Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya

Keterkendalian (Controlability)

Pengantar

Materi

Contoh Soal

Ringkasan

Latihan

Asesmen

Pengantar

Materi

Contoh Soal

Ringkasan

Latihan

Asesmen

Vektor Bebas Linear

Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna dari Sistem Kontinyu

Bentuk Lain Syarat Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna

Syarat Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna Pada Bidang-s

Keterkendalian Keluaran

Pengantar

Suatu sistem dikatakan dapat dikendalikan (*controllable*) pada saat t_o, jika vector pengendalian dapat memindahkan sistem dari keadaan mula-mula sebarang $x(t_o)$ ke keadaan yang lain dalam suatu interval waktu yang berhingga.

Konsep *controllability* diperkelnalkan oleh Kalman. Konsep tersebut digunakan untuk merancang sistem pengendalian dengan menggunakan metode ruang keadaan.

Pada beberapa sub-bab berikut akan dibicarakan tentang:

- vektor bebas linier,
- keterkendalian sempurna dari sistem kontinyu,
- syarat keterkendalian keadaan secara sempurna,
- syarat keterkendalian keadaan secara sempurna pada bidang-*s*,
- keterkendalian keluaran.

Materi

Vektor Bebas Linear

Vektor $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …..,$\mathbf{x}_n$dikatakan bebas linier jika,

$$c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2+ \ldots..+c_n\mathbf{x}_n = 0 \qquad \text{(Pers. 1)}$$

dimana c_1, c_2,…..,c_n adalah konstan, mempunyai arti bahwa

$$c_1=c_2=\ldots..=c_n=0 \qquad \text{(Pers. 2)}$$

Sebaliknya, vektor-vector $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,…..,$\mathbf{x}_n$ disebut *bergantung linier* jika dan hanya jika $\mathbf{x}_i$ dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\mathbf{x}_j$ (j=1,2,…,n ; $j \neq i$), atau

$$\mathbf{x}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} c_j \mathbf{x}_j \qquad \text{(Pers. 3)}$$

Vektor Bebas Linear

Untuk suatu himpunan konstanta c_j. Ini berarti bahwa $\mathbf{x}_i$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor lain dalam himpunan tersebut, $\mathbf{x}_i$ *bergantung linier* padanya atau bukan merupakan anggota himpunan yang bebas.

Contoh

(1). Vektor-vektor berikut : $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

adalah *bergantung linier* karena : $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$

.

Vektor Bebas Linear

Contoh

(2). Vektor-vektor berikut :

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

adalah *bebas linier*, karena : $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 = 0$
hanya dipenuhi jika $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Perhatikan jika suatu matrik *nxn* adalah *nonsingular* (yang berarti bahwa matrik tersebut mempunyai *rank-n*atau determinannya tidak nol), maka *n* vektor kolom (baris)-nya *bebas linier*.

Vektor Bebas Linear

Jika matrik *nxn* tersebut *singular* (yang berarti bahwa rank-nya kurang dari *n* atau determinan = nol), maka *n* vektor kolom (baris)-nya *bebas linier*.

Contoh, perhatikan bahwa

$$[\mathbf{x}_1 | \quad \mathbf{x}_2 | \quad \mathbf{x}_3] = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}} = Singular$$

Det (**X**) = 0

$$[\mathbf{y}_1 | \quad \mathbf{y}_2 | \quad \mathbf{y}_3] = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}} = Nonsingular$$

Det (**X**) = 4

Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna dari Sistem Kontinyu

Tinjau sistem kontinyu dalam bentuk persamaan keadaan non homogen sebagai berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad \text{(Pers. 4)}$$

dimana :
x = vektor keadaan (*n*-dimensi).
u = sinyal pengendalian.
A = matrik*n*x*n*.
B = matrik *n*x1.
Sistem yang dinyatakan Pers. 1 disebut terkendali pada saat $t=t_o$ jika dapat ditentukan sinyal pengendalian tanpa kendala yang akan memindahkan suatu keadaan awal ke keadaan akhir sembarang dalam selang waktu terhingga $t_o \leq t \leq t_1$. **Jika setiap keadaan sistem terkendali**, maka sistem dikatakan **terkendali sempurna.**

Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna dari Sistem Kontinyu

- Syarat keterkendalian keadaan secara sempurna.
- Dianggap bahwa keadaan akhirnya adalah titik asal ruang keadaan sedangkan waktu awalnya adalah nol, atau t_o=0.

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \qquad \text{(Pers. 5)}$$

Keterkendalian sempurna → **Jika setiap keadaan sistem terkendali**,

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{At_1}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \qquad \text{(Pers. 6)}$$

Materi

Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna dari Sistem Kontinyu

Atau

$$\mathbf{x}(0) = -\int_{0}^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \qquad \text{(Pers. 7)}$$

perhatikan bahwa $e^{-\mathbf{A}\tau}$ dapat dituliskan,

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(\tau)\mathbf{A}^k \qquad \text{(Pers. 8)}$$

dengan mensubtitusi Pers. 7 dan Pers. 8 diatas diperoleh,

Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna dari Sistem Kontinyu

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \beta_k \qquad \text{(Pers.9)}$$

$$= -\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \hline \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{(Pers. 10)}$$

Jika keadaan sistem terkendali sempurna, maka persamaan di atas harus dipenuhi untuk setiap keadaan awal **x**(0). Ini memerlukan syarat awal bahwa rank dari matrik *nxn*,

$$\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right] \qquad \text{(Pers. 11)}$$

Harus sama dengan *n*.

Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna dari Sistem Kontinyu

Dari analisis ini kita dapat menyatakan syarat keterkendalian keadaan secara sempurna sebagai berikut :

Keadaan sistem yang dinyatakan oleh persamaan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$

terkendali sempurna *jika dan hanya jika* vektor B, AB,…,A^{n-1}B *bebas linier*, atau matrik nxn,

$$\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right]$$

Mempunyai *rank-n*.

Materi

Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna dari Sistem Kontinyu

Hasil yang baru saja diperoleh dapat diperluas untuk kasus vector pengendalian **u** dengan *r*-dimensi, maka dapat dibuktikan bahwa syarat keterkendalian keadaan secara sempurna adalah bahwa matrik berikut *nxnr* berikut

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Dimana **u** adalah vector *r*-dimensi, syarat keterkendalian keadaan secara sempurna adalah matrik *nxnr* berikut,

$$\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right]$$

harus mempunyai *rank-n*, atau mengandung *n*-vektor kolom *bebas linier*.

Materi

Bentuk Lain Syarat Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna

Tinjau sistem kontinyu dalam bentuk persamaan keadaan non-homogen sebagai berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

dimana :
x = vektor keadaan (*n*-dimensi).
u = sinyal pengendalian (*r*-dimensi).
A = matrik *nxn*.
B = matrik *nxr*.

Bentuk Lain Syarat Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna

• Jika *eigenvektor* dari matrik **A** tidak ada yang rangkap, maka dapat dicari suatu matrik transformasi **P** sedemikian rupa sehingga,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \text{(Pers. 12)}$$

• Perhatikan bahwa jika *eigenvalue* dari **A** tidak ada yang rangkap, maka *eigenvektor* dari **A** tidak ada yang rangkap, akan tetapi hal ini tidak berlaku sebaliknya.

• Suatu matrik simetrik nyata *nxn* yang mempunyai *eigenvalue* rangkap, mempunyai *n-eigenvektor* yang berbeda

Materi

Bentuk Lain Syarat Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna

Perhatikan juga bahwa setiap kolom matrik **P** merupakan *eigenvektor* dari **A** yang berkaitan dengan λ_i (i=1,2,…,n).

Bila transformasi variable keadaan:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z} \qquad \text{(Pers. 13)}$$

dengan subtitusi persamaan di atas kedalam persamaan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ diperoleh

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \qquad \text{(Pers. 14)}$$

Bentuk Lain Syarat Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna

dengan mendefinisikan

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{F} = (f_{ij}) \qquad \text{(Pers. 15)}$$

Pers. 15 dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 + f_{11}u_1 + f_{12}u_2 + \ldots + f_{1r}u_r \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 + f_{21}u_1 + f_{22}u_2 + \ldots + f_{2r}u_r \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= \lambda_n z_n + f_{n1}u_1 + f_{n2}u_2 + \ldots + f_{nr}u_r \end{aligned} \qquad \text{(Pers. 16)}$$

Bentuk Lain Syarat Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna

- Jika pada matrik **F**$_{nxr}$ terdapat suatu baris yang semua elemennya berharga nol, maka vektor keadaannya tidak dapat dikendalikan dengan sinyal pengendalian u_i.

- Syarat keterkendalian keadaan secara sempurna adalah untuk *eigenvektor* dari matrik **A** yang berbeda, keadaan sistem terkendali sempurna jika dan hanya jika tidak ada baris dari matrik $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$ yang semua elemennya berharga nol.

- Untuk menerapkan syarat keterkendalian keadaan secara sempurna matrik $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ pada persamaan $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APz} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bu}$ dalam bentuk diagonal.

Bentuk Lain Syarat Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna

- Jika ada *eigenvektor* dari matrik **A**: sama, maka tidak mungkin didapatkan bentuk matrik diagonal. Pada kasus ini dapat mentranformasikan matrik **A** ke dalam bentuk kanonik Jordan.

- Sebagai contoh, jika **A** mempunyai *eigenvalue* $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_4, \lambda_6, \ldots, \lambda_n$ dan mempunyai (n-3) *eigenvektor* yang berbeda, maka bentuk kanonik Jordan dari matrik **A** adalah,

$$
\mathbf{J} = \left[\begin{array}{ccc:cc:ccc}
\lambda_1 & 1 & 0 & & & & 0 & 0 \\
0 & \lambda_1 & 1 & & & & \iddots & 0 \\
0 & 0 & \lambda_1 & & & & & \\
\hdashline
 & & & \lambda_4 & 1 & & & \\
 & & & 0 & \lambda_4 & & & \\
\hdashline
 & & & & & \lambda_6 & & 0 \\
0 & \iddots & & & & & \ddots & \\
0 & 0 & & & & & 0 & \lambda_n
\end{array}\right]
$$

Bentuk Lain Syarat Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna

- Jika ada *eigenvektor* dari matrik **A**: sama, maka tidak mungkin didapatkan bentuk matrik diagonal. Pada kasus ini dapat mentranformasikan matrik **A** ke dalam bentuk kanonik Jordan.

- Sebagai contoh, jika **A** mempunyai *eigenvalue* $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_4, \lambda_6, \ldots, \lambda_n$ dan mempunyai (n-3) *eigenvektor* yang berbeda, maka bentuk kanonik Jordan dari matrik **A** adalah,

$$
\mathbf{J} = \left[\begin{array}{ccc:cc:cc}
\lambda_1 & 1 & 0 & & & 0 & 0 \\
0 & \lambda_1 & 1 & & & \iddots & 0 \\
0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\
\hdashline
 & & & \lambda_4 & 1 & & \\
 & & & 0 & \lambda_4 & & \\
\hdashline
 & & & & & \lambda_6 & 0 \\
0 & \iddots & & & & & \ddots \\
0 & 0 & & & & 0 & \lambda_n
\end{array}\right]
$$

Blok Jordan

Bentuk Lain Syarat Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna

- Submetrik 3x3 dan 2x2, pada diagonal utama disebut *blok Jordan*.

Misal kita dapat menentukan matrik transformasi **S** sedemikian rupa sehingga,

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{J} \qquad \text{(Pers. 17)}$$

Jika kita definisikan vektor keadaan baru **z** dengan $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{z}$ (Pers. 18)

Maka,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{z} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{J}\mathbf{z} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \qquad \text{(Pers. 19)}$$

Bentuk Lain Syarat Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna

Syarat keterkendalian keadaan secara sempurna dari sistem yang dinyatakan oleh persamaan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$

Keadaan sistem ***terkendali sempurna*** jika dan hanya jika :

1). Tidak ada dua blok Jordan pada matrik **J** yang dinyatakan oleh persamaan bentuk kanonik Jordan dari matrik **A** dengan *eigenvalue* yang sama.
2). Elemen-elemen dari suatu baris matrik $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}$ yang berkaitan dengan baris terakhir blok Jordan tidak seluruhnya berharga nol.
3). Elemen-elemen setiap baris matrik $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}$, yang berkaitan dengan *eigenvalue* yang berbeda tidak seluruhnya berharga nol.

Materi

Syarat Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna Pada Bidang-*s*

- Syarat keterkendalian keadaan secara sempurna, dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi alih atau matrik alih.
- Syarat perlu dan syarat cukup keterkendalian keadaan secara sempurna adalah bahwa tidak terjadi penghapusan pada fungsi alih atau matrik alih.
- Jika terjadi penghapusan, maka sistem tidak dapat dikendalikan pada mode yang dihapuskan.

Materi

Keterkendalian Keluaran

- ❑ Dalam sistem pengendalian yang praktis, mungkin kita lebih memilih mengontrol keluaran sistem daripada mengontrol keadaan sistem.
- ❑ Keterkendalian keadaan sistem secara sempurna adalah tidak perlu dan tidak cukup untuk mengontrol keluaran sistem.
- ❑ Oleh karena itu didefinisikan secara terpisah, keterkendalian keluaran sistem secara sempurna.

Keterkendalian Keluaran

Tinjau sistem yang dinyatakan dengan persamaan berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \qquad \text{(Pers. 20)}$$

dimana,

x = vektor keadaan (vektor *n*-dimensi).
u = vektor pengendalian (vektor *r*-dimensi).
y = vektor keluaran (vektor *m*-dimensi)
A = matrik *n*x*n*.
B = matrik *n*x*r*.
C = matrik *m*x*n*.
D = matrik *m*x*r*.

Keterkendalian Keluaran

Keluaran sistem yang dinyatakan pada Pers. 20 disebut terkendali sempurna jika dapat ditentukan vektor pengendalian tanpa kendala $\mathbf{u}(t)$ yang akan memindahkan setiap keluaran awal $\mathbf{y}(t_o)$ ke suatu keluaran akhir $\mathbf{y}(t_1)$ dalam selang waktu yang terhingga $t_o \leq t \leq t_1$.

Syarat **keterkendalian keluaran secara sempurna** adalah sebagai berikut,

Sistem yang dinyatakan oleh persamaan Pers. 20, keluarannya terkendali sempurna jika dan hanya jika matrik mx$(n+1)r$,

$$\left[\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB} \mid \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \mid \cdots \mid \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \mid \mathbf{D}\right]$$

mempunyai *rank-m*.

Contoh Soal 1

Sebuah fungsi transfer system dinyatakan dalam bentuk berikut,

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s + 2{,}5}{(s + 2{,}5)(s - 1)}$$

Periksa sifat keterkendalian sistem.

Contoh Soal 1

Penyelesaian

Jika bahwa terjadi penghapusan faktor (s+2,5) pada pembilang dan penyebut fungsi alih ini. (jadi kita kehilangan satu derajat kebebasan). Karena penghapusan ini, maka keadaan sistem tidak terkendali sempurna.

Cara lain untuk memeriksa sifat keterkendalian, dengan Penyajian ruang keadaan berikut ini,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2,5 & -1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

karena

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

maka rank dari matrik $[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}]$ adalah satu. Dengan demikian kita peroleh kesimpulan yang sama, **keadaan sistem tidak terkendali sempurna**.

Ringkasan

1. Keadaan sistem yang dinyatakan oleh persamaan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ terkendali sempurna *jika dan hanya jika* vektor B, AB,…,A^{n-1}B *bebas linier*, atau matrik nxn,

$$\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right]$$

Mempunyai *rank-n*.

2. Dan keluaran system terkendali sempurna jika dan hanya jika matrik

$$\left[\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB} \mid \mathbf{CA}^{2}\mathbf{B} \mid \cdots \mid \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \mid \mathbf{D}\right]$$

mempunyai *rank-m*.

Latihan

Tinjau fungsi alih berikut,

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{(s+6)(s-2)}$$

Periksa sifat keterkendalian sistem.

SEKIAN

&

TERIMAKASIH