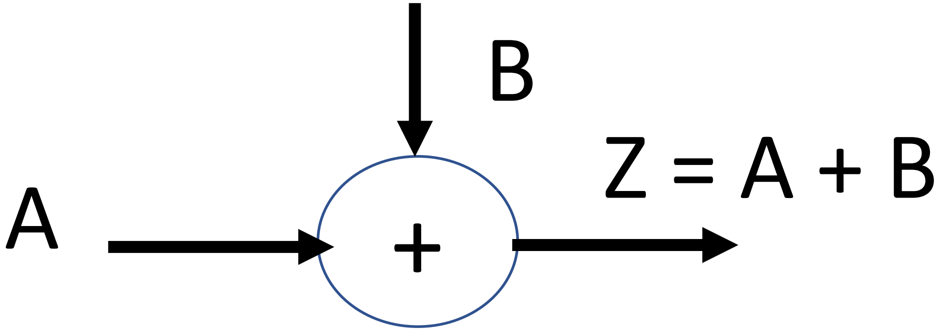
$$A = \{X_1 \in A_1\} \cap \{X_2 \in A_2\} \cap \cdots \cap \{X_n \in A_n\}.$$

$$\begin{aligned} P[A] &= P[\{X_1 \in A_1\} \cap \{X_2 \in A_2\} \cap \cdots \cap \{X_n \in A_n\}] \\ &\triangleq P[X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n]. \end{aligned}$$





Aturan untuk penjumlahan probabilitas Kejadian dua variable acak



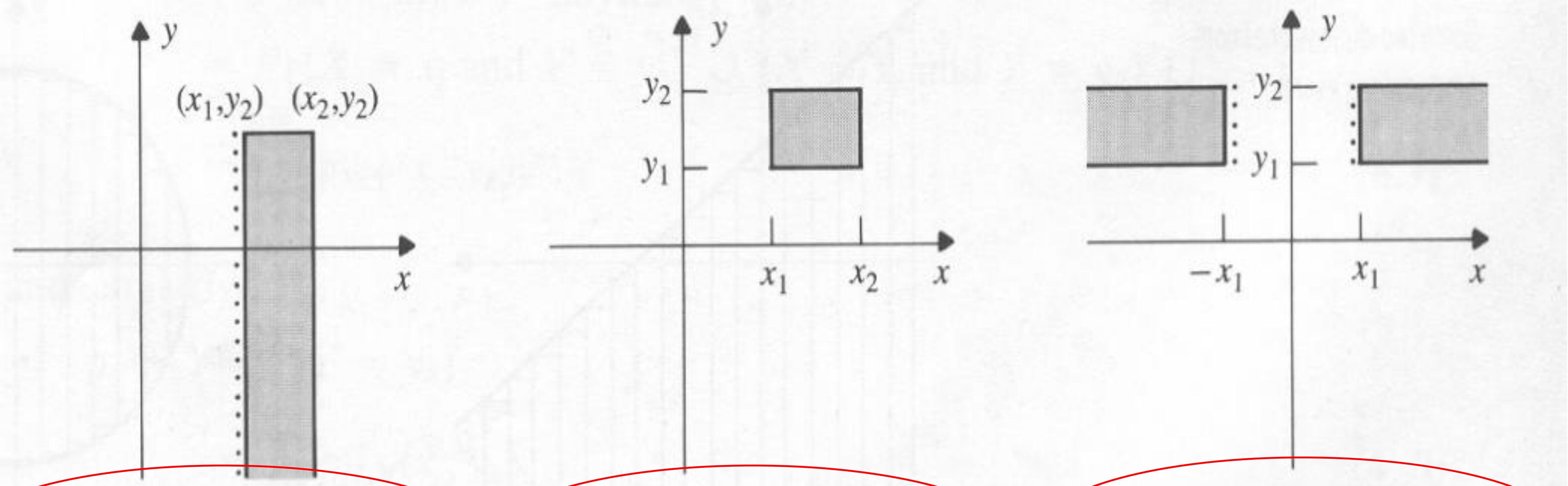
Kejadian

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

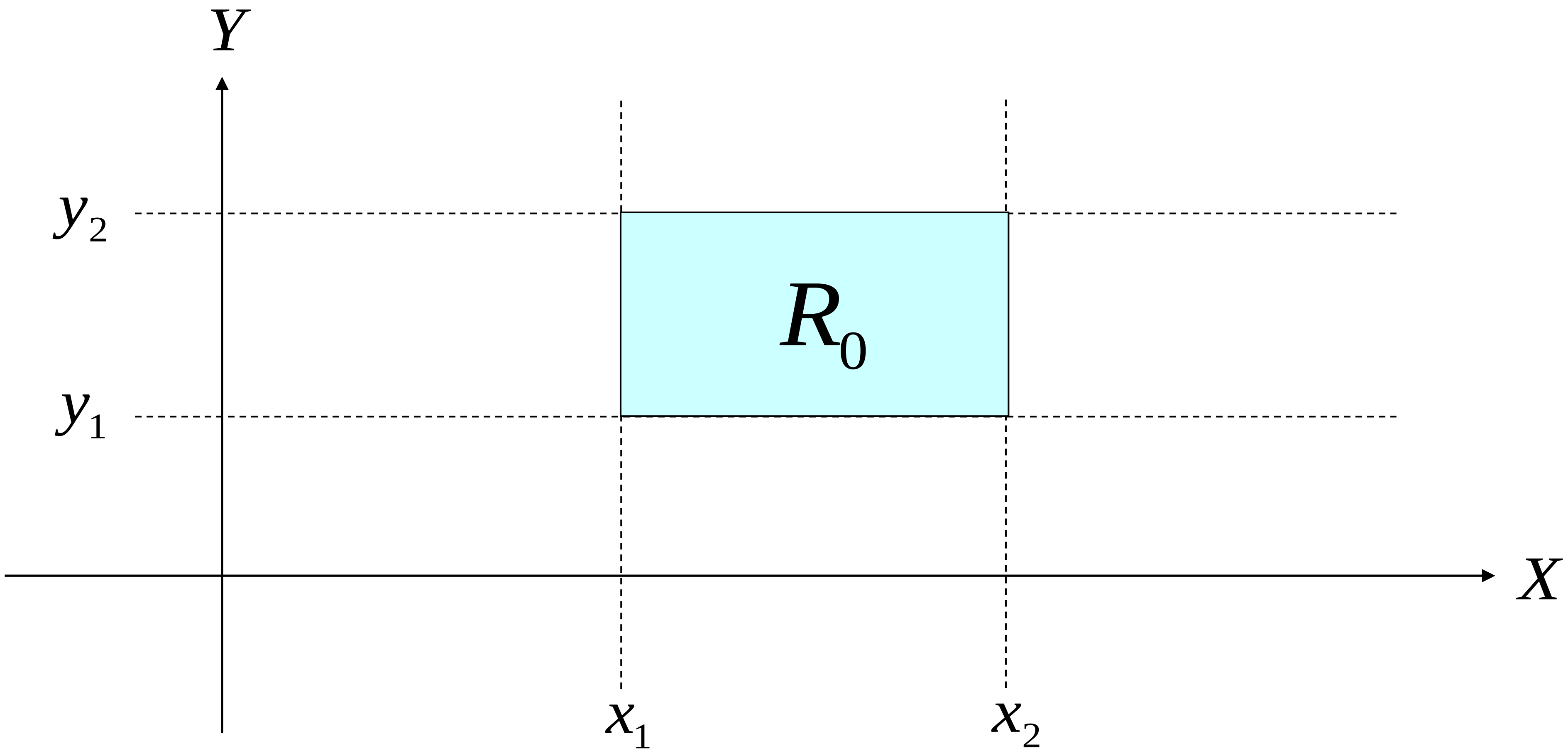
Kejadian mutually exclusive

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Contoh “kejadian perkalian dua dimensi variable acak”

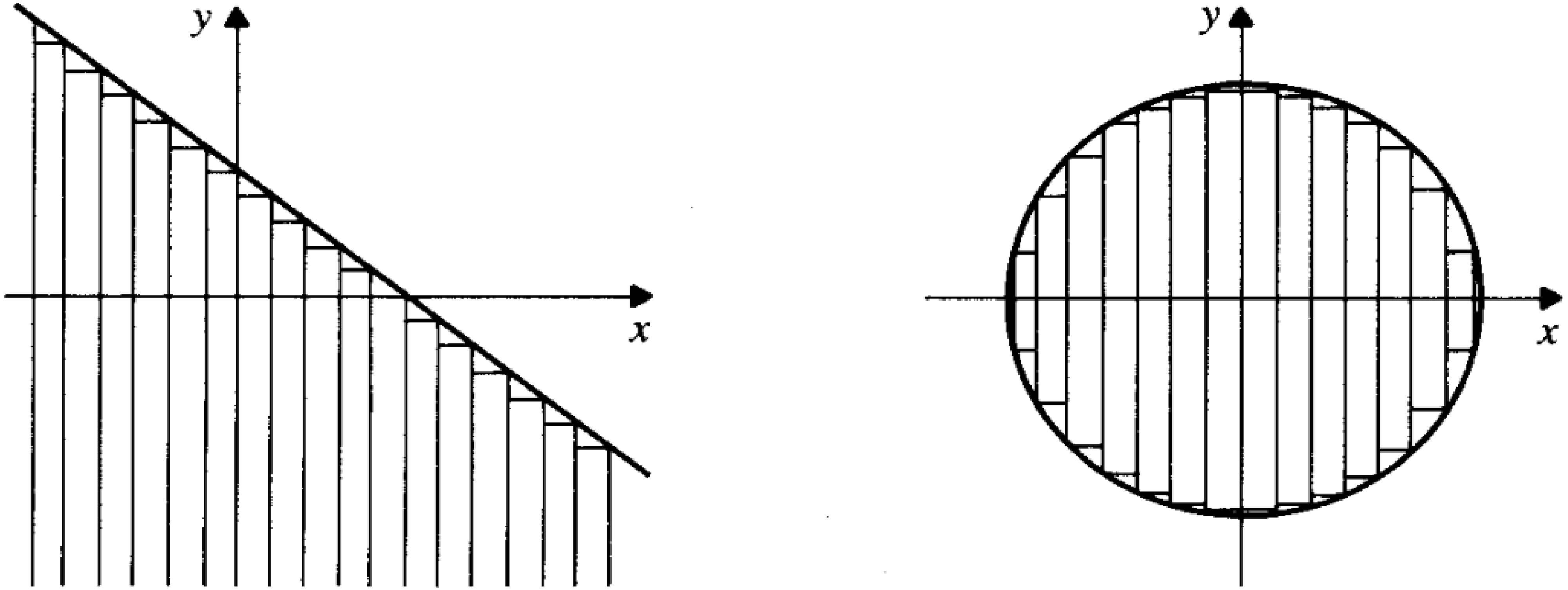


$\{x_1 < X \leqslant x_2\} \cap \{Y \leqslant y_2\}$ $\quad$ $\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} \cap \{y_1 \leqslant Y \leqslant y_2\}$ $\quad$ $\{|X| > x_1\} \cap \{y_1 \leqslant Y \leqslant y_2\}$



Perhatikan kejadian dimana – terdapat area gabungan (sebagai interseksi)

Contoh “kejadian yg bukan perkalian dua dimensi variable acak”



Jika A1, A2, … An adalah kejadian yang dikatakan mutually exclusive

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Kumpulan kejadian A1 .. An akan menempati ruang sampel S yang dikatakan partisi dari S jika A1, .. An adalah kejadian yang mutually exclusive dan akan menyebabkan A1 U A2 .. An = S

Jika A1 .. An menempati ruang sample S, maka

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = P(S) = 1.$$

Probabilitas bersyarat untuk kejadian B dengan syarat terjadi kejadian A dituliskan dengan P(B!A)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \text{provided} \quad P(A) > 0.$$

Contoh:

Tegangan PLN didefinisikan sebagai variable acak, V, diketahui bersidtribusi Normal dengan mean 220 Volt, dan variansi 4 Volt^2 dan dikenakan pada beban yang bersifat resistor murni sebesar 1000 ohm. Berapakah probabilitas tegangan pada beban sebesar V bernilai > 220 Volt, pada saat (dengan syarat) arus bernilai < 50 Ampere

B = {V > 2020}

A = {I < 50}

P(BIA)

Contoh:
Buku Walpole (hal. 26 → 2.6)

Table 2.1: Categorization of the Adults in a Small Town

	Employed	Unemployed	Total
Male	460	40	500
Female	140	260	400
Total	600	300	900

Populasi jumlah orang dewasa di suatu kota ttt, yang telah lulus dari sebuah Universitas. Dikategorikan sebagai laki2 dan perempuan, serta jumah yang telah bekerja maupun yang belum.

Salah satu orang dipilih secara acak
Bila:
M adalah satu orang laki2 (M) terpilih
E adalah satu orang pekerja (employed) terpilih
Maka dengan menggunakan rumus prob.
Bersayarat:

$$\mathrm{P(B|A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}}$$

$$\mathrm{P(M|E)} = \frac{\mathrm{n(E \cap M)}}{\mathrm{n(B)}} = \frac{n(E \cap M)/n(S)}{n(E)/n(S)}$$

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}$$

$$\mathrm{P(M|E)} = \frac{\mathrm{P(E \cap M)}}{\mathrm{P(B)}} = \frac{460}{900} = \frac{23}{45}$$

Contoh lain

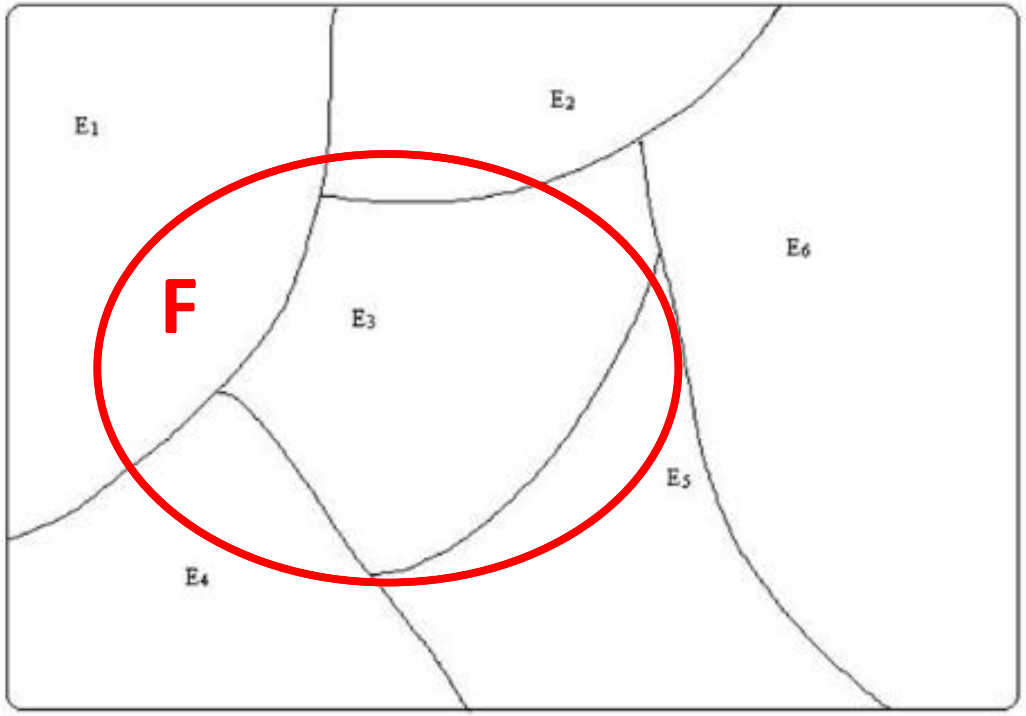
Lihat buku Walpole
Example 2.34 dan 2.35

2

PRASYARAT – TEORI PROBABILITAS

Variabel acak jamak

Sebuah semesta pembicaraan (S) merupakan ruang dimana terjadi kejadian / Event ke 1, 2 dst (dalam ilustrasi hanya ada 6 event – E1 sd E6)



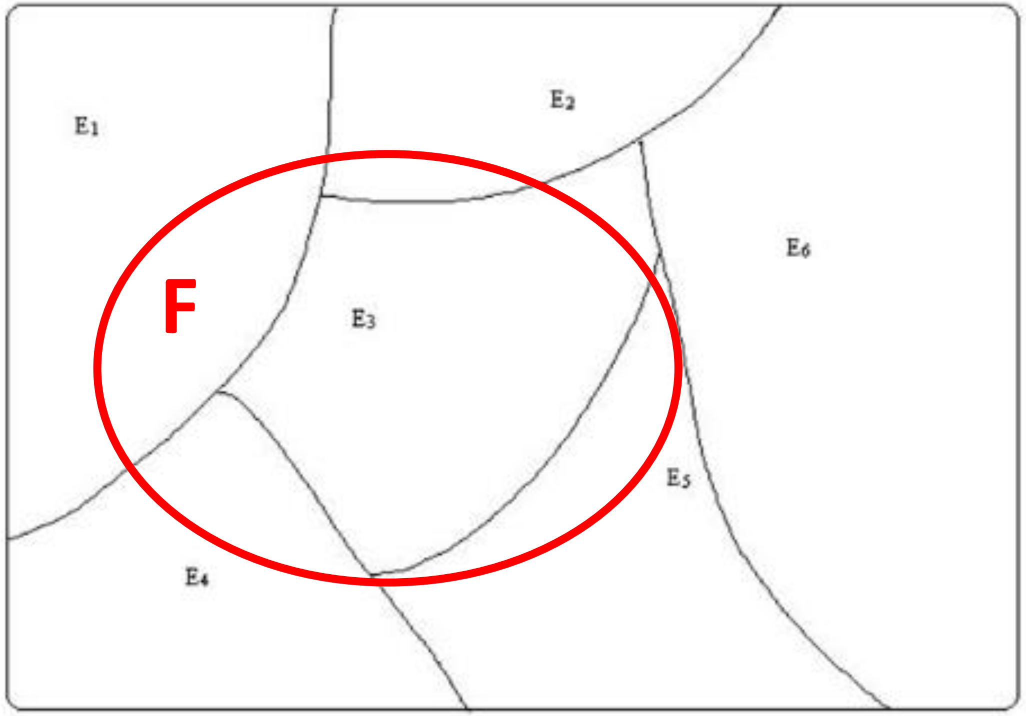
$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{6} E_i$$

$$F = \bigcup_{i=1}^{6} (F \cap E_i),$$ tetapi $$F \cap E_6 = \emptyset.$$

Karakteristik

Untuk event $E, F \subseteq \Omega$

1. $P(E') = 1 - P(E)$.
2. If $E \subseteq F$, then $P(E) \leq P(F)$.
3. In general, $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$.
4. $P(E \cap F') = P(E) - P(E \cap F)$
5. $P(E \cup F) \leq P(E) + P(F)$.
6. $P(E \cap F) \geq P(E) + P(F) - 1$.



Probabilitas bersyarat

Probabilitas event F dengan syarat terjadi Event E

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)},$$

$P(E \cap F) = P(E)P(F|E),$ secara umum untuk event $E_1, ..., E_k,$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_2|E_1 \cap E_2)...P(E_k|E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_{k-1}).$$

Untuk event yang saling independent

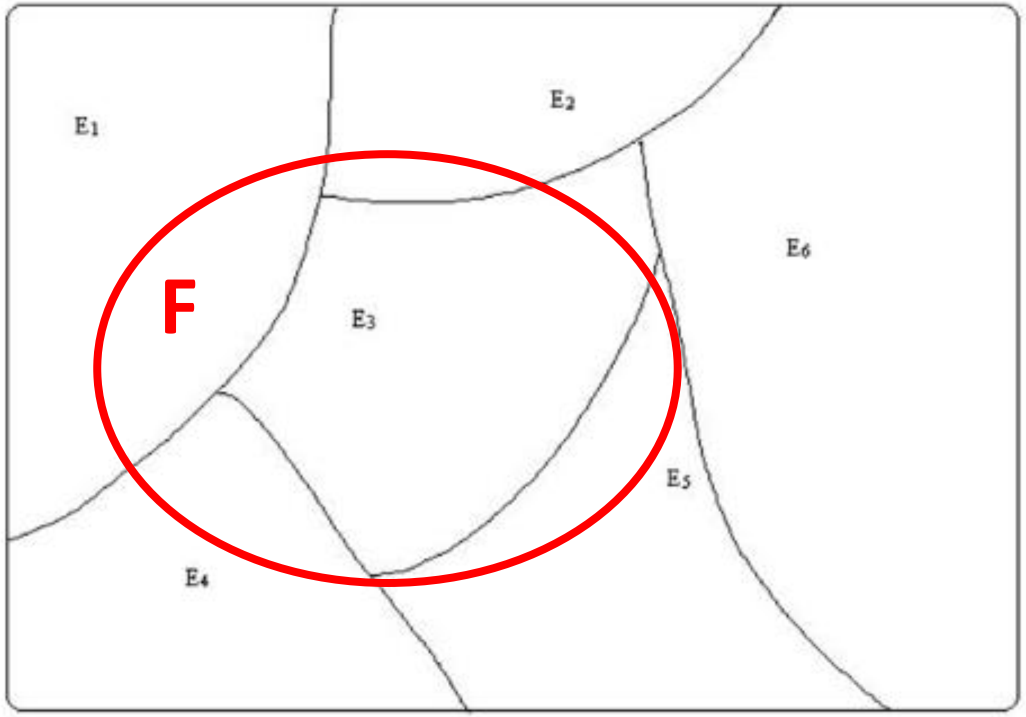
Dikatakan independent bila

$$P(E|F) = P(E), \quad \text{shg} \quad P(E \cap F) = P(E)P(F).$$

Bila E1, … Ek independent, jika setiap subset dari event l $\leq$ k, shg

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{l} E_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{l} P(E_{i_j}).$$

Probabilitas Total



$$P(F) = \sum_{i=1}^{k} P(F|E_i)P(E_i).$$

$$F \quad = (F \cap E_1) \cup ... \cup (F \cap E_k)$$

$$\Longrightarrow \quad P(F) \quad = \sum_{i=1}^{k} P(F \cap E_i) = \sum_{i=1}^{k} P(F|E_i)P(E_i),$$

Teorema Bayes

$$P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)}.$$

$$P(E|F)P(F) = P(E \cap F) = P(F|E)P(E), \Rightarrow P(E|F)P(F) = P(F|E)P(E).$$

$$P(E_i|F) = \frac{P(F|E_i)P(E_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(F|E_j)P(E_j)}.$$

$$P(E|F) \neq P(F|E).$$

3

FUNGSI DITRIBUSI PROB GABUNGAN

Variabel acak jamak

Fungsi distribusi Gabungan

Bila $f(x, y)$ adalah fungsi distribusi gabungan untuk X dan Y dalam sebuah sub set A

$$P\left[\left(X,Y\right)\in A\right]=\iint_{A} f(x,y)\,dxdy$$

Jika A adalah sebuah area yang memenuhi

$$\left\{(x,y): a\le x\le b, c\le y\le d\right\},$$

$$P\left[\left(X,Y\right)\in A\right]=\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)\,dydx$$

SIFAT - FS DISTRIBUSI GABUNGAN

$a.)\ 0 \leq F_{X,Y}(x, y) \leq 1$

$b.)\ F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$

$c.)\ F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty)$

$d.)\ F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y)$

$e.)\ F_{X,Y}(x, -\infty) = 0$

$f.)\ F_{X,Y}(-\infty, y) = 0$

Fungsi distribusi Marginal

Fs distribusi marginal dari X dan dari Y, dinotasikan $f_X(x)$ dan $f_Y(y)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \quad \text{untuk} -\infty < x < \infty$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \quad \text{untuk} -\infty < y < \infty$$

Variabel acak independen

Dua variable acak dikatakan *independent* jika untuk setiap pasangan nilai x, y

$$p(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

untuk X dan Y var. acak diskrit

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

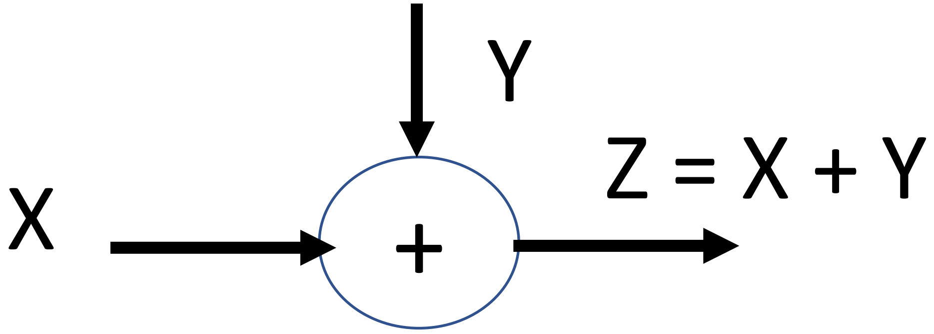
Untuk X dan Y var. acak kontinyu

N Variabel acak independen

Bila terdapat n variable acak independent, maka fungsi ditribusi gabungan dituliskan, dalam bentuk:

$$f_{X_{i_1},\ldots,X_{i_k}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}) = f_{X_{i_1}}(x_{i_1})\ldots f_{X_{i_k}}(x_{i_k})$$

Ingat persamaan Ekspektasi untuk Variabel acak Gabungan – Materi Mg ke 3



$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{x,y} (x+y) f(x,y) \\
&= \sum_{x} x \sum_{y} f(x,y) + \sum_{y} y \sum_{x} f(x,y) \\
&= \sum_{x} x f_X(x) + \sum_{y} y f_Y(y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

4

FUNGSI DITRIBUSI BERSYARAT

Variabel acak jamak

Fungsi distribusi bersyarat

Dua var acak X dan Y, dengan fs distr. gabungan $f(x, y)$ dan fungsi distribus marginal X adl $f_X(x)$. Untuk sembarang X pd nilai x ttt, dengan syarat $f_X(x) > 0$, fs distribusi probabilitas bersyarat Y saat X bernilaia x ttt → $X = x$, dituliskan

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \qquad -\infty < y < \infty$$

If X and Y are discrete, replacing pdf's by pmf's gives the *conditional probability mass function of Y when $X = x$*.

Example. Let the joint density of two random variables x and y be given by

Contoh

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x + 4y) & 0 < x < 2,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

The marginal density of x is $f_X(x) = \frac{1}{6}(x + 2)$ while the marginal density of y is $f_y(y) = \frac{1}{6}(2 + 8y)$.

Now find the conditional distribution of x given y. This is given by

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{\frac{1}{6}(x + 4y)}{\frac{1}{6}(2 + 8y)}$$

$$= \frac{(x + 4y)}{(8y + 2)}$$

for $0 < x < 2$ and $0 < y < 1$. Now find the probability that $X \leq 1$ given that $y = \frac{1}{2}$.

First determine the density function when $y = \frac{1}{2}$ as follows

$$\frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{(x + 4y)}{(8y + 2)}$$

$$= \frac{\left(x + 4\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{\left(8\left(\frac{1}{2}\right) + 2\right)}$$

$$= \frac{(x + 2)}{(4 + 2)} = \frac{(x + 2)}{6}$$

Then

Contoh

$$
\begin{aligned}
P\left(X \leq 1 \mid Y = \tfrac{1}{2}\right) &= \int_0^1 \frac{1}{6}(x+2)\,dx \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + 2\right) - 0 \\
&= \frac{1}{12} + \frac{2}{6} = \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

Bila dua variable acak X dan Y, mempunyai fs distr gabungan

Contoh

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le x + y \le 1 \\ 0, & yg\ lain \end{cases}$$

Dari contoh di atas, batas pada X + Y = 1

1) Tentukan fungsi distr. Marginal X dan Y.
2) Apakah X dan Y independent?
3) Tentukan P(X > 1/2 | Y =1/4).

$$f_1(x) = \begin{cases} \int_0^{1-x} 2dy = 2(1-x), & 0 \le x \le 1 \\ 0 & yg\ lain \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \int_0^{1-y} 2dx = 2(1-y), & 0 \le y \le 1 \\ 0 & yg\ lain \end{cases}$$

Untuk No 2

$$f_1(x)\, f_2(y)=2(1-x)*\, 2(1-y) \neq 2 = f(x,y), \text{ for } 0 \le x \le 1-y.$$

Terlihat X dan Y tidak independent

No 3.

$$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{X} > \frac{1}{2} \,|\, \boldsymbol{Y} = \frac{1}{4}\right) = \int_{1/2}^{1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y} = \frac{1}{4})\boldsymbol{dx} = \int_{1/2}^{1} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} = \frac{1}{4})}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y} = \frac{1}{4})}\boldsymbol{dx} = \int_{1/2}^{1} \frac{2}{2(1-\frac{1}{4})} = \frac{2}{3}$$

5

OPERATOR E – EKSPEKTASI: KOVARIAN, KORELASI

Variabel acak jamak

NILAI EKSPEKTASI

Bila X dan Y adalah var. acak dengan fs distribusi massa gabungan p(x, y) untuk diskrit atau fs distribusi kerapatan massa gabungan f (x, y) untuk kontinyu. Maka Nilai Ekspektasi dadi fungsi $h(X, Y)$, dituliskan $E[h(X, Y)]$ atau $\mu_{h(X,Y)}$

$$\mu_{h(X,Y)} = \begin{cases} \sum_x \sum_y h(x,y) \cdot p(x,y) & \text{diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) \cdot f(x,y)\,dx\,dy & \text{kontinyu} \end{cases}$$

Fungsi distribusi massa gabungan untuk n Var acak

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \mathbb{P}(\{X_1 = x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n = x_n\})$$

Jika n Var acak tersebut saling independent, maka

$$f_{X_{i_1},\ldots,X_{i_k}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}) = f_{X_{i_1}}(x_{i_1})\ldots f_{X_{i_k}}(x_{i_k})$$

Besarnya ekspektasi pada fungsi $h(X_1, \ldots, X_n)$

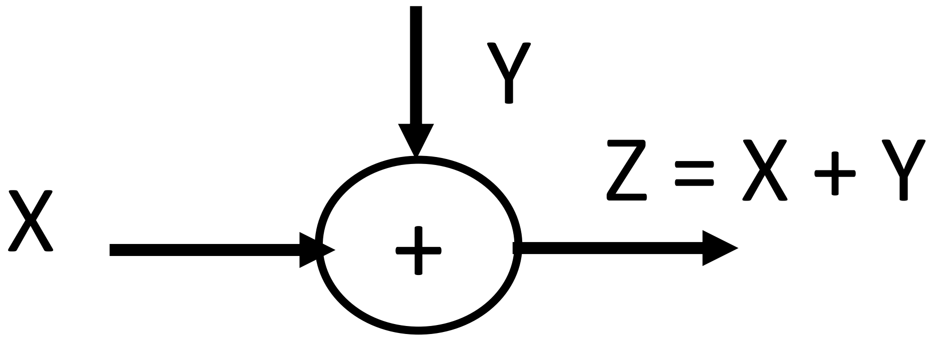
$$\mathbb{E}(h(X_1,\ldots,X_n)) = \sum_{x_1,\ldots,x_n} h(x_1,\ldots,x_n) f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)$$

Ingat sifat linier operator E $\mathbb{E}(\sum_i \alpha_i X_i) = \sum_i \alpha_i \mathbb{E}(X_i)$

Dua Variabel acak X dan Y independent
Maka Ekspektasi perkalian dari X dengan Y

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{x,y} xy f_{X,Y}(x,y) \\
&= \sum_{x,y} xy f_X(x) f_Y(y) \\
&= \sum_{x} x f_X(x) \sum_{y} y f_Y(y) \\
&= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}
$$

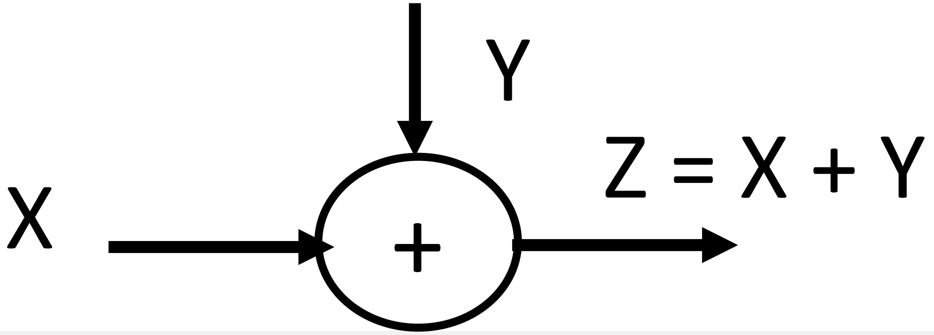
Variansi X + Y



$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathbb{E}((X+Y)^2) - \mathbb{E}(X+Y)^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)^2 \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\left(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right)
\end{aligned}
$$

Untuk X dan Y saling independent

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$



Kovarian dari variable acak gabungan X dan Y

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Bila mean dari X dan Y masing, masing adalah μ_X dan μ_Y

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))$$

sedangkan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(\mu_X Y) - \mathbb{E}(\mu_Y X) + \mathbb{E}(\mu_X \mu_Y)\\ &= \mathbb{E}(XY) - \mu_X \mu_Y\end{aligned}$$

Dua variable acak X dan Y dikatakan **“Tidak berkorelasi”** maka akan berlaku

$$\mathbf{Cov\ (X, Y) = 0}$$

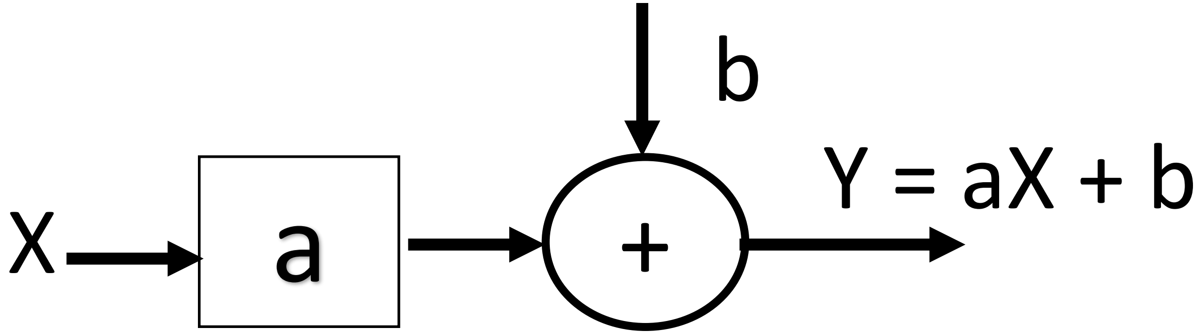
Dua variable acak X dan Y, mempunyai korelasi:

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

From the Cauchy–Schwarz inequality, we see that

$$\rho(X, Y)^2 \leqslant 1 \implies -1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$$

Nila korelasi berada diantara -1 < ρ(X, Y) < 1
Korelasi bernilai -1, dikatakan bahwa X dan Y dikatakan linier relasi (hubungan secara linier) negative



Perhatikan diagram di atas, mean dari Y diperoleh dg menggunakan Operator E pada Y

1. $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$
2. $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

Dapat digunakan pula Integrasi terhadap fungsi kerapatan nya

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(aX + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) f(x)dx = a\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ &= a\mathbb{E}(X) + b\end{aligned}$$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}((Y - \mu_Y)^2)$ dg $Y = aX + b$

Besarnya probabilitas variable acak gabungan X dan Y, saat bernilai diantara a < X < b, dan c < Y < d adalah

$$\mathbb{P}(a < X < b, c < Y < d) = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Dan ingat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

berlaku:

$$\mathbb{P}((X,Y) \in C) = \iint_C f(x,y)\,dx\,dy$$

6

FS DISTR KOMULATIF DAN KERAPATAN - VAR. ACAK GABUNGAN

Variabel acak jamak

Fungsi distribusi (distribustion function) F(x,y) dan fungsi kerapatan gabungan (density function) f(x,y)

$$F(x,y) = \mathbb{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

Hubungan antara fungsi distribusi dengan kerpatan gabungan

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$$

Fungsi distribusi marginal

$$F_X(x) = F(x,\infty) \qquad \text{and} \qquad F_Y(y) = F(\infty,y)$$

Contoh

Contoh, Var. acak gabungan dengan fs density $f(x,y) = x + y$ pd $0 \leqslant x, y \leqslant 1$.

Kita periksa – syarat pemenuhan $\int_0^1 \int_0^1 (x+y)dxdy = 1$.

Fungsi distribusi gabungan

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^x \int_0^y (u+v)\,du\,dv \\ &= \int_0^x \left(\int_0^y (u+v)dv\right) du \\ &= \int_0^x \left(uy + \tfrac{1}{2}y^2\right) du \\ &= \tfrac{1}{2}x^2y + \tfrac{1}{2}xy^2 \end{aligned}$$

untuk $0 \leqslant x, y \leqslant 1$

untuk $y > 1$, $F(x,y) = \frac{1}{2}x(x+1)$ Dan kesamaan nya, utk $x > 1$, $F(x,y) = \frac{1}{2}y(y+1)$.

Ingat – sifat independent Var. Acak Gabungan X dengan Y, akan mengakibatkan

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

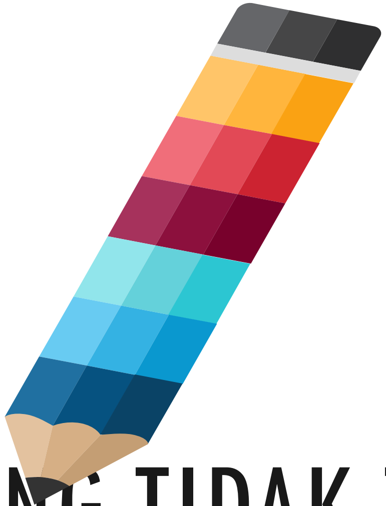
Dan

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) .$$

7

BAGAIMANA KARAKTERISTIK - BILA TERDAPAT N VARIABEL ACAK?

MATERI 7.3



CATAT SEMUA INFORMASI YANG TIDAK TERTULIS DI DALAM SLIDE

Terimakasih