Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya

Keteramatan (Observability)

Pengantar

Materi

Contoh Soal

Ringkasan

Latihan

Asesmen

- Pengantar
- Materi
- Contoh Soal
- Ringkasan
- Latihan
- Asesmen

- Konsep Keteramatan
- Keteramatan Sistem Kontinyu
- Syarat Keteramatan Sempurna pada Bidang-s
- Bentuk Lain Syarat Keteramatan Sempurna

Pengantar

Konsep keteramatan berguna dalam penyelesaian persoalan rekonstruksi variabel keadaan yang tidak terukur, dari variabel yang terukur dalam selang waktu yang seminimum mungkin.

Dalam praktek, kesukaran yang dijumpai oleh sistem pengendalian optimal adalah adanya beberapa variabel keadaan yang tidak dapat diukur secara langsung. Selanjutnya perlu diestimasi variabel keadaan yang tidak terukur untuk menentukan sinyal pengendalian optimal.

Konsep Keteramatan

Tinjau sistem tanpa penggerak yang dinyatakan oleh persamaan berikut, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ (Pers. 1)

$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ (Pers. 2)

dimana,

x = vektor keadaan (vektor*n*-dimensi).
y = vektor keluaran (vektor*m*-dimensi)
A = matrik *n*x*n*.
C = matrik *m*x*n*.

Konsep Keteramatan

- Sistem dikatakan teramati sempurna jika setiap keadaan awal dari **x**(0) dapat digunakan untuk pengamatan keluaran **y**(*t*) selama selang waktu terhingga.

- Sistem teramati sempurna jika setiap transisi keadaan mempengaruhi setiap elemen vektor keluaran.

- Konsep keteramatan berguna dalam penyelesaian persoalan rekonstruksi variabel keadaan yang tidak terukur, dari variabel yang terukur dalam selang waktu yang seminimum mungkin.

.

Keteramatan Sistem Kontinyu

Dari Pers. 1 dan 2 vektor keluaran sistem adalah sebagai berikut,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \qquad \text{(Pers. 3)}$$

dengan mengingat bahwa,

diperoleh,

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{A}^k \qquad \text{(Pers. 4)}$$

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) \qquad \text{(Pers. 5)}$$

Keteramatan Sistem Kontinyu

- Jika sistem teramati sempurna, maka untuk keluaran **y**(t) pada selang waktu $t_o \leq t \leq t_1$, **x**(0) ditentukan secara unik dari Pers. 5

- Sistem yang dinyatakan dengan pers. (1) dan (2) teramati sempurna jika dan hanya jika matrik *nxnm*,

$$\left[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \mid \cdots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*\right] \qquad \text{(Pers. 6)}$$

mempunyai *rank-n*, atau mempunyai *n*-vektor kolom bebas linier.

Syarat Keteramatan Sempurna pada Bidang-s

- Syarat keteramatan sempurna juga dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi alih atau matrik alih.
- Syarat perlu dan syarat cukup dari keteramatan sempurna adalah bahwa tidak ada penghapusan pada fungsi alih atau matrik alih.
- Jika terjadi penghapusan, maka mode yang terhapus tidak dapat diamati pada keluarannya.

Materi

Bentuk Lain Syarat Keteramatan Sempurna

- Sistem yang dinyatakan oleh (Pers. 1) dan (Pers. 2).
- Matrik transformasi **P** menstransformasikan **A** menjadi matrik diagonal, atau

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} \qquad \text{(Pers. 7)}$$

- dimana **D** adalah matrik diagonal.

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z} \qquad \text{(Pers. 8)}$$

- Didefinisikan,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} = \mathbf{D}\mathbf{z} \qquad \text{(Pers. 9)}$$

- Selanjutnya persamaan (1) dan (2) dapat dituliskan,

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z} \qquad \text{(Pers. 10)}$$

dengan demikian

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{z}(0) \qquad \text{(Pers. 11)}$$

Materi

Bentuk Lain Syarat Keteramatan Sempurna

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{CP}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\mathbf{z}(0) = \mathbf{CP}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} z_1(0) \\ e^{\lambda_2 t} z_2(0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} z_n(0) \end{bmatrix} \qquad \text{(Pers. 12)}$$

- Sistem teramati sempurna jika tidak ada kolom dari matrik *mxn* **CP** yang semua elemennya berharga nol.
- Hal ini dikarenakan jika kolom ke-*i* dari matrik **CP** semua elemennya berharga nol, maka variabel keadaan $\mathbf{z}_i(0)$ tidak terlihat pada persamaan keluaran sehingga tidak dapat ditentukan dari pengamatan $\mathbf{y}(t)$.
- Dengan demikian $\mathbf{x}(0)$ yang direlasikan dengan $\mathbf{z}(0)$ oleh matrik nonsingular **P**, tidak dapat ditentukan. (Ingat bahwa pengujian ini hanya dapat diterapkan jika matrik $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ berbentuk diagonal).

Bentuk Lain Syarat Keteramatan Sempurna

- Jika matrik **A** tidak dapat ditransformasikan menjadi matrik diagonal, maka dengan menggunakan matrik transformasi yang sesuai **S**, dapat ditransformasikan **A** menjadi bentuk Kanonik Jordan, atau

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{CP}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{z}(0) \qquad \text{(Pers. 13)}$$

- Dimana **J** adalah bentuk *Kanonik Jordan*

Sistem disebut teramati sempurna jika :

1. Tidak ada dua blok Jordan dalam **J** dengan *eigenvalue* yang sama.
2. Tidak adal kolom dari **CS** yang berkaitan dengan baris pertama tiap blok Jordan, terdiri dari elemen-elemen nol.
3. Tidak ada kolom dari **CS** yang berkaitan dengan *eigenvalue* yang berbeda, terdiri dari elemen-elemen nol.

Materi

Sistem berikut adalah *teramati sempurna*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} 2 & 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hdashline & & & -3 & 1 \\ & & & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Contoh Soal 1

Periksa apakah Sistem berikut adalah *teramati sempurna*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hline & & & -3 & 1 \\ & & & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Sistem
Tidak Teramati Sempurna

Contoh Soal 2

Periksa system ini, Apakah terkendali dan teramati ?

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

Karena rank dari matrik,

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

adalah dua, maka keadaan sistem *terkendali sempurna*. Keterkendalian keluaran, diperoleh dari *rank* matrik berikut,

$$[\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rank dari matrik ini adalah satu. Oleh karena itu keluaran sistem *terkendali sempurna*.

Contoh Soal 2

Penyelesaian

Untuk menguji syarat keteramatan, R*ank* dari matrik berikut,

$$\left[\mathbf{C}' \mid \mathbf{A}'\mathbf{C}'\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah dua. Dengan demikian sistem *teramati sempurna*.

Ringkasan

- Sistem yang dinyatakan dengan persamaan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ teramati sempurna jika dan hanya jika matrik *nxnm*,

$$\left[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \mid \cdots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*\right]$$

mempunyai *rank-n*, atau mempunyai *n*-vektor kolom bebas linier.

- Syarat keteramatan sempurna juga dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi alih atau matrik alih.

Latihan

Analisa system berikut ini, apakah teramati secara sempurna atau Tidak?

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Dimana,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

SEKIAN

&

TERIMAKASIH