STATISTIK DAN STOKASTIK
TEKNIK FISIKA ITS

KLASIFIKASI DAN HUBUNGAN PROSES STOKASTIK

KLASIFIKASI BERDASARKAN WAKTU

- Kontinyu jika X(t) utk setiap t adalah RV kontinyu
- Diskrit jika X(t) utk setiap t adalah RV diskrit
- Campuran jika X(t) utk setiap t adalah RV campuran

STASIONER – TAK STASIONER

- Strictly stationary jika PDF (marginal maupun gabungan) tidak bergantung pd pemilihan waktu asal → tdk ada sifat yg berubah thd waktu

- Wide-sense stationary (WSS) jika baik mean maupun autokorelasi tidak bergantung pd pemilihan waktu asal:
  - E[X(t)] tdk bergantung pd t
  - $R_x(t_1,t_2) = R_x(t_1 - t_2) = R_x(\tau)$ utk setiap t_1 dan t_2 → autokorelasi bergantung hanya pd perbedaan waktu

- Nonstationary jika tdk stasioner
- strict stationary $\Rightarrow$ wide-sense stationary
- strict stationary $\not\Leftarrow$ wide-sense stationary

Contoh 2.2.3. *Tunjukkan apakah proses berikut stasioner atau tidak?*

$$X_t = Z_0 \cos\ (ct)$$

dengan $Z_t, t = 0, \pm 1, \ldots,$ *suatu variabel random independen dengan mean* 0 *dan variansi* $\sigma^2 < \infty$ *dan* c *suatu konstanta.*
Jawab : Akan ditunjukkan apakah sifat-sifat proses $W - S$ *stasioner berlaku atau tidak.*

1. $E(X_t) = E(Z_0\ \cos(ct) = E(Z_0)\ \cos(ct) = 0$ *dengan substitusi* $E(Z_0) = 0,$ *suatu konstanta*
2. $E(|X_t|^2) = E(|Z_0\ \cos\ ct|^2) \leq E(Z_0^2) = \sigma^2 < \infty$ *dengan substitusi* $|\cos\ ct| \leq 1$
3. $$\begin{aligned} Cov(X_{t+h}, X_t) &= E(X_{t+h}X_t) \\ &= E\left((Z_0\ \cos\ c(t+h))(Z_0\ \cos\ ct)\right) \\ &= \sigma^2 \cos[c(t+h)] \cos[ct] \\ &= \frac{\sigma^2}{2}[\cos(2ct + ch) + \cos(ch)] \end{aligned}$$

   bergantung pada t *jika* $c \neq 2\pi.k, k \in \mathbb{Z}^+$. *Dapat disimpulkan bahwa* X_t *bukan proses* $(W - S)$ *stasioner.*

Contoh 2.3.1. *Diketahui* $\{X_t\}$ *adalah barisan variabel random independen, sedemikian hingga*

$$X_t \sim Exp(1) \quad t \text{ ganjil}$$
$$X_t \sim N(1,1) \quad t \text{ genap}$$

maka:

1. $E(X_t) = 1$ *konstan, tidak dipengaruhi waktu.*
2. EX_t^2 *berhingga*
3. $Var(X_t) = \gamma_X(0) = 1$
   Untuk $h \geqslant 1, \gamma_X(h) = \operatorname{cov}(X_{t+h}, X_t) = E(X_t X_{t+h}) - E(X_t)E(X_{t+h}) = E(X_t)E(X_{t+h}) - E(X_t)E(X_{t+h}) = 0$

Terlihat proses diatas merupakan proses stasioner $(W-S)$. *Akan tetapi* $\{X_t\}$ *dan* $\{X_{t+h}\}$ *memiliki distribusi berbeda untuk* $h \neq 0$ *yakni* $\{X_t\}$ *tidak bersifat strictly stasioner.*

Contoh

Tunjukkan bahwa proses acak :

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

merupakan wide-sense stationary (w.s.s), jika A dan ω konstan dan θ berdistribusi uniform pada interval (0,2π).

Jawab :

Karena dibuktikan bahwa nilai mean dari x(t) adalah nol dan

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \frac{A^2}{2}\cos\omega(t_1 - t_2) \Rightarrow R_{XX}(t_2 - t_1)$$

maka x(t) adalah w.s.s

Contoh

Proses acak x(t) memiliki fungsi autokorelasi

$$R_{XX}(\tau) = 25 + \frac{4}{1+6\tau^2}$$

a)apakah x(t) merupakan white?

b)apakah fungsi tersebut valid sebagai fungsi autokorelasi?

c)Dapatkan mean dan variansi dari proses x(t)

Penyelesaian (a)

Suatu proses acak dikatakan wss jika memiliki nilai mean yang konstan.

Hampir semua proses regular memenuhi ketentuan:

$$\lim_{\tau \to \infty} R_{XX}(\tau) = \overline{X}^2$$

$$= \lim_{\tau \to \infty} 25 + \frac{4}{1+6\tau^2}$$

$$= 25 + 0$$

$$= 25$$

Sehingga $\overline{X}^2 = 25$ dan $\overline{X} = 5$ (konstan)

Jadi proses x(t) adalah w.s.s

Penyelesaian (b)

$R_{XX}(\tau)$ valid sebagai fungsi autokorelasi jika

- .

$$R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$$

$$25 + \frac{4}{1+6\tau^2} = 25 + \frac{4}{1+6(-\tau)^2}$$ ➔ terpenuhi

- .

$$\left|R_{XX}(\tau)\right| \le R_{XX}(0)$$

$$R_{XX}(0) = 25 + \frac{4}{1+6.0}$$
$$= 25 + 4$$
$$= 29$$

➔ terpenuhi

Penyelesaian (c)

- Mean :

$$\overline{X} = E\left[X\left(t\right)\right] = \pm 5$$

- Variansi:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= E\left[X^2(t)\right] - E\left[X(t)\right]^2 \\ &= R_{xx}\left(0\right) - \overline{X}^2 \\ &= 29 - 5^2 \\ &= 4\end{aligned}$$

White - Ergodic

- White jika nilainya pd waktu yg berbeda tdk berkorelasi → autokovarian selalu nol:

  $C_x(t_1,t_2) = 0$ atau

  $R_x(t_1,t_2) = \overline{x}(t_1)\,\overline{x}(t_2) \quad \forall t_1 \neq t_2$

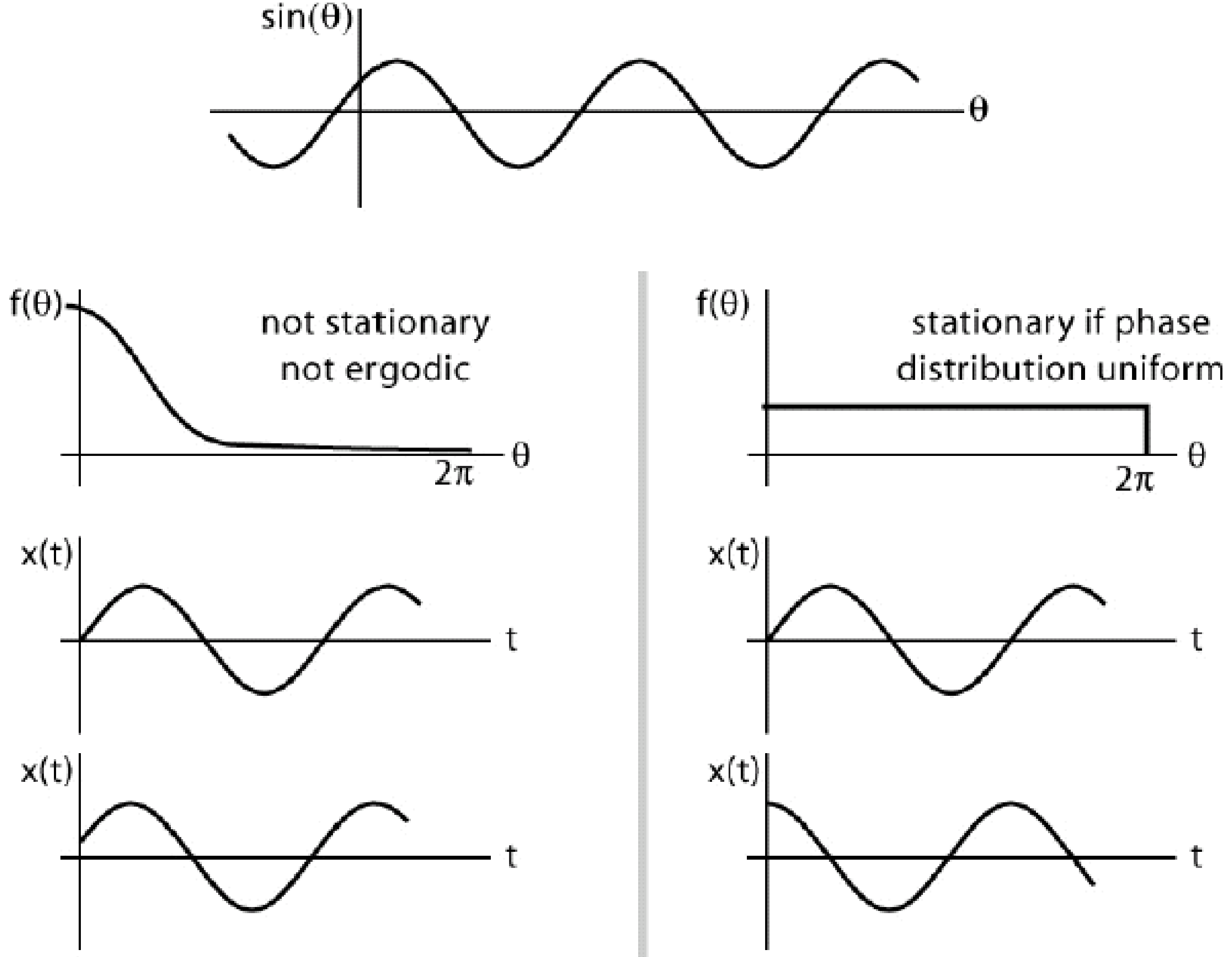
- Ergodik jika nilai rata-rata ensemble (yaitu mean) sama dng nilai rata-rata waktu dr setiap fungsi sampel x(t) yg didefinisikan sbb:

$$\overline{x}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,dt$$

$x(t) = A\sin(\omega t + \theta)$

A, ω fixed

θ random



Proses Ergodik

Momen kedua pertama dr proses ergodik memiliki interpretasi fisik:

- mean adalah komponen dc
- mean-square adalah daya rata-rata
- variansi adalah daya rata-rata dr komponen non-dc
- deviasi standar adalah nilai efektif dr komponen non-dc

Hubungan Dua Proses Random

- Tidak berkorelasi jika fungsi korelasi silang merupakan perkalian dari mean masing-masing untuk setiap waktu
- Ortogonal jika fungsi korelasi silang bernilai 0 untuk setiap waktu
- Independen jika setiap himpunan dari variabel acak saling bebas
- Jointly w.s.s

Syarat x(t) dan y(t) Jointly WSS

1. x(t) adalah w.s.s
2. y(t) adalah w.s.s
3. Fungsi korelasi silang dari x(t) dan y(t) tidak bergantung pada waktu pengukuran tetapi bergantung pada selisih waktu pengukuran

$$R_{XY}(t,t+\tau)=R_{XY}(\tau)$$

$$R_{YX}(t,t+\tau)=R_{YX}(\tau)$$

Contoh

Diberikan proses acak :

$$X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$
$$Y(t) = B\cos\omega t - A\sin\omega t$$

dimana A, B variabel acak dengan mean nol dan ω konstan. A, B memiliki variansi yang sama dan tidak berkorelasi. Tunjukkan bahwa kedua proses tersebut merupakan jointly w.s.s!

Jawab

Harus dicek dengan ketiga syarat jointly w.s.s

1. Mean dari x(t) → $E[X(t)]$ adalah konstan

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[A\cos\omega t + B\sin\omega t] \\ &= E[A\cos\omega t] + E[B\sin\omega t] \\ &= \cos\omega t E[A] + \sin\omega t E(B) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Mean dari y(t) → $E[Y(t)]$ adalah konstan

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= E[B\cos\omega t - A\sin\omega t] \\ &= E[B\cos\omega t] - E[A\sin\omega t] \\ &= \cos\omega t E[B] + \sin\omega t E(A) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Jawab (cont...)

2. Fungsi Autokorelasi harus memenuhi ketentuan

→ . $R_{XX}(t,t+\tau) = R_{XX}(\tau)$

→ $R_{YY}(t,t+\tau) = R_{YY}(\tau)$

Jawab (cont...)

$$R_{XX}(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$$
$$=E[(A\cos\omega t+B\sin\omega t)(A\cos\omega(t+\tau))+B\sin\omega(t+\tau)]$$
$$=E\left[A^2\cos\omega t\cos\omega(t+\tau)+AB\sin\omega t\cos\omega(t+\tau)+AB\cos\omega t\sin\omega(t+\tau)+B^2\sin\omega t\sin\omega(t+\tau)\right]$$
$$=E\left[A^2\cos\omega t\cos\omega(t+\tau)\right]+E[AB\sin\omega t\cos\omega(t+\tau)]+E[AB\cos\omega t\sin\omega(t+\tau)]+E\left[B^2\sin\omega t\sin\omega(t+\tau)\right]$$
$$=\cos\omega t\cos\omega(t+\tau)E\left[A^2\right]+\sin\omega t\cos\omega(t+\tau)E[AB]+\cos\omega t\sin\omega(t+\tau)E[AB]+\sin\omega t\sin\omega(t+\tau)E\left[B^2\right]$$

diketahui bahwa A dan B tidak berkorelasi, sehingga :

$$R_{XX}(t,t+\tau)=\sigma^2\cos(\omega t)\cos(t+\tau)+\sigma^2\sin(\omega t)\sin(t+\tau)$$
$$=\sigma^2\{\cos(\omega t-\omega(t+\tau))\}$$
$$=\sigma^2\cos(-\omega\tau)$$
$$=\sigma^2\cos(\omega\tau)$$
$$=R_{XX}(\tau)$$

Syarat pertama terpenuhi.

Jawab (cont...)

$$R_{YY}(t,t+\tau)=E[Y(t)Y(t+\tau)]$$

$$=E[(B\cos\omega t-A\sin\omega t)(B\cos(\omega(t+\tau))-A\sin\omega(t+\tau))]$$

$$=E\left[B^2\cos\omega t\cos\omega(t+\tau)-AB\sin\omega t\cos\omega(t+\tau)-AB\cos\omega t\sin\omega(t+\tau)+A^2\sin\omega t\sin\omega(t+\tau)\right]$$

$$=E\left[B^2\right]\cos\omega t\cos\omega(t+\tau)-E\left[A^2\right]\sin\omega t\sin\omega(t+\tau)$$

$$=\sigma^2\cos\omega t\cos\omega(t+\tau)+\sigma^2\sin\omega t\sin\omega(t+\tau)$$

$$=\sigma^2\{\cos(\omega t-\omega(t+\tau))\}$$

$$=\sigma^2\cos(-\omega\tau)$$

$$=\sigma^2\cos(\omega\tau)$$

$$=R_{YY}(\tau)$$

Syarat ke dua terpenuhi.

Jawab (cont...)

3. Fungsi Korelasi silang harus $R_{XY}(t,t+\tau)=R_{XY}(\tau)$

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$
$$=E[(A\cos\omega t+B\sin\omega t)(B\cos\omega(t+\tau)-A\sin\omega(t+\tau))]$$
$$=E[AB\cos\omega t\cos\omega(t+\tau)+B^2\sin\omega t\cos\omega(t+\tau)-A^2\cos\omega t\sin\omega(t+\tau)-AB\sin\omega t\sin\omega(t+\tau)]$$
$$=E[AB]\cos\omega t\cos\omega(t+\tau)+E[B^2]\sin\omega t\cos\omega(t+\tau)-E[A^2]\cos\omega t\sin\omega(t+\tau)-E[AB]\sin\omega t\sin\omega(t+\tau)$$
$$=E[B^2]\sin\omega t\cos\omega(t+\tau)-E[A^2]\cos\omega t\sin\omega(t+\tau)$$
$$=\sigma^2\{\sin(\omega t-\omega(t-\tau))\}$$
$$=-\sigma^2\sin\omega(t-\tau)\cos\omega t+\sigma^2\cos\omega(t-\tau)\sin\omega t$$
$$=\sigma^2\{\sin\omega(t-\tau)-\omega t\}$$
$$=\sigma^2\{\sin\omega\tau\}$$
$$=R_{XY}(\tau)$$

→ Syarat ketiga terpenuhi

Proses Acak Gaussian

proses acak yang memiliki sekumpulan fungsi X(t) sebagai variabel acak berdistribusi Gaussian gabungan (*jointly Gaussian*)

$$f_{X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi C_x|}} exp\left[-\frac{1}{2}(x-\overline{x})' C_x^{-1}(x-\overline{x})\right]$$

$$C_x = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$C_{ij} = \text{cov}[X(t_i),X(t_j)]$

Sifat Khusus Proses Gaussian

- Proses ini ditentukan secara penuh oleh nilai mean dan fungsi autokorelasi
- Proses ini adalah stasioner mutlak jika dan hanya jika dia w.s.s
- Proses ini white mutlak (independen) jika dan hanya dia tidak berkorelasi (*wide-sense white*)
- Setiap fungsi linier dari proses Gaussian adalah proses Gaussian juga.
- Respon sistem linier untuk sebuah proses Gaussian adalah proses Gaussian juga.