LIMIT DAN KONTINUITAS

Fungsi Kompleks
(Bab II. Fungsi-Fungsi Analitik)
Dra. Retno Marsitin, M.Pd

LIMIT FUNGSI

Definisi:

Fungsi $w = f(z)$ dikatakan mempunyai limit $w_0 = L$ untuk z mendekati z_0 ditulis $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$, jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapatlah $\delta > 0$ sedemikian hinga $|f(z) - L| < \varepsilon \; bila \; |z - z_0| < \delta$

Pernyataan ini berarti untuk tiap bilangan positif ε terdapatlah bilangan positif δ sedemikian hingga:

$$|f(z) - L| < \varepsilon \;\; untuk \;\; 0 < |z - z_0| < \delta$$

Titik-titik z terletak dalam neighborhood $0 < |z - z_0| < \delta$, sehingga simbol $z \to z_0$ dapat diartikan bahwa z mendekati z_0 dari sembarang arah. Hal ini untuk menguji kebenaran suatu nilai merupakan nilai limit atau bukan untuk mengitung limit.

TEOREMA LIMIT FUNGSI

Teorema:

1. Bila fungsi f mempunyai limit pada titik z_0 maka nilai limitnya adalah tunggal ***atau dapat dikatakan*** $\lim_{z \to z_0} f(z)$ ada maka nilai limit tunggal.

   a. Bila $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$; $z_0 = x_0 + iy_0$, $w_0 = u_0 + iv_0$ maka:

   - $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \; bhb \; \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \; dan \; \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$

- ***atau dapat dikatakan*** apabila $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dan $z_0 = a + ib$ maka:
  - $\lim_{z \to z_0} f(z) = A + iB \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} U(x,y) = A \; dan \; \lim_{(x,y)\to(a,b)} V(x,y) = B$
- selain itu juga dapat didefinisikan:

➢ Bilangan real A adalah limit fungsi real dari dua variabel real (x,y) dengan domain definisi D untuk $(x,y) \to (a,b)$ dan ditulis:

- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} U(x,y) = A$

jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $\delta > 0$ sehingga:

untuk semua $(x,y) \in D$ dan $0 < \sqrt{(x,a)^2 + (y-b)^2} < \delta \; berlaku \; |u(x,y) - A| < \varepsilon$

LANJUTAN TEOREMA LIMIT FUNGSI

2. Diberikan fungsi f, g, h didefinisikan pada daerah $D = Df \cap Dg \subseteq C \; dan \; z_0 \in D$ apabila: $|f(z)| \leq |g(z)| \leq |h(z)|$ $\lim_{z \to z_0} f(z) = L \; dan \; \lim_{z \to z_0} h(z) = L$ maka $\lim_{z \to z_0} g(z) = L$, dengan $z \in N^*(z_0, d) \cap D$
3. Misal f dan F merupakan fungsi-fungsi yang limitnya ada di z_0 yaitu:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \quad dan \quad \lim_{z \to z_0} F(z) = W_0$$

maka:

- $\lim_{z \to z_0} \{f(z) + F(z)\} = w_0 + W_0$
- $\lim_{z \to z_0} \{f(z).F(z)\} = w_0.W_0$
- $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{w_0}{W_0}, W_0 \neq 0$

LIMIT TAK HINGGA

Limit Tak Hingga, definisi:

1. Bilangan L adalah $\lim_{z \to \infty} f(z)$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga:

   untuk $0 < |z| < \delta$ berlaku $\left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \varepsilon \longrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \; bhb \; \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

2. Bilangan L adalah $\lim_{z \to \infty} f(z)$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat M sehingga:

   untuk $|z| > M$ berlaku $\left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \varepsilon \longrightarrow \lim_{z \to \infty} f(z) = w_0 \; bhb \; \lim_{z \to z_0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$

3. Apabila $M > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga:

   untuk semua z dimana $0 < z - z_0 < \delta$ berlaku $|f(z)| > M \longrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \; bhb \; \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0$

CONTOH & PENYELESAIAN

Contoh:

1. Tunjukkan fungsi identitas $f(z) = z$
2. Hitunglah $\lim_{z\to i} \frac{z-i}{z^2+1}$
3. Apabila $f(z) = \frac{x^2}{z}$ maka tentukan $\lim f(z)$ untuk $z \to 0$

Penyelesaian:

1. Perhatikan fungsi identitas $f(z) = z$

 Untuk sembarang titik z_0 jelaslah bahwa untuk $z \to z_0$, $f(z) \to z_0$ karena $f(z) = z$. Apabila $f(z) = z$ maka $\lim f(z) = z_0$

2. $\lim_{z\to i} \frac{z-i}{z^2+1} = \lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}$

3. Bila $f(z) = \frac{x^2}{z}$ maka tentukan $\lim f(z)$ untuk $z \to 0$

- karena $|x| \le |z|$ $maka$ $\frac{|x|^2}{|z|} \le |x|$ sehingga $|(z)| = \frac{|x|^2}{|z|} \le |x|$ untuk $z \to 0$ $maka$ $|z| \to 0$
- kemudian karena $|(z)| \le |x|$ $maka$ $|(z)| \to 0$
- tetapi bila modulus suatu besaran menuju nol maka demikian pula besaran itu sendiri
- Jadi $\lim f(z) = 0$ $untuk$ $z \to 0$

KONTINUITAS

Definisi:

- Fungsi $w = f(z)$ kontinu di titik z_0 ***bila hanya bila***:

  a. $f(z_0)\ ada$

  b. $\lim_{z \to z_0} f(z)\ \ ada$

  c. $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Perhatikan bahwa sebenarnya syarat ***c*** cukup memadai karena didalamnya telah termuat syarat ***a*** dan ***b***. Hal ini berarti bahwa tiap nilai $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapatlah $\delta > 0$ sedemikian hingga $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\ \ bila\ \ |z - z_0| < \delta$. Dalam hal ini $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$ artinya δ tergantung $\varepsilon\ \ dan\ \ z_0$

Apabila $\delta = \delta(\varepsilon)$ yaitu tidak tergantung pada z_0 maka dapat dikatakan $f(z)$ ***kontinu uniform***, jelasnya $f(z)$ kontinu di semua titik dalam region *R*.

Fungsi variabel kompleks selalu dapat ditulis sebagai $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ maka kekontinuan $f(z)$ selalu ditunjukkan oleh kekontinuan komponen-komponennya yaitu $u(x,y)\ dan\ \ v(x,y)$

CONTOH & PENYELESAIAN

Contoh:

- $f(z) = xy^2 + i(2x - y)$
- maka $f(z)$ kontinu pada setiap titik z di bidang kompleks karena fungsi komponen-komponennya yaitu:
  - $u = xy^2$ kontinu pada setiap titik (x, y)
  - dan $v = 2xy$ kontinu pada setiap titik (x, y)

S0AL-SOAL LATIHAN

1. Tunjukkan bahwa $f(z) = z^2$ kontinu di $z = z_0$
2. Apakah fungsi $f(z) = \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$ kontinu di $= i$?
3. Untuk nilai manakah setiap fungsi berikut kontinu? a. $f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$ b. $f(z) = cosec\ z$
4. Hitunglah: a. $\lim_{z \to 1+i} z^3$ b. $\lim_{z \to (3,4)} \frac{iRe(z^2) - iRe(z) + (Im(z^2)^2 - 1}{|z|}$
5. Hitunglah nilai limit fungsi-fungsi berikut ini sesuai titik yang ditentukan:

   a. $f(z) = \frac{Im\ (z^2) - 1}{z\bar{z}}\ pada\ 3 - 4i$ b. $f(z) = sin\pi x - e^{2xyi}\ pada\ 1 + i$

6. Tunjukkan bahwa: a. $\lim_{z \to 4} \frac{3iz + 1}{z - 4} = \infty$ b. $\lim_{z \to \infty} \frac{3z + 1}{z + 1} = 3$