FUNGSI EKSPONENSIAL & FUNGSI TRIGONOMETRI

Fungsi Kompleks

(Bab III. Fungsi-Fungsi Elementer)

Dra. Retno Marsitin, M.Pd

Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial didefinisikan

$$\exp z = e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \longrightarrow \exp z = e^z = e^x cis\ y$$

Apabila ***z* merupakan bilangan real** maka: $y = 0 \rightarrow z = x + i0 \rightarrow z = e^x(\cos 0 + i\sin 0) \longrightarrow z = e^x$

Apabila ***z* merupakan bilangan imajiner murni** maka: $x = 0 \rightarrow z = iy \longrightarrow z = \cos y + i\sin y \longrightarrow z = e^{iy}$

sehingga dapat dikatakan bahwa: $e^z = e^x cis\ y \longrightarrow |e^z| = e^z\ ,\quad y = \arg(e^z) \longrightarrow e^z \neq 0$

Perhatikan: $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = \underbrace{e^x\cos y}_{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{i}\,\underbrace{e^x\sin y}_{\boldsymbol{V}}$

sehingga diperoleh:

$U = e^x\cos y \longrightarrow U_x = e^x\cos y\ ,\qquad U_y = -e^x\sin y \longrightarrow U_x = V_y$

$V = e^x\sin y \longrightarrow V_x = e^x\sin y\ ,\qquad V_y = e^x\cos y \longrightarrow U_y = -V_x$

$\left.\begin{matrix} U_x = V_y \\ U_y = -V_x \end{matrix}\right\}$ sehingga PCR terpenuhi

Lanjutan Fungsi Eksponensial

Dari uraian diatas diperoleh:

$$f'(z) = U_x(x, y) + i\, V_y(x, y) \longrightarrow f'(z) = e^x \cos y + i\, e^x \sin y$$

$$f'(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$f'(z) = e^z$$

Jadi $f(z) = e^z$ analitik terhadap seluruh bidang kompleks sehingga merupakan fungsi yang utuh dan $f'(z) = e^z$. Fungsi $f(z) = e^z$ merupakan fungsi periodik dengan periode $2\pi i$ sehingga ditulis:

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

Sifat-sifat Fungsi Eksponensial

Sifat-sifat:

1. $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ $\longrightarrow$ $(\exp z_1).(exp z_2) = \exp(z_1 + z_2)$
2. $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$ $\longrightarrow$ $\frac{\exp z_1}{\exp z_2} = \exp(z_1 - z_2)$
3. $(\exp z)^n = \exp nz$, $n = 1,2,3,\ldots$ $\longrightarrow$ $(e^z)^n = e(nz)$
4. $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$
5. $e^0 = 1$
6. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$
7. $e^{z+2k\pi i} = e^z.e^{2k\pi i} = e^z cis\,(2k\pi) = e^z$
8. $w = e^z$ $\longrightarrow$ $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w \neq 0$ $\longrightarrow$ $z = lnr + i\theta$
9. $e^{\ln z} = z$, $z \neq 0$
10. $ln\frac{z_1}{z_2} = lnz_1 - lnz_2$
11. $\ln(z_1.z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$
12. $z^n = e^{n\,lnz}$, $n = 1,2,3,\ldots$
13. $z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}lnz}$, $n = 1,2,3,\ldots$

Bentuk pangkat bilangan kompleks didefinisikan sebagai z^w $\longrightarrow$ Nilai utama dari z^w yaitu: $z^w = e^{wlnz}$

Contoh & Penyelesaian

Contoh:

1. Tunjukkan bahwa $e^{z} = e^{z+2\pi i}$
2. Tunjukkan bahwa $|e^{z}| = e^{z}$

Penyelesaian:

1. Pembuktian eksponensial bahwa $e^{z} = e^{z+2\pi i}$

   Untuk semua $z = x - iy$, maka: $e^{z+2\pi i} = e^{x+(y+2\pi)i} = e^{x} cis\ (y + 2\pi) = e^{x} cis\ y$

   $$= e^{x+iy} = e^{z}$$

2. Pembuktian bahwa $|e^{z}| = e^{z}$

   $|e^{z}| = |e^{z}(\cos y + i \sin y)| = |e^{z}||\cos y + i \sin y| = e^{z}.1 = e^{z}$ (terbukti)

Soal-soal Latihan

1. Tunjukkan bahwa:

   a. $\exp(2 \pm 3\pi i) = -e^2$
   b. $e^{z+\pi i} = -e^z$

2. Tunjukkan z sehingga memenuhi persamaan:

   a. $e^z = 1$
   b. $e^z = -1$

3. Bila $z \neq 0$, tunjukkan bahwa bila $z = re^{i\theta}$ maka:

   a. $\bar{z} = re^{-i\theta}$
   b. $\exp(\ln r + i\theta) = z$

4. Hitunglah nilai utama dari :

   a. i^{-i}
   b. $i^{2\pi i}$
   c. $(-1+i)^i$

5. Tunjukkan bahwa untuk $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ maka $-1^{\frac{1}{\pi}} = exp[(2k+1)i]$

Fungsi Trigonometri

Formulasi $e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad dan \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, diperoleh:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \longrightarrow \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \longrightarrow \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Fungsi sinus dan cosinus adalah menyeluruh sepanjang kombinasi linier e^{iz} dan e^{-iz} adalah menyeluruh.

Derivativenya dirumuskan:

$$\frac{d}{dz} \sin y = \cos z \quad dan \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$$

Apabila z diambil iy dengan $x = 0$ $\longrightarrow$ $\cos iy = \cosh y \quad dan \quad \sin iy = i \sinh y$

Lanjutan Fungsi Trigonometri

Sifat-sifat:

- $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ $\quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ $\quad \sec z = \frac{1}{\cos z}$ $\quad \cos\sec z = \frac{1}{\sin z}$

Dengan menggunakan aturan pendeferensialan diperoleh:

- $\frac{d}{dz}\tan z = sec^2 z$ $\quad \frac{d}{dz}\cot z = -\cos sec^2 z$ $\quad \frac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z$ $\quad \frac{d}{dz}\cos\sec z = -\cos\sec z \cot z$

Dari definisi:

- $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ diperoleh: $\sin z = \sin x \, cosh\, y + i \cos x \, sinh\, y$
- $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ diperoleh: $\cos z = cos\, x \cosh y - i \sin x \sinh y$

Untuk $x = 0$ maka dari dua formulasi terakhir diatas akan diperoleh:

$$\sin(iy) = i \sinh y \quad dan \quad \cos(iy) = \cosh y$$

Selain itu $\overline{\sin z}$ dan $\overline{\cos z}$ adalah ***sekawan*** dengan $\sin z$ dan $\cos z$.

Fungsi $\sin z$, $\cos z$ dan $\tan z$ adalah periodik dengan formulasi:

- $\sin(z+2\pi) = \sin z$ $\quad$ $\cos(z+2\pi) = \cos z$ $\quad$ $\sin(z+\pi) = -\sin z$
- $\cos(z+\pi) = -\cos z$ $\quad$ $\tan(z+\pi) = \tan z$ $\quad$ $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = \cos z$
- $|\sin z|^2 = sin^2x + sinh^2y$
- $|\cos z|^2 = cos^2x + sinh^2y$
- $cosh^2y - sinh^2y = 1$ $\quad$ $sin^2z + cos^2z = 1$
- $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1\, sin\, z_2$
- $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1\, sin\, z_2$ $\quad$ $\sin(-z) = -\sin z$ $\quad$ $\cos(-z) = \cos z$
- $\sin(2z) = 2\sin z \cos z$
- $\cos(2z) = cos^2z - sin^2z = 2cos^2\, z - 1 = 1 - 2sin^2\, z$
- $\tan(z_1 \pm z_2) = \frac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \pm \tan z_1 \tan z_2}$ $\quad$ $1 + tan^2\, z = tan^2\, z$ $\quad$ $1 + cot^2\, z = cosec^2\, z$
- $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$ $\quad$ $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ $\quad$ $\overline{\tan z} = \tan \bar{z}$

Lanjutan Fungsi Trigonometri

Apabila dari sifat diatas dikembangkan sendiri, seperti:

- $sin\ z = 0$ bila dan hanya bila $z = k\pi\ , k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- $\cos z = 0$ bila dan hanya bila $z = \frac{\pi}{2} + k\pi\ , k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

– Dalam fungsi variabel kompleks	nilai mutlak sinus dan cosinus tidak terbatas
– Dalam variabel real	nilai mutlak sinus dan cosinus tidak melebihi 1
– Dalam variabel kompleks	sinus dan cosines merupakan fungsi periodik dengan periode 2π
	$\tan z \quad dan \quad \cot\ z$ juga periodik dengan periode π

Contoh

(1) Tunjukkan bahwa $sin\ z = 0$ bila dan hanya bila $z = k\pi$

(2) Tunjukkan bahwa turunan dari $\sin z$ adalah $\cos z$

Penyelesaian:

(1) Pembuktian bahwa $sin\ z = 0$ bila dan hanya bila $z = k\pi$, yaitu apabila $z = k\pi$ maka:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{k\pi i} - e^{-k\pi i}) = \frac{1}{2i}(\cos k\pi + i\sin k\pi - \cos k\pi + i\sin k\pi) = \sin k\pi = 0$$

sebaliknya, misalnya bahwa $sin\ z = 0$ maka: $\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = 0$ sehingga: $e^{iz} = e^{-iz} \Longleftrightarrow e^{2iz} = 1$

apabila dengan menggunkan logaritma, diperoleh: $2iz = 2k\pi i$ $\ dengan\ k = bilangan\ bulat$ sehingga: $z = k\pi$ (terbukti)

(2) Turunan dari $\sin z$ adalah $\cos z$, dengan pembuktian:

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \frac{1}{2i}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \cos z \ \text{(terbukti)}$$

Soal-soal:

1. Tunjukkan bahwa:

a. $sin^2 z + cos^2 z = 1$

b. $\sin(-z) = -\sin z$

c. $\cos(iz) = \cosh z$

d. $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

2. Tentukan semua nilai yang memenuhi $\cos z = 3$