DERIVATIVE & PERSAMAAN CAUCHY-RIEMANN (PCR)

Fungsi Kompleks

(Bab II. Fungsi-Fungsi Analitik)

Dra. Retno Marsitin, M.Pd

Derivative

- Definisi:
  - Apabila $w = f(z)$ suatu fungsi dimana domain definisi memuat neighborhood dari titik z_0 derivative f pada titik z_0 adalah:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \longrightarrow \text{bila limitnya ada}$$

Apabila menggunakan notasi $\Delta z = z - z_0$ maka derivate f pada titik z_0 dapat ditulis:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

dengan catatan bahwa, karena f terdefinisi dalam neighborhood z_0 maka nilai $f(z_0 + \Delta z)$ selalu ada untuk $|z_0|$ cukup kecil.

Apabila dari formulasi kedua, indeks nol dihilangkan maka diperoleh definisi defirative (penurunan fungsi) yang lebih umum yaitu:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz}$$

Dapat dikatakan bahwa notasi-notasi fungsi turunan dari f atau disingkat turunan f adalah:

$$f'(z) \; atau \; \frac{df}{dz} \; atau \; \frac{dw}{dz}$$

Turunan fungsi dapat diperoleh dengan cara menerapkan langsung definisi dan proses ini serupa dengan yang digunakan pada kalkulus

Rumus Derivative

- ***Rumus-rumus derivative sebagi berikut:***

1. $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$; $\frac{d}{dz}(z) = 1$; $\frac{d}{dz}(C)0$; $\frac{d}{dz}\big(Cf(z)\big) = C\frac{d}{dz}(f(z))$
2. $\{f(z) + g(z)\}' = f'(z) + g'(z)$
3. $\{f(z) - g(z)\}' = f'(z) - g'(z)$
4. $\{f(z)g(z)\}' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
5. $\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\}' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{\{g(z)\}^2}$
6. $\{f(g(z))\}' = f'(z)g'(z)$

Kesesuaian rumus turunan fungsi variabel bilangan kompleks dengan fungsi nyata yaitu apabila f *dan* g sebagai polinom-poloinom *dalam* z. Apabila f ditulis sebagai $(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, seperti misalnya$f(z) = x^2 + iy$, $f(z) = e^x + i\, siny$ maka tidak bisa diselesaikan dengan rumus diatas, sehingga masih memerlukan teorema lebih lanjut.

Contoh & Penyelesaian

Contoh:

1. Tentukan turunan fungsi konstan $f(z) = c$
2. Tentukan $\left(\frac{d}{dz}\right)$ dari:
   a. $[(z^3 - z^{-2})(z^3 + 5)]$
   b. $(z^{-1} + 2z + 3)^4$
   c. $\left(\frac{z^4-3}{z^2+1}\right)$

Penyelesaian:

1. Untuk setiap nilai z pada $f(z) = c$, mempunyai:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{c - c}{\Delta z} = 0$$

   Jadi turunan suatu fungsi konstan selalu nol

2. Dengan menggunakan aturan pendeferensialan maka:

   a. $\frac{d}{dz}[(z^3 - z^{-2})(z^3 + 5)] = (z^3 - z^{-2})2z + (z^2 + 5)(3z^2 + 2z^{-3})$

   b. $\frac{d}{dz}(z^{-1} + 2z + 3)^4 = 4(z^{-1} + 2z + 3)^3(-z^{-2} + 2)$

   c. $\frac{d}{dz}\left(\frac{z^4-3}{z^2+1}\right) = \frac{(z^2+1)\,4z^3 - (z^4-3)2z}{(z^2+1)^3}$

Soal-soal Latihan

1. Tentukan $f'(z)$ fungsi-fungsi berikut ini:
   a. $f(z) = z^3 - 3z^2 + z^{-4} + 2$
   b. $f(z) = 3z^2 - 2z + 7$
   c. $f(z) = (2z^3 - 3z^2 + 4)^5$
   d. $f(x) = \frac{x^2+2}{3-x^2}$ $\longrightarrow 3 - x^2 \neq 0$
2. Gunakan definisi dan aturan deferensial untuk menentukan turunan dari:
   a. $3z^2 + 4iz - 5 + i$ pada $z = 2$
   b. $3z^{-2}$ pada $z = 1 + i$
3. Tunjukkan bahwa $f(z) = \bar{z}$ tidak deferensiabel (tidak ada) dimana-mana!

PERSAMAAN CAUCHY-RIEMANN (PCR)

- Teorema:
- Apabila $f'(z)$ dari suatu fungsi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ***ada*** di titik z_0 maka derivative parsial tingkat satu ke x dan y dari komponen-komponennya u dan v juga ada dan memenuhi syarat Persamaan Cauchy Riemann (PCR) sebagai berikut:

PCR
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ dan \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$U_x = V_y \ dan \ U_y = -V_x$$

sedangkan $f'(z)$ dirumuskan
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = U_x + iV_x$$
$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = V_y - iU_y$$

selain itu dapat dinotasikan $\longrightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial x} = U_x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = U_y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = V_x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = V_y$

Apabila $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ terdefinisikan dalam setiap neighborhood ε dari $z_0 = x_0 + iy_0$ sedangkan $u(x,y) \ dan \ v(x,y)$ fungsi-fungsi nyata berharga satu dari x dan y yang bersama-sama dengan derivative parsialnya U_x , U_y , V_x , V_y kontinu di titik $z_0 = x_0 + iy_0$ dan jika derivative parsialnya memenuhi persamaan Cauchy Riemann, maka:

$f'(z) \ ada$ $\longrightarrow$ $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$

Bentuk Kutub Cauchy – Riemann

Bentuk Kutub Cauchy – Riemann

- PCR dalam koordinat kartesius dapat dinyatakan dalam koordinat kutub.

$$z = x + iy \longrightarrow z = r(cos\theta + i\ sin\theta)$$
$$z = x + iy \longrightarrow z = re^{i\theta}$$

$f(z) = u + iv \rightarrow Re(z)$ dan $Im(z)$ dapa dinyatakan dalam $x\ dan\ y$ atau $r\ dan\ \theta$

- PCR dalam bentuk kutub $\longrightarrow U_r = \frac{1}{r}V_\theta\ \ dan\ \ V_r = -\frac{1}{r}U_\theta$

- Turunannya yaitu $\longrightarrow f'(z) = e^{-i\theta}\{U_r + iV_r\}\ \ atau\ \ f'(z) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}\{V_\theta - iU_\theta\}$

Teorema:

- Bila $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ terdefinisi di seluruh neighborhood ε titik $z_0 = r_0e^{i\theta}$ selain titik asal O, sedangkan derivative parsial pertama $u\ dan\ v$ terhadap $r\ dan\ \theta$ ***ada*** dan fungsi ***kontinu*** pada titik (r_0, θ_0), dan bila titik derivative parsialnya memenuhi PCR bentuk polar maka $\boldsymbol{f'(z)}$ ***ada***.

Contoh & Penyelesaian

Contoh:

- Tunjukkan bahwa $f(z) = z^2$ memiliki turunan melalui PCR dan tentukan turunannya

- Penyelesaian:

  Diketahui $f(z) = z^2$, berdasarkan rumus diperoleh bahwa $f'(z) = 2z$ ada di setiap titik, sehingga syarat PCR terpenuhi di setiap titk.

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

sehingga:

$$u = x^2 - y^2 \longrightarrow u_x = 2x \; dan \; u_y = -2y$$

$$v = 2xy \longrightarrow v_x = 2y \; dan \; v_y = 2x$$

Ternyata PCR terpenuhi, yaitu: $\longrightarrow u_x = v_y \;\; dan \; u_y = -v_x$

Jadi $f'(z) = u_x + iv_y = 2x + i(2y) = 2(x + iy) = 2z$

Soal-soal Latihan

1. Tentukan $f'(z)$ fungsi-fungsi berikut ini:
   a. $f(z) = z^3 - 3z^2 + z^{-4} + 2$
   b. $f(z) = 3z^2 - 2z + 7$
   c. $f(z) = (2z^3 - 3z^2 + 4)^5$
   d. $f(x) = \frac{x^2+2}{3-x^2} \qquad 3 - x^2 \neq 0$
2. Gunakan definisi dan aturan deferensial untuk menentukan turunan dari:
   a. $3z^2 + 4iz - 5 + i$ pada $z = 2$ b. $3z^{-2}$ pada $z = 1 + i$
3. Tunjukkan bahwa $f(z) = \bar{z}$ tidak deferensiabel (tidak ada) dimana-mana!
4. Tentukan $f'(z)$ bila ada pada fungsi:
   a. $f(z) = z^2$ b. $f(z) = |z|^2$
5. Diberikan $f(z) = x^2 - iy^2$, tentukan jika ada, titik-titik yang menyebabkan fungsi itu mempunyai turunan!
6. Tentukan $f'(z)$ bentuk kutub dari $f(z) = \frac{1}{z}$