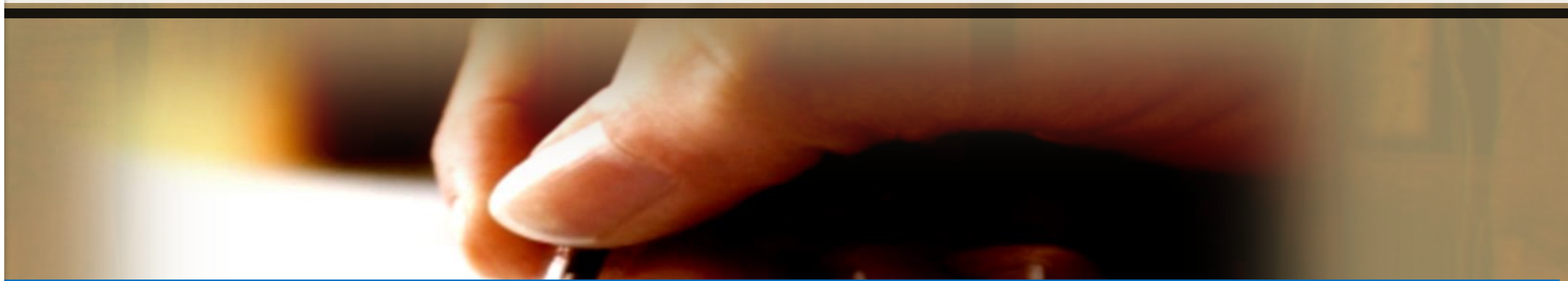
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya

DEPARTEMEN TEKNIK FISIKA - FTIRS



PERSAMAAN DIFERENSIAL BESSEL

Seri: Matematika Rekayasa 1

Oleh: Aulia Siti Aisjah

Persamaan Bessel

- Lihat bentuk umum persamaan PD Bessel order ν:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0$$

Orde dari PD Bessel

- Bahwa $x = 0$ titik singular.
- Beberapa kasus dalam PD Bessel:
  - –orde nol: $\nu = 0$
  - –Orde setengah $\nu = ½$
  - –Orde satu: $\nu = 1$

$$\boxed{y'' + \frac{y'}{x} + \frac{(x^2 - \nu^2)}{x^2} y = 0}$$

Ingat pers. PD Frobenius

Bagaimana Peny. nya?

PD Bessel orde nol

Materi

- Orde nol

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$$

- Diasumsikan bahwa

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \text{ for } a_0 \neq 0,\ x > 0$$

Bentuk extended Power Series

- Turunan dari y

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2}$$

- Substitusi ke PD

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} = 0$$

Persamaan indicial

- Berdasarkan bentuk deret terakhir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} = 0$$

- Dituliskan ulang

$$a_0\left[r(r-1)+r\right]x^r + a_1\left[(r+1)r+(r+1)\right]x^{r+1}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{a_n\left[(r+n)(r+n-1)+(r+n)\right]+a_{n-2}\right\}x^{r+n} = 0$$

- Atau

$$a_0 r^2 x^r + a_1 (r+1)^2 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{a_n (r+n)^2 + a_{n-2}\right\}x^{r+n} = 0$$

- Pers. Indicial $r^2 = 0$, dan diperoleh akar-akar r: $r_1 = r_2 = 0$.

Bentuk rekursi / rekurensi

- Perhatikan bentuk terakhir

$$a_0 r^2 x^r + a_1 (r+1)^2 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ a_n (r+n)^2 + a_{n-2} \right\} x^{r+n} = 0$$

- Bahwa $a_1 = 0$; dan bentuk rekursi

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(r+n)^2}, \; n = 2, 3, \ldots$$

- Sehingga $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$, dan karena $r = 0$,

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m)^2}, \; m = 1, 2, \ldots$$

- Catatan: untuk semua Note: a_n pada r , dituliskan dalam $a_n(r)$. Sehingga $a_{2m}(0)$

Penyelesaian

- Dari bentuk terakhir

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m)^2},\ m = 1, 2, \ldots$$

- maka

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2},\ a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{a_0}{4^2 2^2} = \frac{a_0}{2^4(2\cdot 1)^2},\ a_6 = -\frac{a_0}{2^6(3\cdot 2\cdot 1)^2}, \ldots$$

dan secara umum

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2},\ m = 1, 2, \ldots$$

- sehingga

$$y_1(x) = a_0\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right],\quad x > 0$$

Bessel Mode Pertama, orde nol

Materi

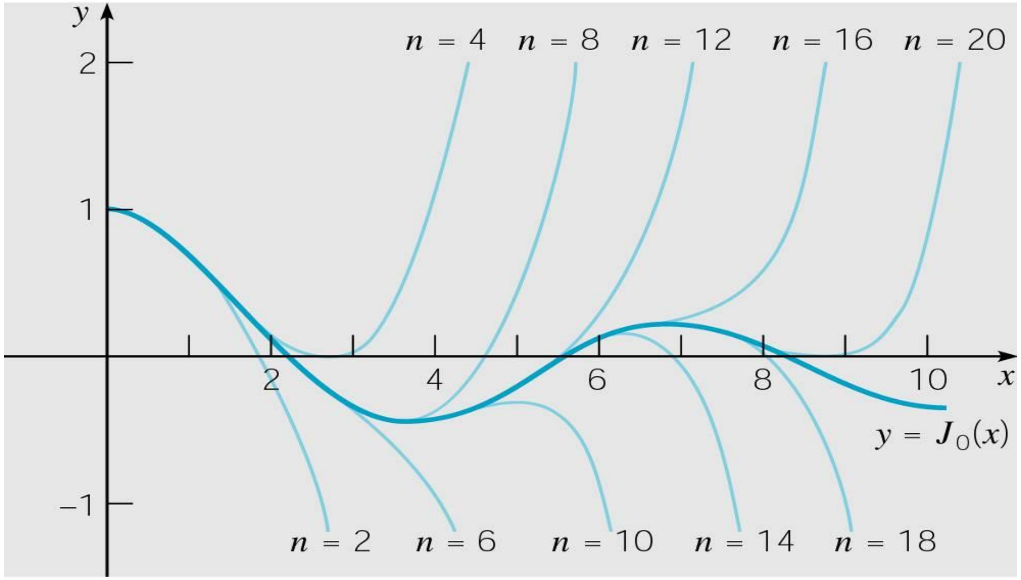
- Penyelesaian pertama untuk Bessel orde nol

$$y_1(x) = a_0\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right], \quad x > 0$$

- Deret konvergen untuk semua x, dan dikatakan bahwa fungsi Bessel dari bentuk pertama orde nol **dinyatakan**

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}, \quad x > 0$$

- Grafik Jo.



Penyelesaian kedua: Koefisien Ganjil

- Karena pers. Indisial bahwa koefisien kedua dalam penyelesaian kedua dapat diperoleh dari:

$$a_n'(r)\Big|_{r=0}$$

- maka

$$a_0(r)r^2x^r + a_1(r)(r+1)^2x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{a_n(r)(r+n)^2 + a_{n-2}(r)\right\}x^{r+n} = 0$$

- sehingga

$$a_1(r) = 0 \quad \Rightarrow a_1'(0) = 0$$

- Dan juga

$$a_n(r) = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

$$a_{2m+1}'(0) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Penyelesaian kedua: Koefisien Genap

- Untuk koefisien genap

$$a_{2m}(r) = -\frac{a_{2m-2}(r)}{(r+2m)^2} \Rightarrow a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(r+2)^2 \cdots (r+2m)^2}, \quad m \geq 1$$

- Dapat ditunjukkan bahwa

$$\frac{a'_{2m}(r)}{a_{2m}(r)} = -2\left[\frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+4} + \cdots + \frac{1}{r+2m}\right]$$

dan

$$a'_{2m}(0) = -2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m}\right] a_{2m}(0)$$

Penyelesaian kedua dalam bentuk deret

- bahwa

$$a'_{2m}(0) = -H_m \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

dimana

$$H_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m}$$

- ditentukan a_0 = 1 dan menggunakan bentuk penyelesaian kedua

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}, \quad x > 0$$

Bessel Mode ke dua, orde nol

- Dengan menggunakan bentuk y_2, bentu penyelesaian kedua seringkali dinyatakan dalam hubungan linier dari Y_0 untuk menggantikan J_0 dan y_2, diketahui bahwa fs **Bessel Mode dua orde nol**

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)\right]$$

- konstanta γ adalah Euler-Mascheroni didefinisikan

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) \cong 0.5772$$

- Substitusi ke y_2 untuk mendapatkan Y_0 diperoleh:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right], \quad x > 0$$

Penyelesaian umum PD Bessel orde nol

- Pnyelesaian PD Bessel orde nol

$$y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$$

dimana

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2},$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m}\right]$$

- Bahwa $J_0 \to 0$ saat $x \to 0$ sedangkan Y_0 mempunyai sifat singularitas pada $x = 0$, dan Y_0 bisa dihilangkan

Sifat Fungsi Bessel

Materi

Penyelesaian PD Bessel

$$y(x) = c_1 Jv(x) + c_2 Yv(x)$$

Derivatives, Recursions

The derivative of $J_\nu(x)$ with respect to x can be expressed by $J_{\nu-1}(x)$ or $J_{\nu+1}(x)$ by the formulas

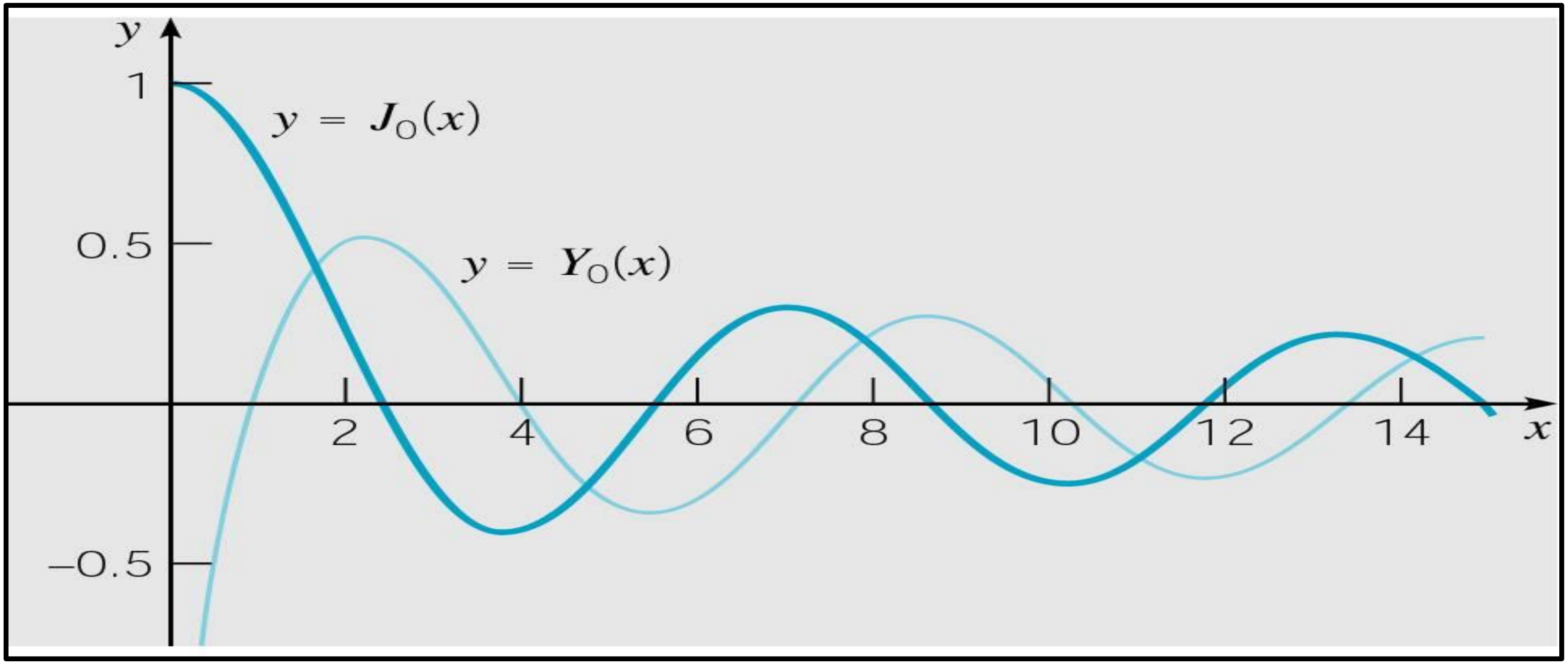
$$\text{(21)} \qquad \begin{aligned} &\textbf{(a)} \quad [x^\nu J_\nu(x)]' = x^\nu J_{\nu-1}(x) \\ &\textbf{(b)} \quad [x^{-\nu} J_\nu(x)]' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \end{aligned}$$

Furthermore, $J_\nu(x)$ and its derivative satisfy the recurrence relations

$$\text{(21)} \qquad \begin{aligned} &\textbf{(c)} \quad J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \\ &\textbf{(d)} \quad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x). \end{aligned}$$

Grafik Bessel orde nol

- Grafik J_0 dan Y_0
- J_0 , Y_0 mempunyai pola yang sama sin *x* dan cos *x* untuk x yang besar bahkan muncul osilasi dari J_0 dan Y_0 meluruh menuju 0



Pendekatan Bessel orde nol

- J_0 dan Y_0 memp pola sama sin *x* dan cos *x* untuk x yang besar

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - v^2\right)y = 0 \iff y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right)y = 0$$

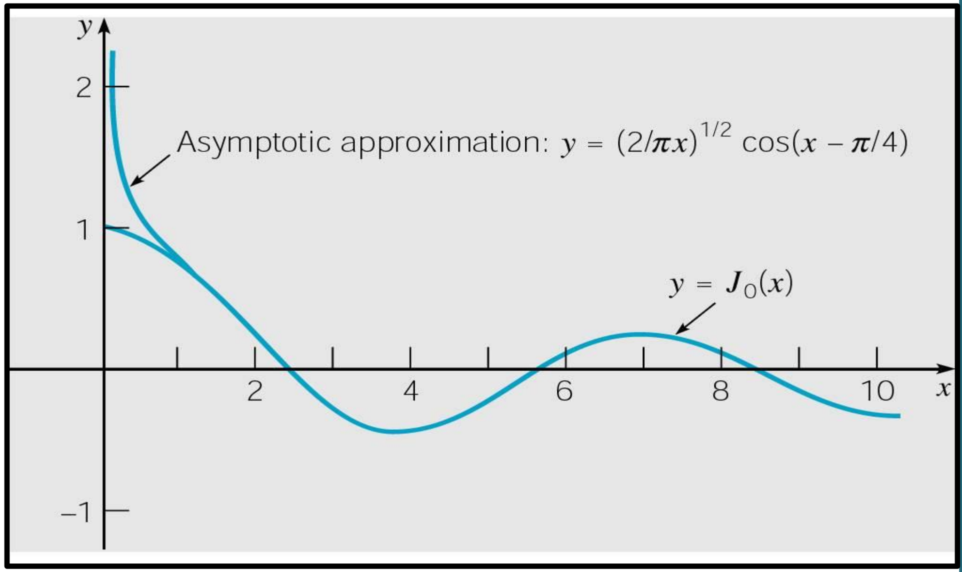
- Sehingga, untuk x besar didekati dengan

$$y'' + y = 0,$$

yang mempunyai solusi sin *x* dan cos *x*. Sehingga,

$$J_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ as } x \to \infty$$

$$Y_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ as } x \to \infty$$



Bessel orde setengah

- PD Bessel orde setengah

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) y = 0$$

- Diasumsikan penyelesaian benbentuk

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \text{ for } a_0 \neq 0,\ x > 0$$

- Substitusikan kembali ke PD semula

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = 0$$

Persamaan rekursi

- Disusun kembali

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(r+n)(r+n-1)+(r+n)-\frac{1}{4}\right]a_n x^{r+n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{r+n+2}=0$$

atau

$$\left(r^2-\frac{1}{4}\right)a_0x^r+\left[(r+1)^2-\frac{1}{4}\right]a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(r+n)^2-\frac{1}{4}\right]a_n+a_{n-2}\right\}x^{r+n}=0$$

- Persamaan indisial diperoleh r_1 = ½, r_2 = - ½ , dan beda nya adalah integer
- Persamaan rekursi

$$a_n(r)=-\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2-1/4},\quad n=2,3,\ldots$$

Penyelesaian ke 1 → y1

- Untuk $r_1 = ½$.

$$\left(r^2 - 1/4\right)a_0 x^r + \left[(r+1)^2 - \frac{1}{4}\right]a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(r+n)^2 - \frac{1}{4}\right]a_n + a_{n-2}\right\}x^{r+n} = 0$$

- Krn $r_1 = ½$, $a_1 = 0$, dan bentuk koefisien , $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$. untuk koefisien suku genap

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{\left(1/2 + 2m\right)^2 - 1/4} = -\frac{a_{2m-2}}{2m\left(2m+1\right)}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

- Atau

$$a_2 = -\frac{a_0}{3!},\ a_4 = -\frac{a_2}{5 \cdot 4} = \frac{a_0}{5!}, \ldots$$

dan

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Fungsi Bessel Mode/ tipe ke satu orde setengah

- Penyelesaian pertama untuk $a_0 = 1$,

$$y_1(x) = x^{1/2}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m}\right],\ \ x>0$$

$$= x^{-1/2}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}\right],\ \ x>0$$

$$= x^{-1/2}\sin x,\ \ x>0$$

- Fungsi **Bessel tipe / mode ke satu orde nol** $J_{½}$, adalah

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} y_1(x) \ \ = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x,\ \ x>0$$

Penyelesaian kedua, koefisien genap

- Untuk r_2 = - ½.

$$\left(r^2-1/4\right)a_0x^r+\left[(r+1)^2-\frac{1}{4}\right]a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(r+n)^2-\frac{1}{4}\right]a_n+a_{n-2}\right\}x^{r+n}=0$$

- Krn r_2 = - ½ , a_1 = sembarang, untuk koef. Genap

$$a_{2m}=-\frac{a_{2m-2}}{\left(-1/2+2m\right)^2-1/4}=-\frac{a_{2m-2}}{2m\left(2m-1\right)},\quad m=1,2,\ldots$$

- maka

$$a_2=-\frac{a_0}{2!},\ a_4=-\frac{a_2}{4\cdot 3}=\frac{a_0}{4!},\ldots$$

dan

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m a_0}{(2m)!},\quad m=1,2,\ldots$$

Penyelesaian kedua untuk koeff. ganjil

Materi

- Koeff ganjil

$$a_{2m+1} = -\frac{a_{2m-1}}{\left(-1/2+2m+1\right)^2 - 1/4} = -\frac{a_{2m-1}}{2m\left(2m+1\right)}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

- maka

$$a_3 = -\frac{a_1}{3!},\ a_5 = -\frac{a_3}{5\cdot 4} = \frac{a_1}{5!}, \ldots$$

dan

$$a_{2m+1} = \frac{(-1)^m a_1}{(2m+1)!}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Penyelesaian kedua

$$y_2(x) = x^{-1/2}\left[a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + a_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}\right], \quad x > 0$$

$$= x^{-1/2}\left[a_0 \cos x + a_1 \sin x\right], \quad x > 0$$

- Solusi kedua ini biasanya dituliskan dalam bentuk fs Bessel

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x, \quad x > 0$$

dimana $a_0 = (2/\pi)^{1/2}$ dan $a_1 = 0$.

- Bentuk umum Bessel orde setengah

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

solusi

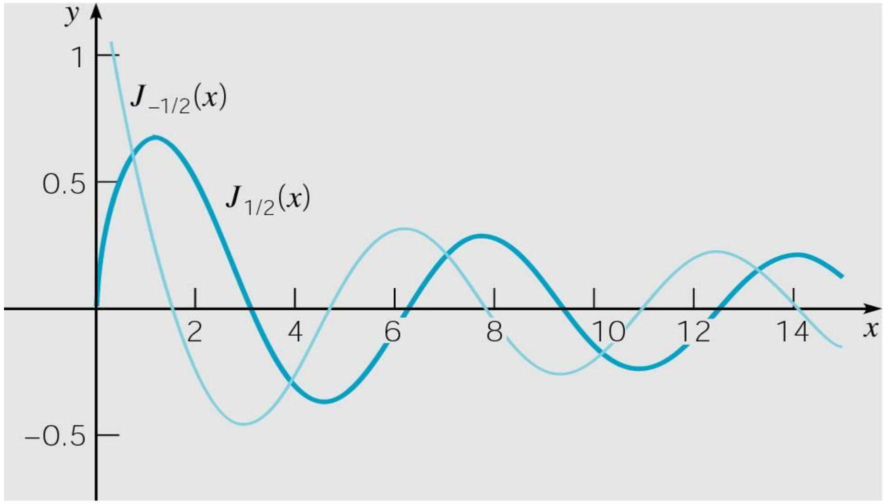
$$y(x) = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$$

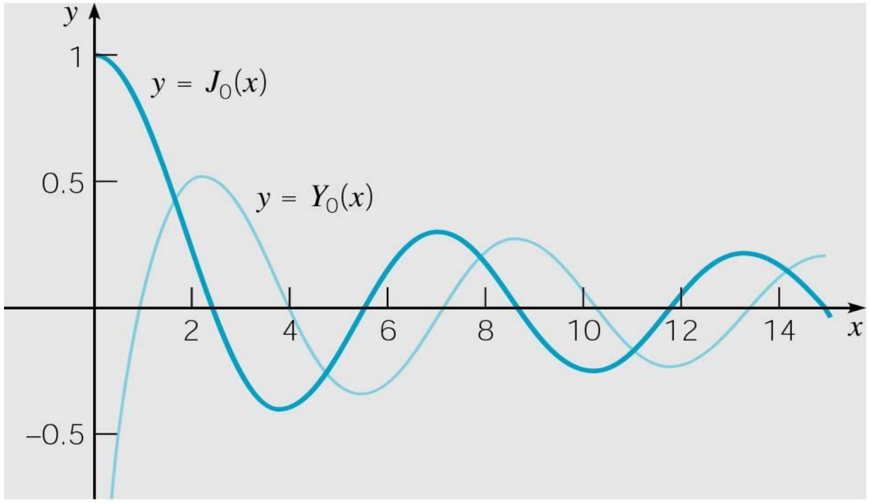
Grafik Bessel orde setengah

- Grafik $J_{½}$, $J_{-½}$ terlihat sifat $J_{½}$, $J_{-½}$ sama dengan J_0 , Y_0 untuk x besar dan digeser π/4.

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x, \qquad J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x$$

$$J_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \qquad Y_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ as } x \to \infty$$





PD Bessel orde satu

- PD Bessel orde satu $$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - 1\right)y = 0$$
- Penyelesaian dalam bentuk
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \text{ untuk } a_0 \neq 0,\ x > 0$$
- Substitusi ke PD semula

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)x^{r+n}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = 0$$

Persamaan rekursi

- Diperoleh dari persamaan indisial

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(r+n)(r+n-1)+(r+n)-1\right]a_n x^{r+n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{r+n+2}=0$$

atau

$$\left(r^2-1\right)a_0 x^r+\left[(r+1)^2-1\right]a_1 x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(r+n)^2-1\right]a_n+a_{n-2}\right\}x^{r+n}=0$$

- Akar r_1 = 1, r_2 = - 1, dan selisih adalah integer
- Pers. rekursi

$$a_n(r)=-\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2-1},\quad n=2,3,\ldots$$

Penyelesaian umum

- Untuk r_1 = 1.

$$\left(r^2-1\right)a_0x^r+\left[(r+1)^2-1\right]a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(r+n)^2-1\right]a_n+a_{n-2}\right\}x^{r+n}=0$$

- r_1 = 1, a_1 = 0, disini, $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$. untuk koefisien genap

$$a_{2m}=-\frac{a_{2m-2}}{\left(1+2m\right)^2-1}=-\frac{a_{2m-2}}{2^2\left(m+1\right)m},\quad m=1,2,\ldots$$

- maka

$$a_2=-\frac{a_0}{2^2\cdot 2\cdot 1},\ a_4=-\frac{a_2}{2^2\cdot 3\cdot 2}=\frac{a_0}{2^4\,3!2!},\ldots$$

dan

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m+1)!m!},\quad m=1,2,\ldots$$

Bessel mode / tipe satu orde satu

Materi

- Penyelesaian ke satu

$$y_1(x) = a_0 x \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m+1)!m!} x^{2m} \right], \quad x > 0$$

- disini $a_0 = ½$, fungsi Bessel mode / tipe ke satu orde satu J_1

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m+1)!m!} x^{2m} \right], \quad x > 0$$

- *Deret konvergen untuk semua x dan* J_1 analitik di semua titik

Penyelesaian kedua

Materi

- Untuk r_1 = -1, bentuk solusi

$$y_2(x) = a\,J_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{2n}\right], \quad x>0$$

- Koefisien c_n ditentukan dari substitusi ke PD semua, dan dapatkan terlebih dahulu persamaan rekursi

$$y_2(x) = -J_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(H_m + H_{m-1}\right)}{2^{2m}\, m!(m-1)!} x^{2n}\right], \quad x>0$$

dimana H_k.

- $J_1 \to 0$ saat $x \to 0$ dan analitik di x = 0, sedangkan y_2 terbatas pada x = 0 yang sama dengan $1/x$.

Fungsi Bessel mode / tipe kedua orde satu

- Bentuk ke dua fungsi Bessel

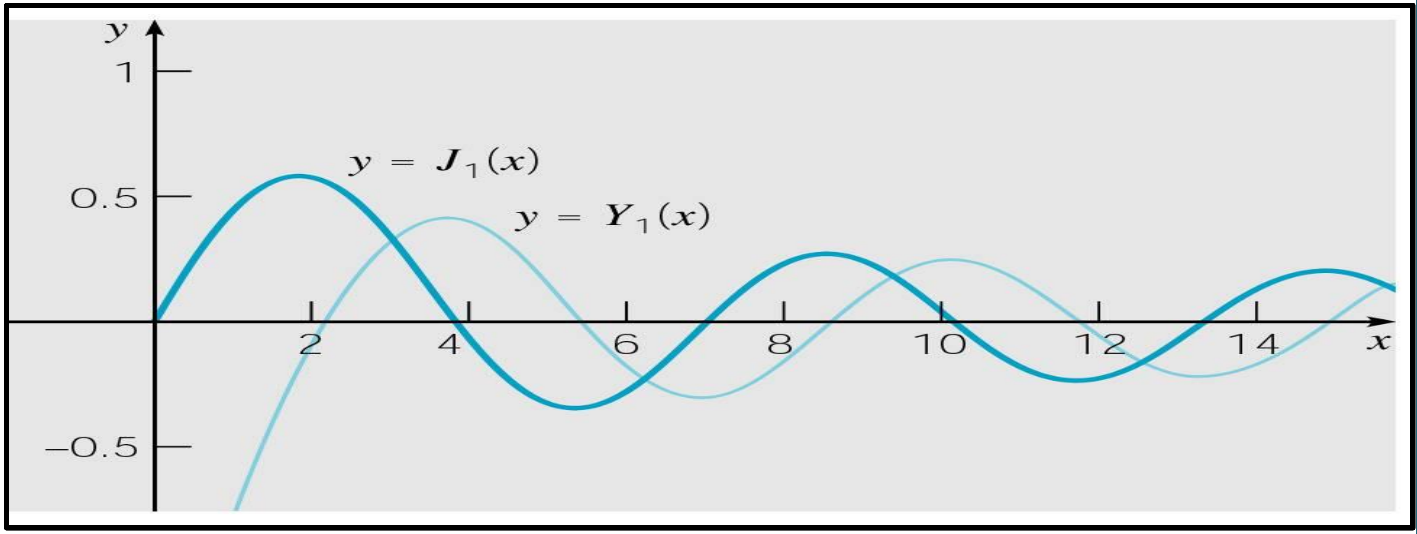
$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}\left[-y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_1(x)\right], \quad x > 0$$

dimana γ ikonstanta Euler-Mascheroni.

- Bentuk umum penyelesaian PD Bessel's orde satu

$$y(x) = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x), \quad x > 0$$

- Bahwa J_1 , Y_1 memp sifat yang sama saat x = 0
- J_1 and y_2.



Ringkasan

Untuk v = non integer (real)

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m!\, \Gamma(\nu + m + 1)}.$$

$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m!\, \Gamma(m - \nu + 1)}.$$

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

Untuk akar v = n integer

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!\, (n + m)!}$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n} m!\, (m - n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} x^{2s+n}}{2^{2s+n} (n + s)!\, s!}$$

BEBERAPA SIFAT FS BESSEL

Sifat ke 1

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x).$$

Bentuk diferensiasi dari Jn(x)

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t}) e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x) t^n.$$

Sifat ke 2

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x).$$

Kasus khusus

$$J_0'(x) = -J_1(x).$$

Sifat ke 3

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J'_n(x).$$

Sifat ke 4

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x).$$

Sifat ke 5

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x).$$

Sifat ke 6

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x).$$

Verifikasi sifat berikut ini

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x).$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x).$$

Bentuk PD Bessel

$$x^2 y'' + xy' + [x^2 - n^2]y = 0$$

Pilih 2 dari 5 soal pada masing-masing kelompok soal berikut

Materi

NRP Ganjil

6. $x^2y'' + \frac{1}{4}\left(x + \frac{3}{4}\right)y = 0 \quad (y = u\sqrt{x}, \sqrt{x} = z)$
7. $x^2y'' + xy' + \frac{1}{4}(x^2 - 1)y = 0 \quad (x = 2z)$
8. $(2x + 1)^2y'' + 2(2x + 1)y' + 16x(x + 1)y = 0$
   $(2x + 1 = z)$
9. $xy'' + (2\nu + 1)y' + xy = 0 \quad (y = x^{-\nu}u)$
10. $x^2y'' + (1 - 2\nu)xy' + \nu^2(x^{2\nu} + 1 - \nu^2)y = 0$
    $(y = x^{\nu}u, x^{\nu} = z)$

NRP Genap

5. $4xy'' + 4y' + y = 0 \quad (\sqrt{x} = z)$
6. $xy'' + y' + 36y = 0 \quad (12\sqrt{x} = z)$
7. $y'' + k^2x^2y = 0 \quad (y = u\sqrt{x}, \frac{1}{2}kx^2 = z)$
8. $y'' + k^2x^4y = 0 \quad (y = u\sqrt{x}, \frac{1}{3}kx^3 = z)$
9. $xy'' - 5y' + xy = 0 \quad (y = x^3u)$

Tugas dikumpulkan pada saat H + 1 EAS

Dikumpulkan di myclassroom
Pada H+1 EAS – jam 24.00 WIB