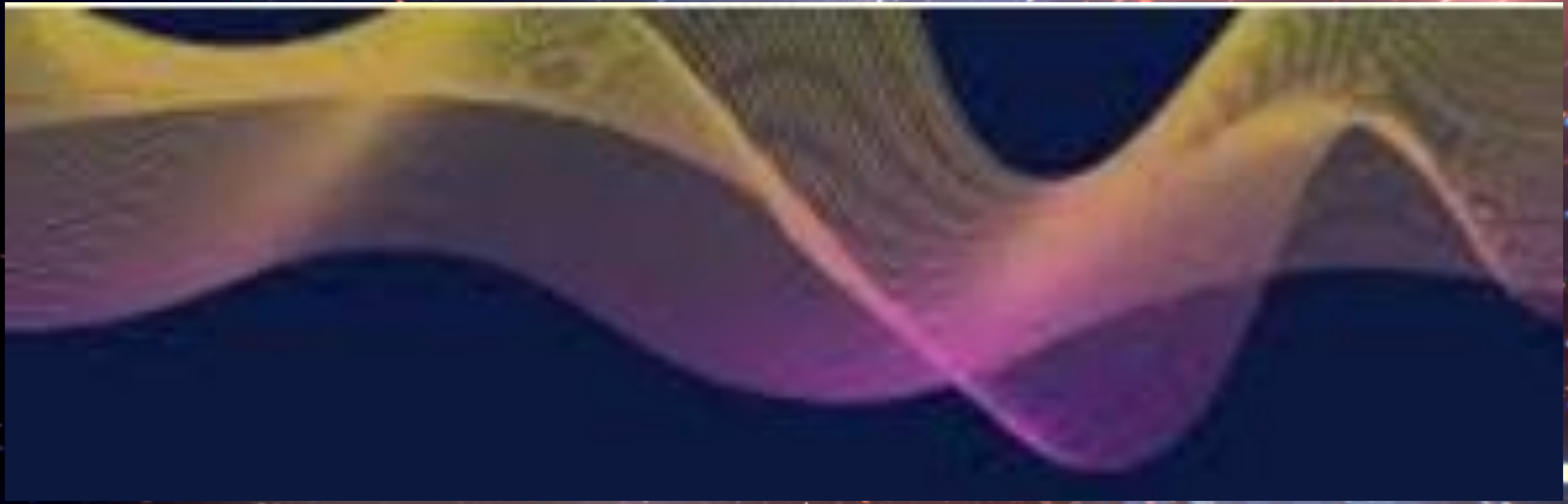
MATEMATIKA REKAYASA 1



PENYELESAIAN PD BIASA

AULIA SITI AISJAH – TEKNIK FISIKA ITS

Metode - Integrasi

- *y* dinamakan variable dependen / terikat;
- *t* dikatakan variable bebas;
- Penyelesaian nya adalah mencari formula untuk y sebagai fungsi dari t

Integrasi secara langsung

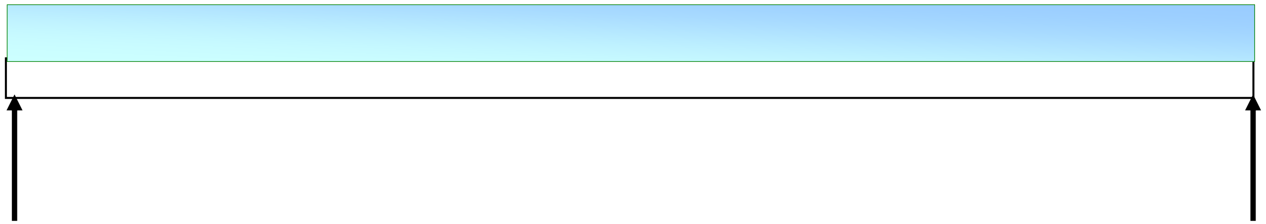
Contoh tentukankec. Mobil dengan percepatan dr kondisi diam / berhenti dengan a = 3 ms^{-2}

$$\frac{dv}{dt} = a = 3$$
$$\Rightarrow v = 3t + c$$

Jika kondisi awal mobil adalah diam

$$v(0) = 0 \Rightarrow 0 = 3 \times 0 + c \Rightarrow c = 0$$
$$\Rightarrow v = 3t$$

Contoh sebuah batang yang di bending di 2 ujungnya



Teori pada beam di atas:

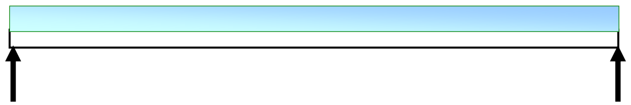
$$\frac{d^2M}{dx^2} = w$$

Dengan kondisi batas

$M(0) = 0$ dan $M(l) = 0$ (ujung pin)

Penyelesaian

$$\frac{d^2M}{dx^2} = w$$



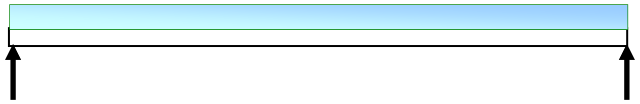
- **Step 1:**
  Integralkan

$$\frac{dM}{dx} = wx + A$$

- **Step 2:**
  Integralkan Kembali utk mendapat solusi umum

$$M = \frac{1}{2}wx^2 + Ax + B$$

Bending pada balok



- **Step 3:**
  Gunakan kondisi batas untuk mendapat solusi partikulir

$$M = \frac{1}{2}wx^2 + Ax + B$$

$$M(0) = 0 \qquad 0 = \frac{1}{2}w\times 0^2 + A\times 0 + B \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

$$M(l) = 0 \qquad 0 = \frac{1}{2}w\times l^2 + A\times l + \cancel{B} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{2}wl}$$

- **Step 4:**
  Substitusikan Kembali untuk nilai A dan B

$$M = \frac{1}{2}wx^2 - \frac{1}{2}wlx \longrightarrow \boxed{M = \frac{1}{2}wx(l-x)}$$

Penyelesaian metode separasi

- Metode separasi hanya berlaku untuk ODE orde 1st.
- Dilakukan dengan cara (sisi kanan persamaan) difaktorisasi ke dalam bentuk perkalian fungsi t

$$\frac{dy}{dt} = g(t)h(y)$$

Metode separasi

Pemisahan pertama $$\frac{dy}{h(y)} = g(t)dt$$

Integrasi sisi kiri thd y, dan sisi kanan terhadap t

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)dt + C$$

Metode separasi

$$\frac{dy}{dt} = y\sin(t)$$

Pemisahan

$$\frac{1}{y}dy = \sin(t)dt$$

Integralkan

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \sin(t)dt$$

$$\Rightarrow \ln(y) = -\cos(t) + c$$

$$\Rightarrow y = e^{-\cos(t)+c}$$

$$\Rightarrow y = Ae^{-\cos(t)}$$

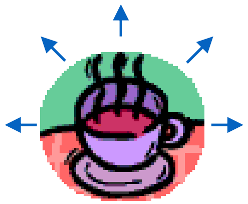
Proses pendinginan pada kopi

Jumlah panas yang tersimpan di dalam kopi di cangkir

heat volume specific heat

$$Q = V\rho c T$$

density temperature



Persamaan keseimbangan Panas:

- Laju perubahan panas = panas yang hilang ke lingkungan sekitar

Proses pendinginan pada kopi

Hukum Newton – proses pendinginan:

- Panas yang hilang sebanding dengan beda suhu antara obyek dan udara sekitar
- Konstanta kesebandingan merupakan luas permukaan kontak dikalikan dengan koefisien perpindahan panas

Pers. Keseimbangan panas

$$\frac{dQ}{dt} = -hA(T - T_{Room})$$

Proses pendinginan pada kopi

$$\frac{dQ}{dt} = -hA(T - T_{Room})$$

subst

$$Q = V\rho c T$$

$$V\rho c \frac{dT}{dt} = -hA(T - T_{Room})$$

susun

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha(T - T_{Room})$$

dimana

$$\alpha = \frac{hA}{V\rho c}$$

Selesaikan persamaan scr Bersama-sama dengan kondisi awal:

$$T(0) = T_{Initial}$$

Proses pendinginan pada kopi

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha(T - T_{Room})$$

- **Step 1:** Pisahkan

$$\frac{dT}{(T - T_{Room})} = -\alpha dt$$

- **Step 2:** Integralkan

$$\ln(T - T_{Room}) = -\alpha t + c$$

Buat scr eksplisit *T*

$$T - T_{Room} = e^{-\alpha t + c}$$

$$T - T_{Room} = Ae^{-\alpha t}$$

dimana

$$A = e^{c}$$

Proses pendinginan pada kopi

- **Step 3:** Gunakan kondisi awal

$$T - T_{Room} = Ae^{-\alpha t}$$

$$T(0) = T_{Initial}$$

$$T_{Initial} - T_{Room} = Ae^{-\alpha \times 0}$$

$$A = (T_{Initial} - T_{Room})$$

- **Step 4:** Substitusikan Kembali untuk mendapat solusi akhir

$$\boxed{T = T_{Room} + (T_{Initial} - T_{Room})e^{-\alpha t}}$$

Dengan factor pengintegrasi - selesaikan

$$\frac{dy}{dt} + y = 1 \qquad\qquad y(0) = 2$$

Ada beberapa cara untuk menyelesaikan masalah di atas, tetapi akan pada metode ini akan digunakan metode factor pengintegrasi.

Faktor pengintegrasi

Rumus perkalian

$$\frac{d(f.y)}{dt} = f\frac{dy}{dt} + \frac{df}{dt}y$$

Dapat dilakukan dengan membuat sisi kiri dan sisi kanan dengan mengalikan ODE dengan sebuah factor pengintegrasi

Faktor pengintegrasi

Faktor pengintegrasi – digunakan bentuk fungsi e^{t}

ODE menjadi:

$$e^{t}\frac{dy}{dt}+e^{t}y=e^{t}$$

Sisi kiri spt sisi kanan debagai bentuk hasil **Product Rule** dengan

$$f=e^{t}$$

Faktor pengintegrasi

Tulis ulang persamaan

$$e^t \frac{dy}{dt} + \frac{d(e^t)}{dt} y = e^t$$

atau

$$\frac{d(e^t y)}{dt} = e^t$$

Dapat kita gunakan integral langsung

$$e^t y = e^t + C$$

Jangan lupa *C*, sebagai konstanta integrasi

Faktor pengintegrasi

Susun ulang secara eksplisit, dalam bentuk $y = 1 + Ce^{-t}$

Gunakan kondisi awal untuk mendapatkan nilai *C*

$$y(0) = 2 \Rightarrow 1 + Ce^{-0} = 2$$
$$\Rightarrow 1 + C = 2$$
$$\Rightarrow C = 1$$

Substitusi ulang untuk mendapat hasil akhir $y = 1 + e^{-t}$

Latihan

2–10 GENERAL SOLUTION

Find a general solution. Show the steps of derivation. Check your answer by substitution.

2. $y^3 y' + x^3 = 0$

3. $y' = \sec^2 y$

4. $y' \sin 2\pi x = \pi y \cos 2\pi x$

5. $yy' + 36x = 0$

6. $y' = e^{2x-1} y^2$

7. $xy' = y + 2x^3 \sin^2 \dfrac{y}{x}$ (Set $y/x = u$)

8. $y' = (y + 4x)^2$ (Set $y + 4x = v$)

9. $xy' = y^2 + y$ (Set $y/x = u$)

10. $xy' = x + y$ (Set $y/x = u$)

Tugas

Upload MyClassroom

Paling lambat 10 Oktober jam 24.00

11–17 INITIAL VALUE PROBLEMS (IVPs)

Solve the IVP. Show the steps of derivation, beginning with the general solution.

11. $xy' + y = 0, \quad y(4) = 6$

12. $y' = 1 + 4y^2, \quad y(1) = 0$

13. $y' \cosh^2 x = \sin^2 y, \quad y(0) = \frac{1}{2}\pi$

14. $dr/dt = -2tr, \quad r(0) = r_0$

15. $y' = -4x/y, \quad y(2) = 3$

16. $y' = (x + y - 2)^2, \quad y(0) = 2$
(Set $v = x + y - 2$)

17. $xy' = y + 3x^4 \cos^2(y/x), \quad y(1) = 0$