Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya

JURUSAN TEKNIK FISIKA - FTI

M1. EROR PADA METODE NUMERIK

Aulia Siti Aisjah

MATEMATIKA REKAYASA 1

Pengantar

1. Advanced Engineering Mathematics, Erwin Kreyszig, 2011
2. Numerical Methods, S. Nakamura

Pengantar

PART E

Chaps. 19–21
Numeric Analysis

Chap. 19	Chap. 20	Chap. 21
Numerics in General	Numeric Linear Algebra	Numerics for ODEs and PDEs

Materi

Materi

Materi

Materi

Model sistem → Model Matematis

Penyelesaian

Penyelesaian analitis

Nilai yang benar
(True value) = X true

Penyelesaian numerik

Nilai pendekatan
(True value) = X appr

Perbedaan antara
Xtrue dengan Xappr = Error
Error = Xtrue - Xappr

Materi

Tujuan:

Mampu menjelaskan beberapa eror yang terjadi pada metode numerik

Materi – Beberapa Definisi

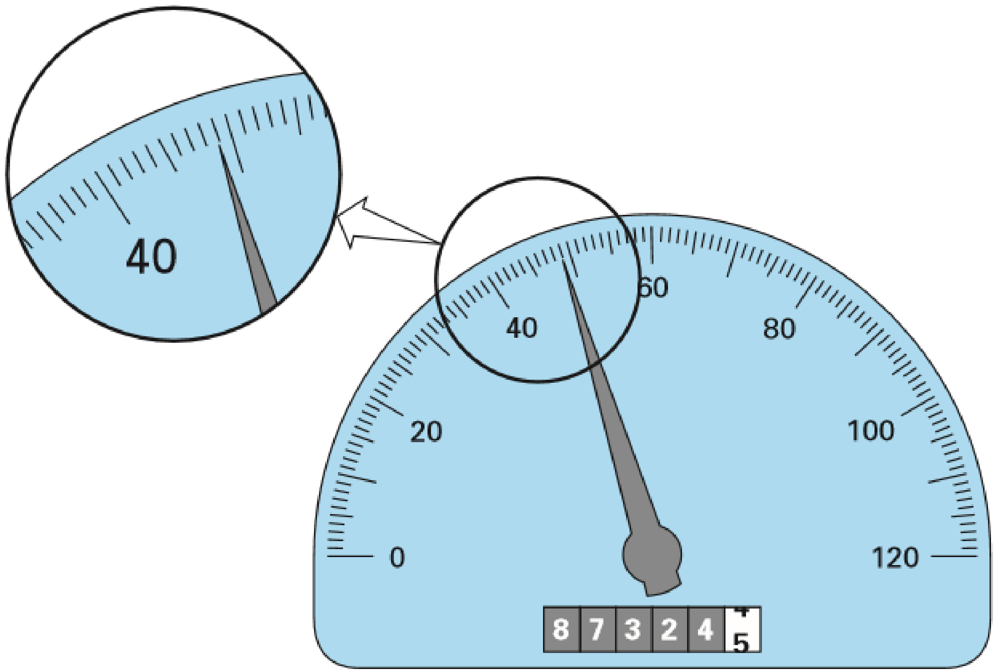
Error Approximation dan and Round-Off Errors

- Dalam beberapa permasalahan, sulit / tidak mendapatkan penyelesaian secara analitik.
- Metode numerik, merupakan metode pendekatan yang kan mendapatkan hasil / nilai pendekatan, yang dalam hal ini hasilnya sangat dekat dengan hasil penyelesaian analitik.
- Kita tidak bisa secara tepat mendapatkan error dari hasil penyelesaian secara numerik
  - Kadang data tidak eksak, karena hasil dari alat ukur.
  - Kemungkinan error dari masukan sebuah sistem
  - Sehingga keluaran sistem mengandung error

  …

Materi

FIGURE 3.1
An automobile speedometer and odometer illustrating the concept of a significant figure.



Materi

- Bagaimana tingkat kepercayaan kita terhadap hasil pendekatan?
- Seberapa besar error yang akan muncul dalam perhitungan kita dan apakah error tsb dalam batas toleransi?

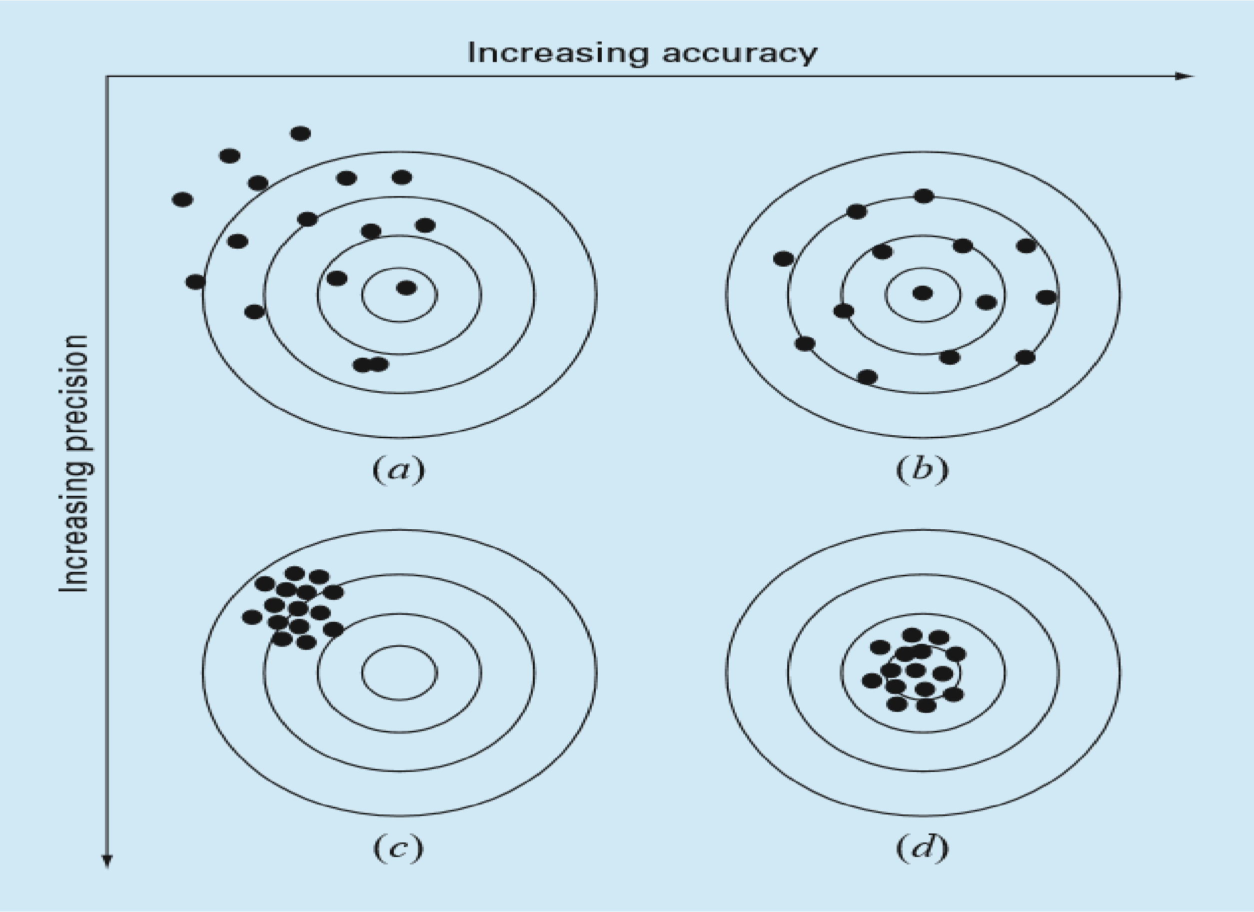
Materi – beberapa definisi

- Accuracy. Seberapa dekat hasil perhitungan terhadap nilai yang benar
- Precision (or *reproducibility*). Seberapa dekat hasil perhitungan atau hasil pengukuran terhadap hasil perhitungan / pengukuran sebelumnya.
- Inaccuracy (or *bias*). Deviasi dari nilai yang benar.
- Imprecision (or *uncertainty*). Besar nya menyebar

Materi

FIGURE 3.2

An example from marksmanship illustrating the concepts of accuracy and precision. (*a*) Inaccurate and imprecise; (*b*) accurate and imprecise; (*c*) inaccurate and precise; (*d*) accurate and precise.



Materi - Significant Figures

- Angka signifikansi menggambarkan kepresisian. Digit signifikansi merupakan jumlah angka yang dapat digunakan dengan tingkat kepercayaan tertentu.

53.8<u>00</u> Berapa signifikansi number sari bilangan ini?

$5{,}38 \times 10^4$	3
$5{,}380 \times 10^4$	4
$5{,}3800 \times 10^4$	5

Nol kadang digunakan untuk menentukan angka signifikansi dalam desimal..

0,00001753	4
0,0001753	4
0,001753	4

Materi

Angka significant

SIGNIFICANT NUMBER

$$\pi = 3.14159265358979323846 2643\ldots$$

π = 3.14159

π = 3.1416

π = 3.145

π = 3.14

Berapa digit dibelakang koma …

Materi

Akurasi dan Presisi

Seberapa dekat hasil perhitungan komputer dengan nilai yang "benar" / true value

Contoh:
True Value = 15.00
Hasil perhitungan = 14.99

Seberapa dekat satu hasil perhitungan komputer dengan hasil yang lain

Contoh:
Hasil perhitungan ke 1= 15.00
Hasil perhitungan ke 2= 14.99

Materi

Definisi Error

True Value = Approximation + Error

E_t = True value – Approximation (+/-)

True error

$$\text{True fractional relative error} = \frac{\text{true error}}{\text{true value}}$$

$$\text{True percent relative error, } \varepsilon_t = \frac{\text{true error}}{\text{true value}} \times 100\%$$

Materi

- Dalam metode numeri, True Value merupakan nilai hasil yang diperoleh dengan cara analitik. Dalam dunia riil aplikasi, seringkali kita tidak mendapatkan jawaban yang benar (sebelumnya)

$$\varepsilon_a = \frac{\text{Approximate error}}{\text{Approximation}} \times 100\%$$

- *Pendekatan secara iterasi, contoh dalam metode Newton*

$$\varepsilon_a = \frac{\text{Current approximation - Previous approximation}}{\text{Current approximation}} \times 100\%$$

(+ / -)

Materi

- Gunakan nilai absolut
- Perhitungan dilakukan secra berulang sampai pada kriteria yang memenuhi.

$$|\varepsilon_a| \langle \varepsilon_s$$

Toleransi dalam persen (%) didasarkan pada pengetahuan / informasi dari penyelesaian sebelumnya

- Jika memenuhi kriteria berikut ini

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{(2\text{-}n)})\%$$

Dapat digunakan untuk mendapatkan hasil yang benar, dengan menggunakan sedikitnya n signifikan number

Materi Round-off Errors

- Bilangan seperti: π, e, or $\sqrt{7}$ tidak dapat dinyatakan dengan bilangan yang pasti atai dengan angka signifikan tertentu.
- Dua / lebih kalkulator dengan jenis dan beda merek tidak bisa memberikan hasil yang sama. Coba tekan angka $\sqrt{7}$ untuk 2 jenis kalk.
- Perhitungan dengan menggunakan komputer – bergantung pada jenis, tipe, kapasitas, kemampuan semua koponen dan software yang digunakan

Materi

(a)

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
8	**6**	**4**	**0**	**9**

$$
\begin{aligned}
9 \times 1 &= 9\\
0 \times 10 &= 0\\
4 \times 100 &= 400\\
6 \times 1{,}000 &= 6{,}000\\
8 \times 10{,}000 &= \underline{80{,}000}\\
& 86{,}409
\end{aligned}
$$

(b)

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**

$$
\begin{aligned}
1 \times 1 &= 1\\
0 \times 2 &= 0\\
1 \times 4 &= 4\\
1 \times 8 &= 8\\
0 \times 16 &= 0\\
1 \times 32 &= 32\\
0 \times 64 &= 0\\
1 \times 128 &= \underline{128}\\
& 173
\end{aligned}
$$

Materi

156.78 ⏩ 0.15678×10^3 dalam sistem basis 10

$$\frac{1}{34} = 0.029411765$$

Perhatikan hanya 4 desimal

$$0.0294 \times 10^0 \qquad \frac{1}{2} \le |m| < 1$$

- Dapat juga dituliskan dengan mengalikan dengan bilangan 10 dengan eksponen 1

$0.294\underline{1} \times 10^{-1}$

Pada saat dirubah dengan mengalikan dengan pangkat 10 yang lain, tetapi dengan tetap 4 signifikan number

Materi

Contoh

π=3.14159265358 dapat disimpan dalam sistem based 10 dengan membawa 7 sign number.

π=3.141592 → ε_t=0.00000065

Dan dibulatkan

π=3.141593 → ε_t=0.00000035

- Beberapa mesin komputer menggunakan pembulatan

Materi

Eror akibat pemotongan suku pada deret Taylor

Truncation Errors and the Taylor Series

Taylor's Theorem

If the function f and its first $n + 1$ derivatives are continuous on an interval containing a and x, then the value of the function at x is given by

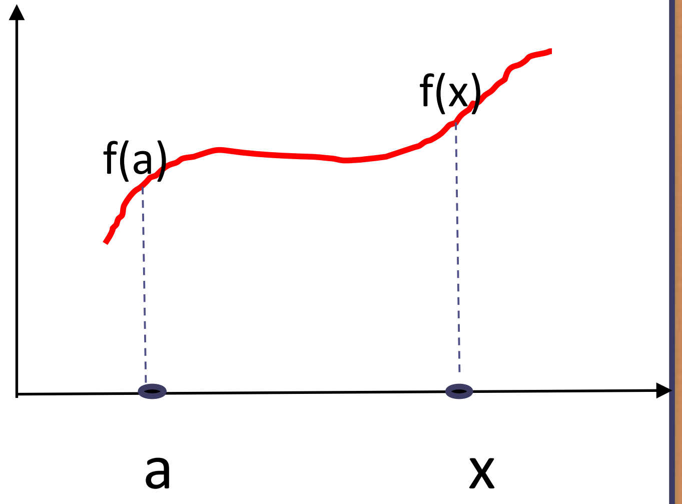
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \qquad \text{(B4.1.1)}$$

where the remainder R_n is defined as

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \qquad \text{(B4.1.2)}$$

Deret sampai dengan tak berhingga

- ***Titik acuan adalah a***



Materi

In a similar manner, additional terms can be included to develop the complete Taylor series expansion:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n + R_n \tag{4.5}$$

It is often convenient to simplify the Taylor series by defining a step size $h = x_{i+1} - x_i$ and expressing Eq. (4.5) as

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n \tag{4.7}$$

where the remainder term is now

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} \tag{4.8}$$

Materi

Contoh:

Deret pendekatan untuk fungsi f(x) = exp (x)

Problem Statement. In mathematics, functions can often be represented by infinite series. For example, the exponential function can be computed using

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \tag{E3.2.1}$$

Mulai dengan exp (0) = 1, tentukan nilai pendekatan exp (0.5). Bila true Value untuk exp (0.5) = 1.648721

Dengan deret Taylor, (a) Orde 0, 1, 2, dan 3, (b) Tentukan True error, (c) Tentukan Error Aproximate

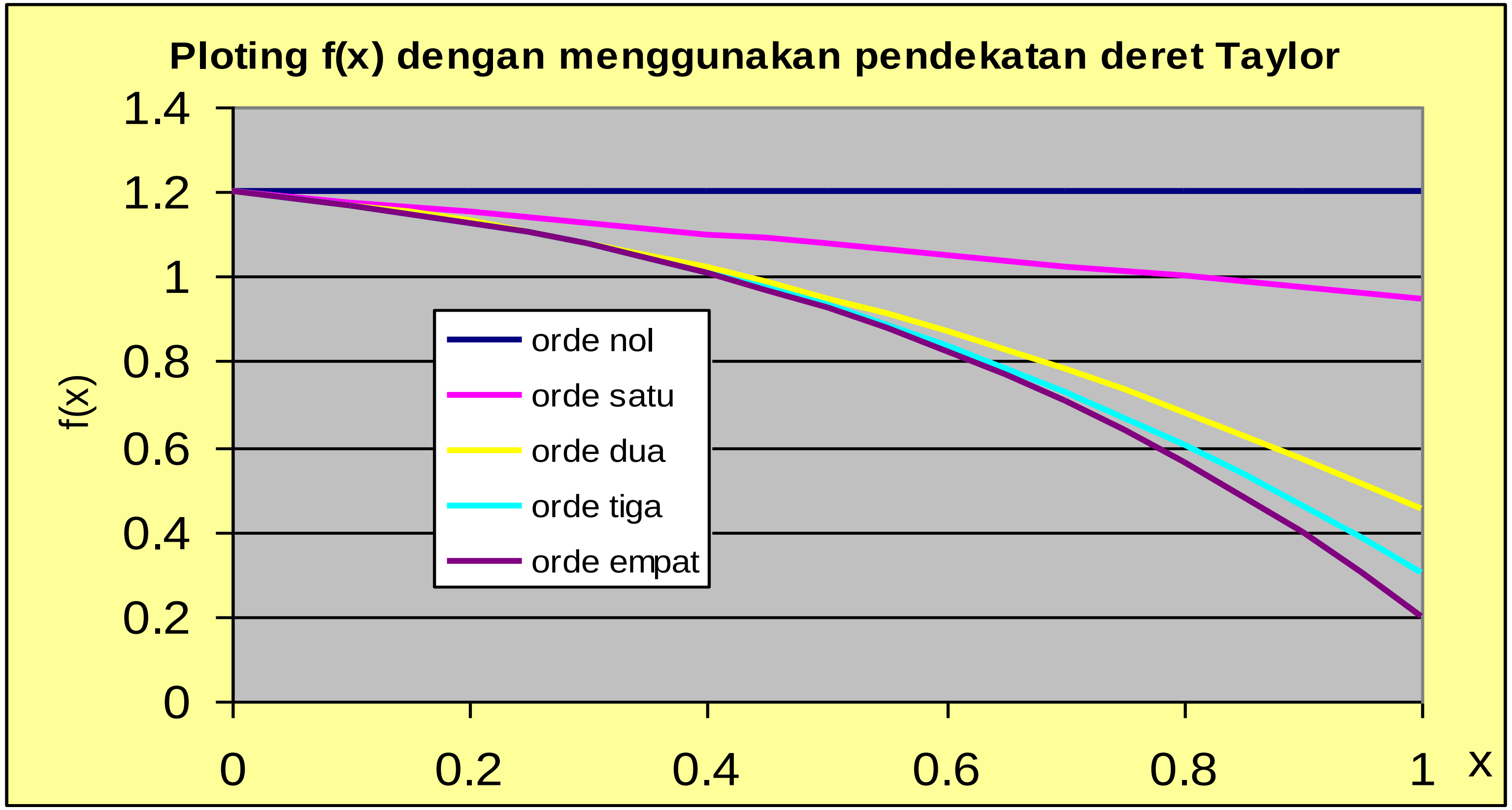
Materi

Deret Taylor 1 dimensi

$$f(x) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(a) + \dots$$

Materi

Pendekatan dalam $f(x) = -0.1x^4-0.15x^3-0.5x^2-0.25x+1.2$ pada x = 1, berdasarkan deret Taylor untuk orde nol, satu, dua, tiga dan empat



Materi

$$f(x,y) = f(a,b) + hf_x + gf_y + \frac{1}{2}\left[h^2 f_{xx} + 2hgfxy + g^2 f_{yy}\right] + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} h^3 f_{xxx} + 3h^2 gf_{xxy} + \\ 3hg^2 f_{xyy} + g^3 f_{yyy} \end{bmatrix} +$$

$$\frac{1}{24}\left[h^4 f_{xxxx} + 4h^3 gf_{xxxy} + 6h^2 g^2 f_{xxyy} + 4hg^3 f_{xyyy} + g^4 f_{yyyy}\right] + \ldots$$

Pers. 1.1.5

Deret Taylor dua dimensi

dimana h = x – a, g = y – b , $f_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \big|_{x=a,y=b}$, $f_y = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \big|_{x=a,y=b}$

Materi

1. Ekspansi deret Maclaurine untuk cos x adalah :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

Dimulai dengan suku paling sederhana, cos x = 1 tambahkan suku suku yang lain untuk mengestimasi cos (π/3). Dan hitung errornya.

2. Gunakan deret Taylor sampai dengan orde empat untuk memprediksi nilai f(4) untuk f(x) = ln x dengan menggunakan titik acuan x =1. Dan hitung eror relatifnya.

Soal – dikerjakan Upload 3 Nop 2017, 24.00

1. Gunakan deret Taylor sampai dengan orde empat untuk memprediksi nilai f(4) untuk $f(x) = \ln x$ dengan menggunakan titik acuan $x = 1$. Dan hitung eror relatifnya.
2. Dengan menggunakan orde ke nol sampai keempat dari deret Taylor untuk memprediksi f(2) untuk fungsi $f(x) = e^{-x}$ dengan titik acuan $a = 1$. Hitung error relatif untuk masing – masing pendekatan.
3. Gunakan orde nol sampai ketiga dari deret Taylor untuk memprediksi f(3) pada fungsi :

$$f(x) = 25\,x^3 - 6x^2 + 7x - 88$$

dengan titik acuan $x = 2$. Dan hitung error relatif untuk masing – masing pendekatan.

Semua perhitungan dalam metode numerik,
Gunakan software:

- Excel
- Matlab
- MathCad
- dll

Materi

Untuk kerja kelompok

Bentuk kelompok dengan jumlah maksimal 4 mhs, dan urut NRP