Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya

OPTIMAL CONTROL - LQR

Aulia Siti Aisjah
Teknik Fisika
Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)

Pers. State space

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x(0) = x_0$$

Pilih untuk $u : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^m$ minimize

$$J = \int_0^T \left(x(\tau)^T Q x(\tau) + u(\tau)^T R u(\tau) \right) \, d\tau + x(T)^T Q_f x(T)$$

$$Q = Q^T \geq 0,\ Q_f = Q_f^T \geq 0,\ R = R^T > 0$$

Matriks state – cost / kriteria, dan state cost kondisi final, matriks input cost

LQR

Sebuah fungsi V(t)

$$V_t : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

Fungsi kriteria

$$V_t(z) = \min_u \int_t^T \left(x(\tau)^T Q x(\tau) + u(\tau)^T R u(\tau)\right) \, d\tau + x(T)^T Q_f x(T)$$

Pers. Energi state

Pers. Energi sinyal kontrol

Kondisi final

Dikenakan pada

$$x(t) = z, \; \dot{x} = Ax + Bu$$

Persamaan plant – state space

Variabel State – X

U – sinyal pengendali

Materi

Bentuk Lain Syarat Keteramatan Sempurna

- Sistem yang dinyatakan oleh (Pers. 1) dan (Pers. 2).
- Matrik transformasi **P** menstransformasikan **A** menjadi matrik diagonal, atau

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} \qquad \text{(Pers. 7)}$$

- dimana **D** adalah matrik diagonal.

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z} \qquad \text{(Pers. 8)}$$

- Didefinisikan,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} = \mathbf{D}\mathbf{z} \qquad \text{(Pers. 9)}$$

- Selanjutnya persamaan (1) dan (2) dapat dituliskan,

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z} \qquad \text{(Pers. 10)}$$

dengan demikian

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{z}(0) \qquad \text{(Pers. 11)}$$

$\dot{x} = P\dot{z}$

$x = Pz$

$\dot{x} = Ax$

$\dot{x} = APz$

$$x \underset{P}{\rightleftarrows} z$$

$P\dot{z} = APz$

$\dot{z} = P^{-1}APz$

V(t) akan memberikan nilai minimum pada fungsi biaya / fungsi kriteria dalam bentuk berikut (pers kuadrat),

Pada kondisi final

$$V_T(z) = z^T Q_f z$$

Pada kondisi sepanjang waktu t, dengan dan syarat bahwa:

$$V_t(z) = z^T P_t z,$$

$$P_t = P_t^T \geq 0$$

Dapat diperoleh dari penyelesaian PD

Dalam selang t, t+h, dengan h <<

Peny. Integrasi numerik, → pendekatan

$$\int_t^{t+h} \left(x(\tau)^T Q x(\tau) + w^T R w\right) \, d\tau \approx h(z^T Q z + w^T R w)$$

Pers. Energi state

Pers. Energi sinyal kontrol

$$x(t+h) \approx z + h(Az + Bw)$$

$\dot{x} = AX + Bu$

$\frac{x(t+h)}{h} = \frac{x(t)}{h} + \dots$

$$\begin{aligned} V_{t+h}(z + h(Az + Bw)) \\ &= (z + h(Az+Bw))^T P_{t+h}(z + h(Az + Bw)) \\ &\approx (z + h(Az+Bw))^T (P_t + h\dot{P}_t)(z + h(Az + Bw)) \\ &\approx z^T P_t z + h\left((Az + Bw)^T P_t z + z^T P_t (Az + Bw) + z^T \dot{P}_t z\right) \end{aligned}$$

$$z^T P_t z + h\left(z^T Q z + w^T R w + (Az + Bw)^T P_t z + z^T P_t (Az + Bw) + z^T \dot{P}_t z\right)$$

$$\int_t^{t+h} \left(x(\tau)^T Q x(\tau) + w^T R w\right)\, d\tau \approx h(z^T Q z + w^T R w)$$

Optimasi di daerah w,

$$2hw^T R + 2hz^T P_t B = 0$$

Sehingga diperoleh w optimal = w*

$$w^* = -R^{-1} B^T P_t z$$

dan sinyal kendali LQR

$$u_{\mathrm{lqr}}(t) = K_t x(t), \qquad K_t = -R^{-1} B^T P_t$$

Pers. W* disubstitusikan ke dalam pers. Hamiltonian

$$z^T P_t z \approx z^T P_t z + \\ +h\left(z^T Q z + w^{*T} R w^* + (Az + Bw^*)^T P_t z + z^T P_t (Az + Bw^*) + z^T \dot{P}_t z\right)$$

Bentuk pers diatas, dapat disederhanakan:

$$-\dot{P}_t = A^T P_t + P_t A - P_t B R^{-1} B^T P_t + Q$$

PD Riccati untuk LQR

Pers. Di atas dapat diselesaikan secara numerik

$$P_T = Q_f$$

Tahapan dalam merancag LQR:

1. Selesaikan Pers Riccati

$$-\dot{P}_t = A^T P_t + P_t A - P_t B R^{-1} B^T P_t + Q, \qquad P_T = Q_f$$

2. Nilai u optimal

$$u_{\mathrm{lqr}}(t) = K_t x(t),\ K_t := -R^{-1} B^T P_t$$

Biasanya, Pt konvergen saat t turun dibawah nilai T, dan Pss adalah memenuhi pers. Riccati

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

LQR

$$L = \frac{1}{2}x^T Q x + \frac{1}{2}u^T R u.$$

Dibutuhkan L → 0 yang diperoleh saat Q dan R definit positif

$$\begin{aligned} L_x &= x^T Q \\ L_u &= u^T R \\ f_x &= A \\ f_u &= B, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ x(t_o) &= x_o \\ \dot{\lambda} = -Qx - A^T\lambda & \\ \lambda(t_f) &= 0 \\ Ru + B^T\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan transformasi var. state $\lambda = Px.$

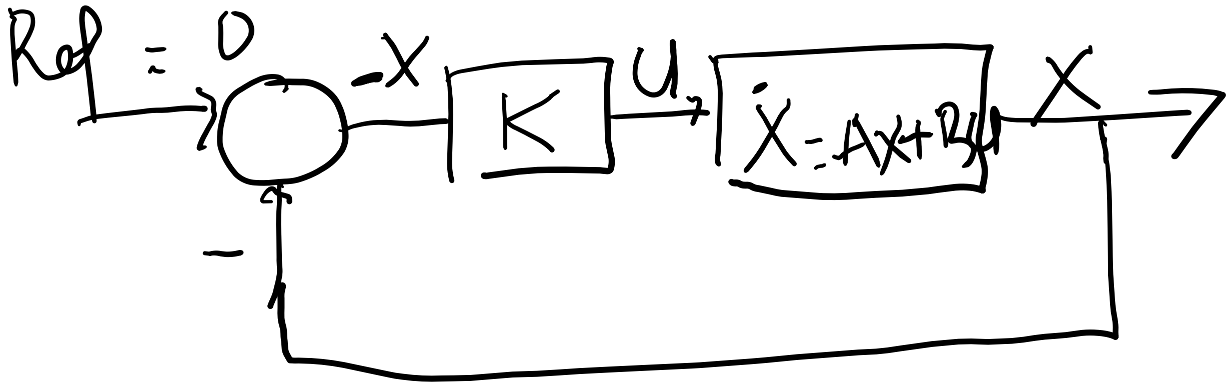
$$PAx + A^T Px + Qx - PBR^{-1}B^T Px + \dot{P} = 0.$$

Pers. Riccati

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0.$$

Digunakan untuk menyelesaikan P

Digunakan untuk menentukan gain feedback



Gain statis: LQR menghasilkan matriks gain statis K, yang bukan sistem dinamis. Oleh karena itu, urutan sistem loop tertutup sama dengan urutan instalasi.

Kekokohan / robustness. LQR mencapai margin kenaikan tanpa batas: kg = ~, menyiratkan bahwa lokus (PC) (nilai skalar) atau (det (I + PC) −1) (kasus MIMO) mendekati titik asal sepanjang sumbu imajiner. LQR juga menjamin margin fase ϒ $\geq$ 60 derajat. Ini sesuai dengan pedoman praktis untuk desain sistem kontrol.

Variabel Keluaran. Dalam banyak kasus, bukan keadaan x yang harus diminimalkan, tetapi variabel keluaran y. Dalam hal ini, kami menetapkan matriks pembobot $Q = C^T Q'C$ karena $y = Cx$, dan matriks bantuan (auxiliary) Q' memberi bobot pada output plant
Perilaku Pole-Loop Tertutup: Expensive Kontrol. Ketika $R >> C^T Q' C$, fungsi biaya didominasi oleh kontrol u, dan pengendali meminimalkan aksi kontrol. Dalam kasus pabrik yang benar-benar stabil, kenaikannya akan menuju ke nol, sehingga kutub loop tertutup mendekati kutub loop terbuka plant, secara konsisten dengan lokus skalar. **Kontrol yang optimal** harus selalu menstabilkan sistem loop tertutup, sehingga harus ada perhitungan untuk pole yang tidak stabil. Solusi kontrol expensive menempatkan kutub loop tertutup yang stabil pada bayangan pole yang tidak stabil.

Terdapat 2 solusi pada persamaan state space dengan pengendali LQR:

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}, \quad && x(0) = x_o \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= -\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}, && \boldsymbol{\lambda}(T) = \mathbf{S}(T)\mathbf{x}(T)\end{aligned}}$$

Sistem Hamiltonian :

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T\end{bmatrix}}_{\text{Matriks hamiltonian}}\begin{bmatrix}\mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix}$$

Peny. feedback:

asumsi: $\lambda(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t)$ dimana $\mathbf{S}(T)$ *diberikan*

closed-loop feedback control: $\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}\mathbf{x}$

Dan dua titik nilai batas

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{S}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{S})\mathbf{x}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\mathbf{S}}\mathbf{x} + \mathbf{S}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{S}}\mathbf{x} + \mathbf{S}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{S})\mathbf{x} = -\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{T}\mathbf{S}\mathbf{x}$$

Persamaan matrix Riccati:

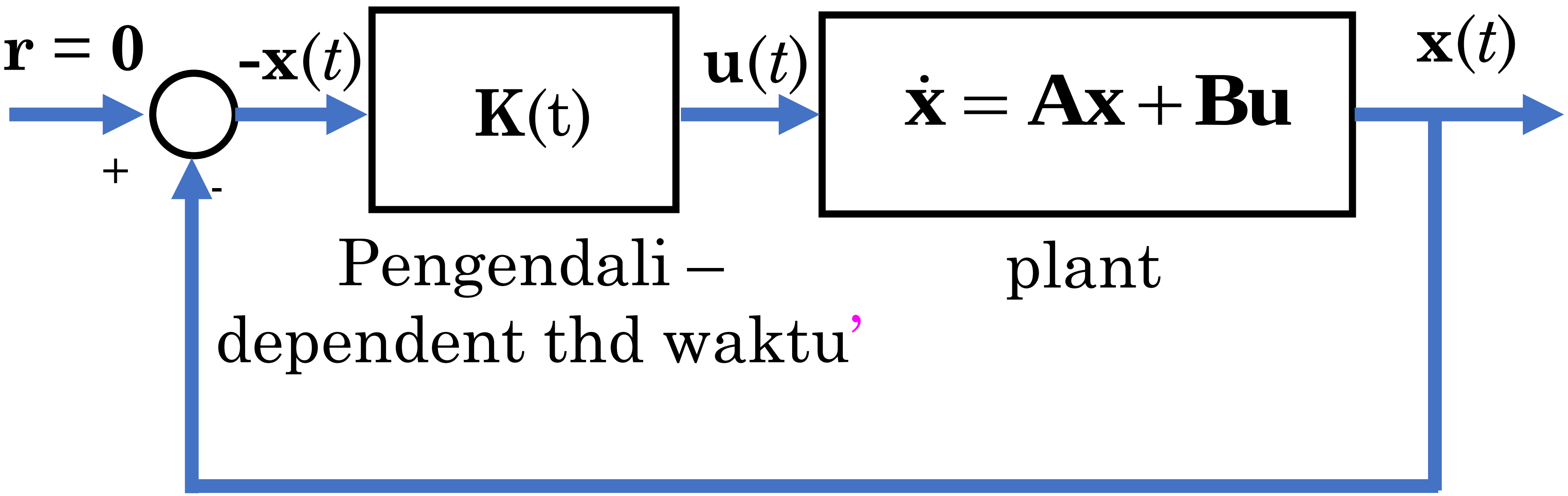
$$\boxed{-\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{A}^{T}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A} - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{S} + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{S}(T) \ \text{given}}$$

Dapat diselesaikan dengan peny. PD backward scr numerik.

Kontrol optimal: $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t)$

sehingga $\boxed{\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)}$

Dimana **K**(t) - Gain *Kalman* $\boxed{\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{S}(t)}$



Kontrol – steady state dan feedback suboptimal

As $T \to \infty$ Pers. Riccati → konvergen:

$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}_\infty$ Sehingga diperoleh

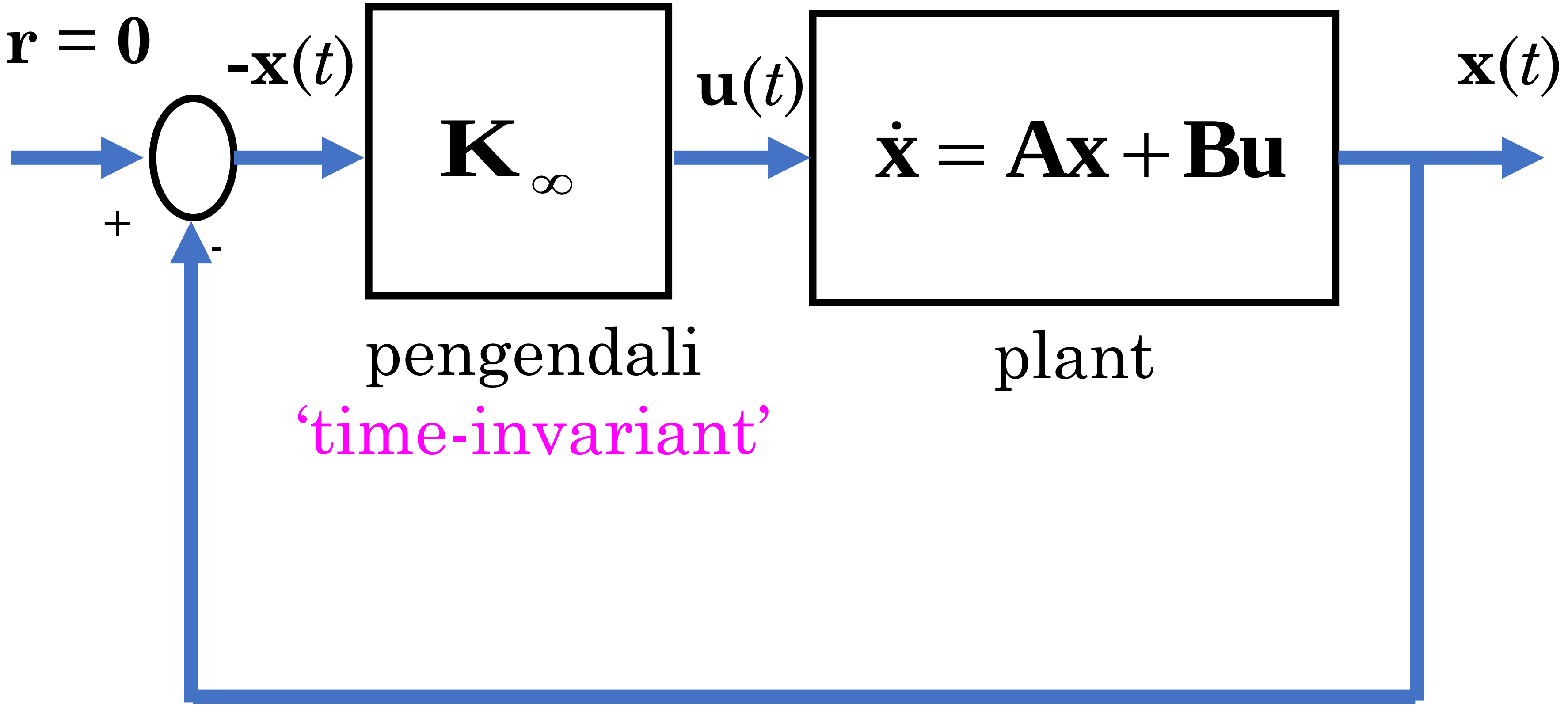
Gain $\mathbf{K}_\infty$

$\mathbf{S}_\infty$ Diperoleh dg cara peny. Pers. *Riccati* :

$$\boxed{\mathbf{A}^T\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A} - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad \to \quad \mathbf{S}_\infty}$$

Dan diperoleh gain Kalman kondisi stabil::

$$\boxed{\mathbf{K}_\infty = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}_\infty}$$

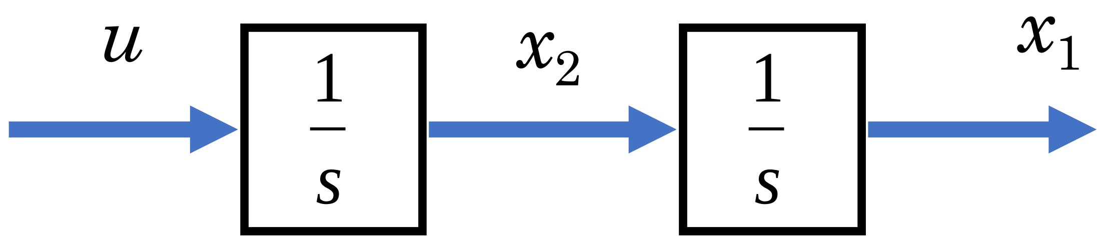

$\mathbf{r} = \mathbf{0}$
$-\mathbf{x}(t)$
$\mathbf{K}_{\infty}$
$\mathbf{u}(t)$
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$
$\mathbf{x}(t)$
+
-
pengendali
'time-invariant'
plant

Contoh

$$\min_{u(t)} \left\{ J = \frac{1}{2} \int_0^T (x_1^2 + u^2)\,dt \right\}$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 1$$

$$\dot{x}_2 = u, \quad x_2(0) = 0$$



disini:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad R = 1$

Subsitusi ke pers. Riccati :

$$-\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{A}^T\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A} - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S} + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{S}(T) = \mathbf{0}$$

$$-\dot{s}_{11} = -s_{12}^2 + 1, \qquad s_{11}(T) = 0$$

$$-\dot{s}_{12} = s_{11} - s_{12}s_{22}, \quad s_{12}(T) = 0 \quad \rightarrow \quad s_{11}(t),\; s_{12}(t),\; s_{22}(t)$$

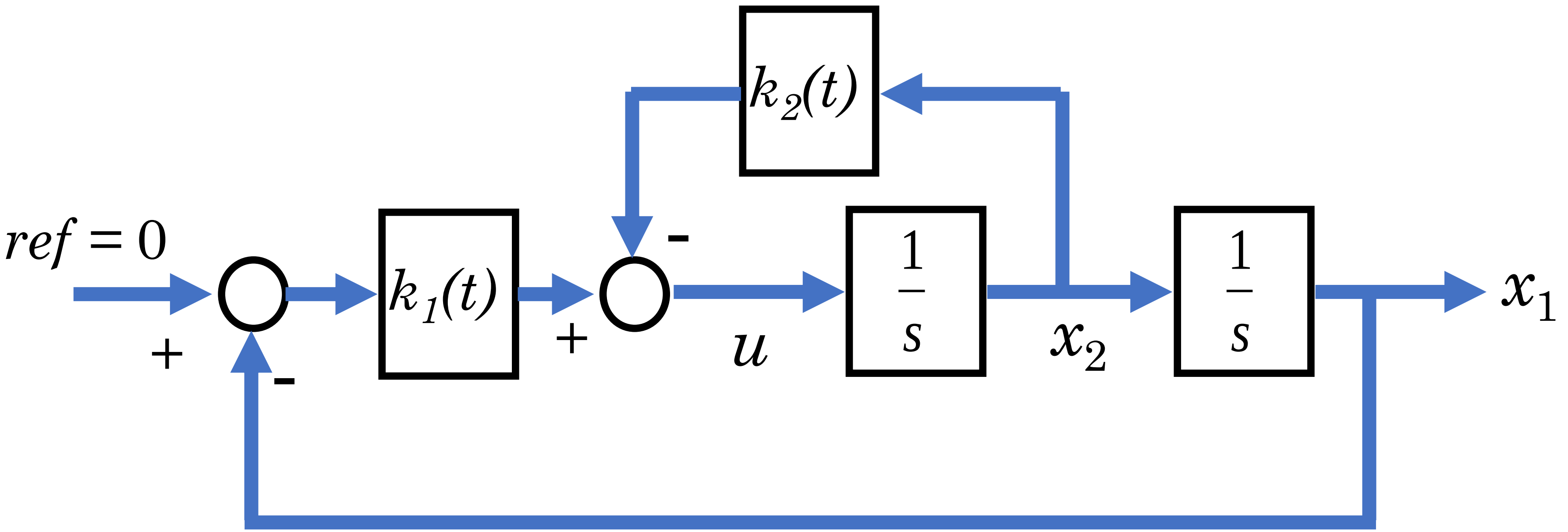
$$-\dot{s}_{22} = 2s_{12} - s_{22}^2, \quad s_{22}(T) = 0$$

Gain Kalman: $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}$ bernilai:

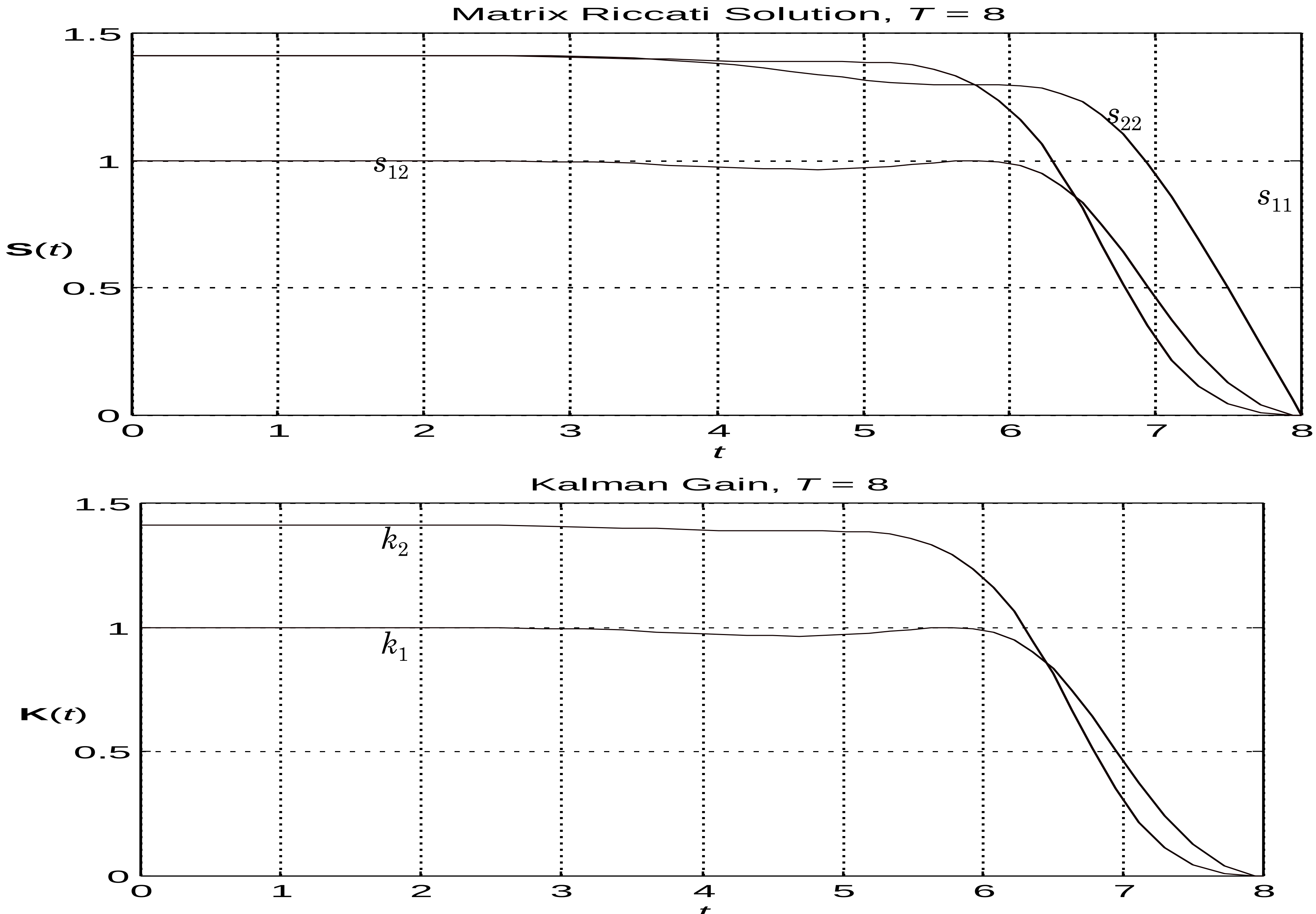
$$K = (0\ 1)\begin{pmatrix} s11 & s12 \\ s21 & s22 \end{pmatrix} \Rightarrow [s12 \quad s22] = [k1(t) \quad k(t)]$$

Struktur Kontrol Umpan balik

$$u = -\mathbf{Kx} = -k_1(t)x_1(t) - k_2(t)x_2(t)$$



Penyelesaian Pers. Riccati:



Untuk T besar, Penyelesaian Pers. Riccati :

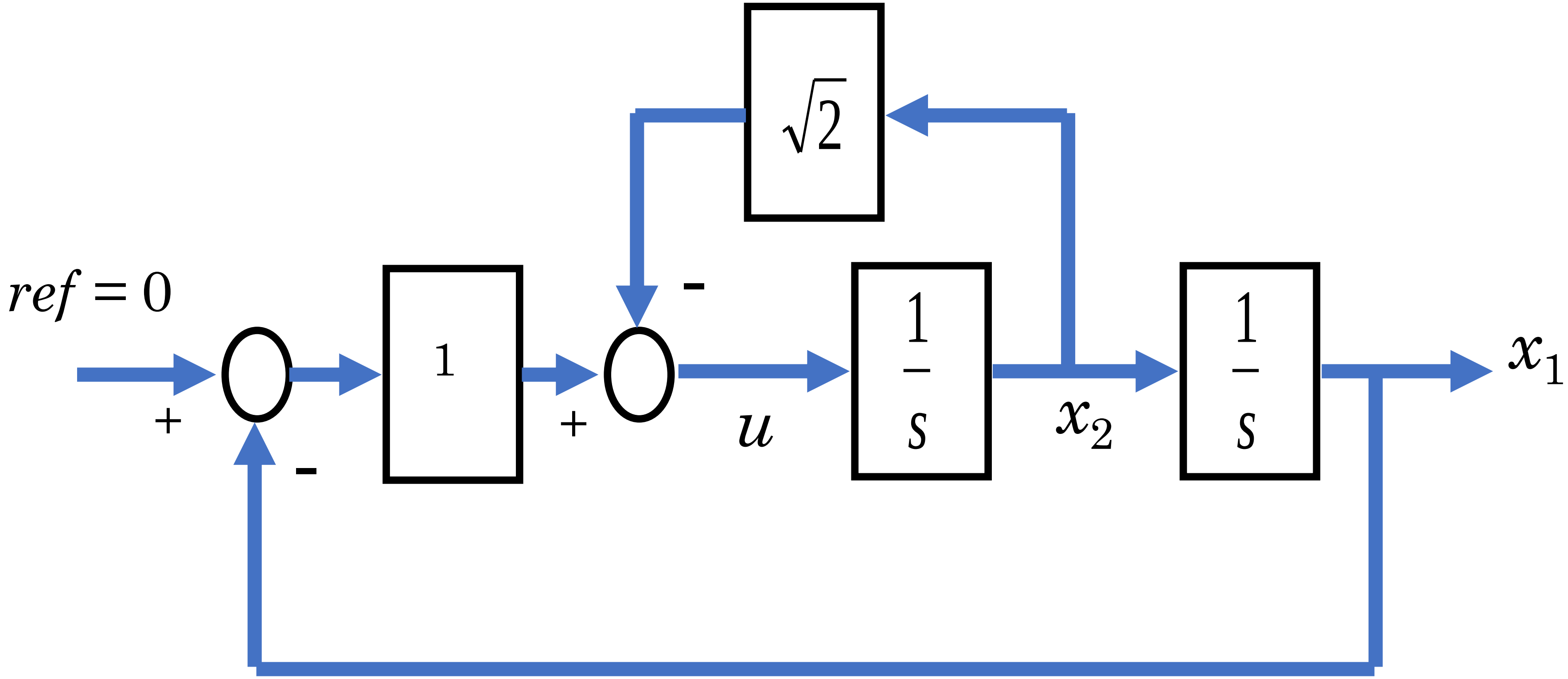
$$-s_{12}^2+1=0$$
$$s_{11}-s_{12}s_{22}=0 \quad \rightarrow \quad s_{11}=+\sqrt{2} \;\; s_{12}=1, \;\; s_{22}=+\sqrt{2}$$
$$2s_{12}-s_{22}^2=0$$

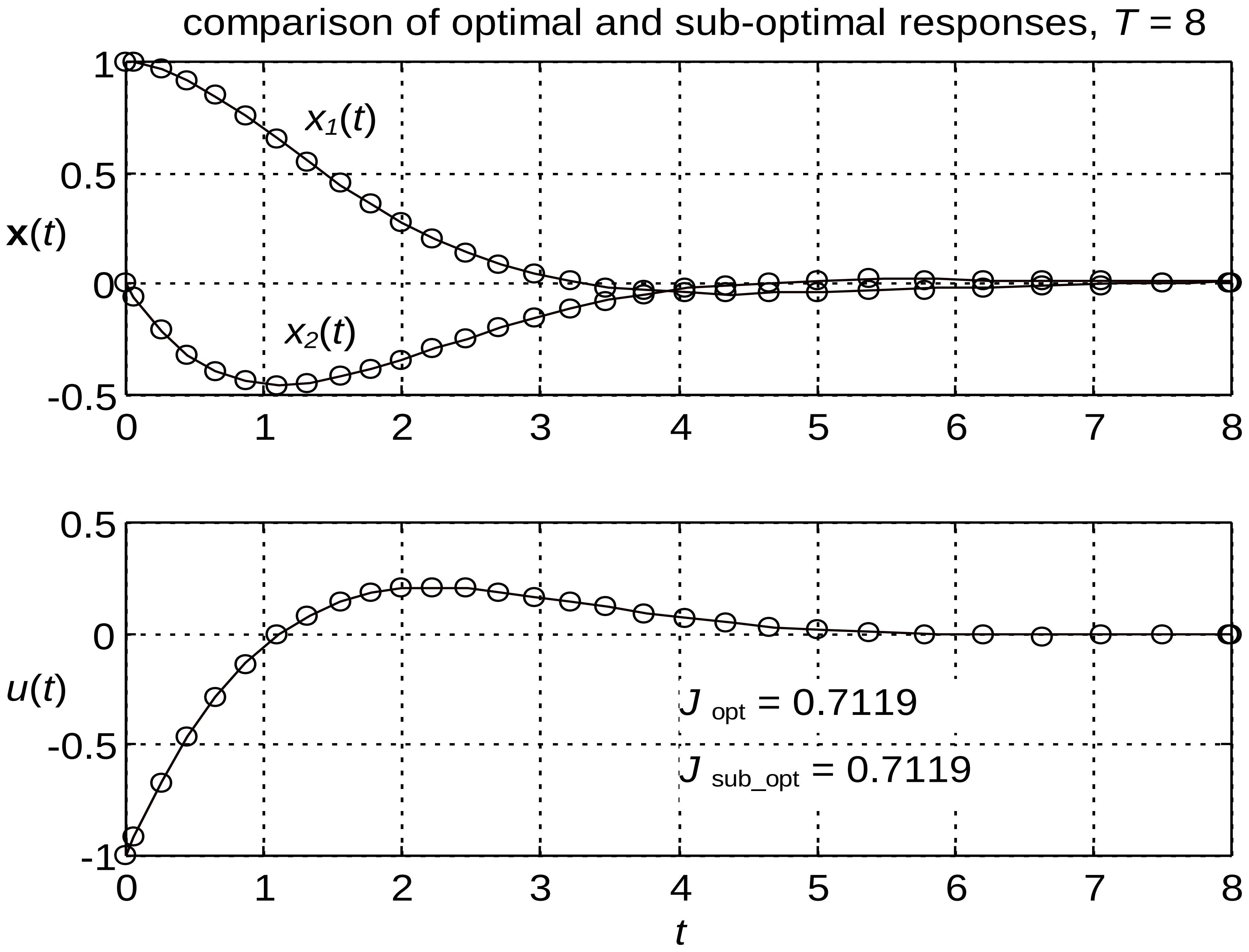
Bila nila s_{12} dan s_{22} adalah positif, maka akan menghasilkan gain Kalman yang negative

$$\mathbf{K}_{\infty}=\begin{bmatrix} s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad k_1=1, \;\; k_2=+\sqrt{2}$$

Struktur *sub-optimal control*

(optimal jika $T = \infty$):




comparison of optimal and sub-optimal responses, T = 8
x(t)
x1(t)
x2(t)
u(t)
J opt = 0.7119
J sub_opt = 0.7119
t
1
0.5
0
-0.5
-1
0 1 2 3 4 5 6 7 8

Soal Tugas – 7 maret 2019 (libur nasional)

Kuliah digantikan dengan e-learning – LQR

1. Pilih sebuah plant linier time invariant
2. Nyatakan 1, dalam bentuk persamaan stae space
3. Rancang sistem kendali LQR, dengan tahapan spt di dalam slide ini, dan gambarkan bentuk blok diagram sistem kendali nya
4. Hasilkan nilai S(t), dengan peny pers. Riccati dan nilai K(t), dan tampilkan S(t) dan K(t)
5. Hasilkan respon x (t) dan sinyal control u(t)

Tugas diselesaikan dalam waktu 10 hari, diupload tanggal 17 Maret 2019