LINTASAN (KURVA JORDAN), KONTUR BILANGAN KOMPLEKS, INTEGRAL BERHARGA KOMPLEKS DARI FUNGSI REAL & INTEGRAL FUNGSI KOMPLEKS – INTEGRAL KONTUR

Fungsi Kompleks
(Bab IV. Integral Fungsi Kompleks)
Dra. Retno Marsitin, M.Pd

LINTASAN (KURVA JORDAN)

Konsep kurva datar yang dinyatakan secara parametrik sangat penting dalam integrasi kompleks. Persamaan kurva dalam bentuk parameter, misalnya dengan persamaan kurva:

a. Persamaan parabola $x = \sqrt{y}$ dinyatakan dengan persamaan parameter $x = t\,, y = t^2$. Bila parameter t dibatasi dengan $-1 \leq t \leq 2$ maka diperoleh lintasan dari titik (-1, 1) sampai dengan titik (2, 4).

b. Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dinyatakan dengan parameter $x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$ dan parameter t dibatasi dengan $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Lintasan (kuva Jordan) *didefinisikan:*

Apabila t peubah rel, suatu kurva dalam bidang datar disebut kurva mulus (*smooth curve*) bila dan hanya bila dapat dinyatakan dengan fungsi berharga real yaitu $y = g(t), \quad y = h(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$ sedemikian hingga turunannya yaitu $\frac{dx}{dt} = g'(t), \quad \frac{dy}{dt} = h'(t)$ ada dan kontinu dalam interval tersebut.

LINTASAN (KURVA JORDAN)

- Ada 3 pengertian dari definisi, yaitu:

a. $y = g(t)\ \ dan\ \ y = h(t)$ kontinu dalam interval $\alpha \le t \le \beta$, karena adanya syarat bahwa turunannya:

$$\frac{dx}{dt} = g'(t)\ dan\ \ \frac{dy}{dt} = h'(t) \text{ harus } ada\ dan\ kontinu.$$

b. Kekontinuan fungsi beserta turunannya menyebabkan *kurva menjadi mulus* dalam arti mempunyai garis singgung disetiap titik.

c. Akibat dari turunannya ada maka kurva tersebut *mempunyai panjang* yang dapat dihitung dengan rumus:

- $L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,.\,dt$

CONTOH

- Contoh:
- Persamaan $x = 2\cos t\ ,\ \ y = 2\sin t\ , 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}$ merupakan busur lingkaran dengan kurva mulus karena syarat-syaratnya terpenuhi. tentukan:

a. Lintasan yang dijelajahi yaitu titik awal dan titik akhir

b. Panjang lintasan

- Penyelesaian:

a. Lintasan yang dijelajahi yaitu titik awal dan titik akhir

- $x = 2\cos t\ ,\ \ y = 2\sin t\ , 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}$ merupakan kurva mulus karena syarat yang diberikan terpenuhi sehingga t berubah dari $0\ samapai\ dengan\ \frac{3\pi}{2}$ maka lintasan dengan arah positif dari $(0{,}2)$ sebagai titik awal sampai dengan $(0, -2)$ sebagai titik akhir.

b. Panjang lintasannya yaitu: $L = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 2\ dt = 3\pi$

LANJUTAN LINTASAN (KURVA JORDAN)

Teori Kurva Jordan

- Kurva dengan titik awal dan titik akhir yang dihimpit merupakan kurva dengan lintasan terbuka, sedangkan bila titik awal dan titik akhir berhimpit merupakan kurva dengan lintasa tertutup. Apabila suatu lintasan tidak memotong dirinya sendiri (kecuali mungkin titik awal dan titik akhirnya) maka lintasan itu merupakan lintasan sederhana (***simple path***), tetapi bila tidak demikian merupakan lintasan ganda (***multi path***).
- Suatu kurva C (tidak perlu mulus) bisa terdiri dari sejumlah berhingga kurva mulus C_n sedemikian hingga titik akhir C_k berhimpit dengan titik awal $C_{k+1}; k = 1,2,3, \dots, n$ dan ditulis dengan $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$. Istilah yang sering dipakai untuk kurva semacam itu adalah kontinu sepotong-potong (piecewise continuous) atau mulus sepotong-potong (piecewise smooth).

Teorema Kurva Jordan yang dikemukakan Camile Jordan (Perancis):

Bila C lintasan tertutup sederhana pada bidang datar maka bidang tersebut terbagi oleh C menjadi tiga bagian himpunan saling asing, yaitu:

a. Kurva C sendiri

b. Bagian dalam ($interior$) C berupa himpunan terbuka dan terbatas

c. Bagian luar ($exterior$) C berupa himpunan terbuka dan tak terbatas

LANJUTAN LINTASAN (KURVA JORDAN)

- Secara luas, lintasan digunakan dalam integral kompleks karena menggantikan fungsi integral terintegrasi yang mengacu pada kalkulus elementer. Pada proses integrasi, dijelajahi dari titik awal ke titik akhir atau sebaliknya, sehingga arah (orientasi) lintasan harus diterapkan terlebih dahulu sebelum proses pengintegralan.
- Busur Jordan C (terbuka sederhana) dikatakan mempunyai orientasi positif bila dijelajahi dari titik awal sampai titik akhirnya, sehingga dapat diartikan sebagai busur yang sama dengan arah berlawanan. Kurva Jordan C (tertutup sederhana) dikatakan mempunyai arah positif bila dijelajahi sedemikian hingga bagian dalam C berada disebelah kirinya.

KONTUR BILANGAN KOMPLEKS

- Suatu busur C merupakan himpunan titik-titik $z(x, y)$ di bidang kompleks sedemikian hingga:

$$x = x(t)\ ,\quad y = y(t)\ ,\quad a \leq t \leq b$$

dimana $x(t)\ dan\ y(t)$ merupakan fungsi kontinu dari peubah real t.

- Definisi ini membentuk sebuah pemetaan dalam interval $a \leq t \leq b$ ke bidang xy dan bayangan titik-titiknya sesuai dengan urutan naiknya t, membentuk persamaan:

$$z(t) = x(t) + iy(t)\ ,\quad a \leq t \leq b$$

dimana *z(t)* kontinu apabila *x(t) dan y(t)* keduanya kontinu.

LANJUTAN KONTUR BILANGAN KOMPLEKS

- Suatu fungsi kompleks $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$ dikatakan dapat didiferensialkan ke peubah real t apabila kedua fungsi komponennya $x(t)\ dan\ y(t)$ dapat dideferensialkan ke t dan derivativenya dirumuskan:

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)\ , \qquad a \leq t \leq b$$

- Suatu busur C: $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$ dinamakan *smooth* atau licin, bila derivative:

$z'(t)\ \ ada\ \ dan\ \ kontinu$ dalam interval $a \leq t \leq b$ dan bila $z'(t) tak\ pernah\ nol.$

- Apabila pada titik t:

a. $x'(t) = 0$ maka vektor $z'(t) = iy'(t)$ adalah vertikal

b. $x'(t) \neq 0$ maka slope dari vektor $z'(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ adalah sama dengan slope garis singgung busur C pada titik yang berkorespondensi dengan t yaitu $\frac{dy}{dx}$.

LANJUTAN KONTUR BILANGAN KOMPLEKS

- Hal ini berarti sudut inklinasi garis singgung dapat dirumuskan dengan $arg z'(t)$. Selanjutnya, karena $z'(t)$ kontinu dalam interval $a \leq t \leq b$ maka busur smooth merupakan rangkaian kontinu garis-garis singgung yang panjangnya:

$$|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

- Panjang busur smooth di rumuskan:

$$L = \int_a^b |z'(t)| \quad \text{atau} \quad L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

LANJUTAN KONTUR BILANGAN KOMPLEKS

- Dalam perhitungan selanjutnya bisa diadakan pergantian parameter $t = \emptyset(r),\ c \leq r \leq d$, dimana $\emptyset$ adalah fungsi berharga real dari suatu pemetaan dalam interval $c \leq r \leq d\ \ onto\ interval\ \ a \leq t \leq b$. Dianggap bahwa $\emptyset$ beserta derivativenya kontinu dan $\emptyset'(r) > 0$ untuk setiap r, sehingga ***rumus panjang busur menjadi***:

$$L = \int_c^d |z'[\emptyset(r)]|\emptyset'(r)dr$$

- Busur C telah kita nyatakan dalam parameter yang baru r, yaitu:

$$z = Z(r) = z[\emptyset(r)], c \leq r \leq d,$$

- sehingga:

$$Z'(r) = z'[\emptyset(r)]\emptyset'(r)$$

- Jadi kontur yaitu rangkaian kontinu dari berhingga banyak busur-busur smooth, panjang kontur yaitu jumlah panjangnya busur-busur smooth

INTEGRAL BERHARGA KOMPLEKS DARI FUNGSI REAL

- Fungsi $f(z) = U(t) + iV(t)$, $a \leq t \leq b$ dengan $U\ dan\ V$ merupakan fungsi-fungsi bernilai real yang kontinu dari peubah real t dalam interval tertutup $a \leq t \leq b$. $U\ dan\ V$ kontinu pada interval $[a, b]$ artinya interval $[a, b]$ terdiri atas beberapa sub interval dengan $U\ dan\ V$ kontinu dan mempunyai limit berhingga di kedua ujung-ujungnya maka sesuai teori integral yaitu $\int_a^b U(t)dt\ \ dan\ \ \int_a^b V(t)dt$ ada, sehingga bila integral tertentu dari F dinyatakan dengan dua integral menjadi:

$$\int_a^b F(t) = \int_a^b U(t)dt + i\int_a^b V(t)dt$$

- Sifat-sifat, antara lain:

1. $Re\left[\int_a^b F(t)dt\right] = \int_a^b Re[F(t)]dt$ 2. $\int_a^b CF(t)dt = C\int_a^b F(t)dt$; $C = c_1 + ic_2$ 3. $Im\left[\int_a^b F(t)dt\right] = \int_a^b Im[F(t)]dt$

4. $\int_a^b F(t)dt = -\int_a^b F(t)dt$ 5. $\left|\int_a^b F(t)dt\right| \leq \int_a^b |F(t)|dt$

6. $\left|\int_a^\infty F(t)dt\right| \leq \int_a^\infty |F(t)|dt$, bila kedua integral ada

7. $\oint_c \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$ 8. $\oint_c \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0$, $n = 2,3, \dots$

INTEGRAL FUNGSI KOMPLEKS – INTEGRAL KONTUR

- Integral tertentu fungsi berharga kompleks f dari peubah kompleks z dapat diartikan sebagai nilai $f(z)$ sepanjang kontur C yang merentang dari $z = \alpha \ \ sampai \ \ z = \beta$ di bidang kompleks sehingga integral kontur dapat ditulis:

$$\int_C f(t)dt \quad atau \quad \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

- Apabila kontur C dinyatakan dengan persamaan $z(t) = x(t) + iy(t)$ dengan $a \leq t \leq b$ merentang dari titik $z(a) = \alpha$ ke titik $z(b) = \beta$ dan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kontinu pada C yang mana fungsi $u[x(t), y(t)]$ dan $f[z(t)]$ kontinu dari t, sehingga dapat didefinisikan ***integral kontur f sepanjang C*** yaitu:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt$$

- Bentuk $f[z(t)]z'(t) = \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\}\{x'(t) + iy'(t)\}$ maka persamaan integral diatas dapat ditulis dalam bentuk integral dari fungsi dengan satu peubah t:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b (ux' - vy')dt + i\int_a^b (vx' + uy')dt$$

- Sebagai catatan, karena C kontur maka fungsi $x' dan\, y'$ disamping $u\ dan\ v$ adalah kontinu sepotong-potong dari t, sehingga harga integral dari kedua persamaan integral diatas mempunyai nilai.

LANJUTAN INTEGRAL FUNGSI KOMPLEKS – INTEGRAL KONTUR

- Bentuk integral kontur dari fungsi kompleks dengan dua peubah $x \; dan \; y$ dirumuskan:

$$\int_C f(z)dz = \int_C [udx - vdy] + iv \int_C [vdx + udy]$$

- Bentuk persamaan diatas diperoleh dengan mengganti $f(z)$ dengan $u + iv$ dan dz dengan $dx + idy$.
- Terkait pengertian kontur C dengan persamaan integral kontur f sepanjang C maka kontur $-C$ merupakan kontur yang sama dengan arah yang berlawanan, sehingga ditulis kontur $-C$ mempunyai persamaan:

$$z = z(-t) \; dengan \; -b \leq t \leq -a,$$

- maka: $\int_{-C} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f[z(-t)]\,[-z'(-t)]dt$
- atau apabila diganti peubah menjadi:
  - $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C \; f(z)dz$

LANJUTAN INTEGRAL FUNGSI KOMPLEKS – INTEGRAL KONTUR

- Sifat-sifat:

1. $\int_c kf(z)dz = k\int_c f(z)dz$, k = konstanta kompleks
2. $\int_c [f(z)+g(z)]dz = \int_c f(z)dz + \int_c g(z)dz$
3. Bila C terdiri dari kontur C_1 dari $\alpha\ ke\ \beta_1$ dan C_2 dari β_1 ke β maka:

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} g(z)dz$$

- Sifat integral yang telah dipelajari:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_a^b |f[z(t)]z'(t)|dt$$

- maka untuk setiap konstanta M sehingga $|f(z)| \leq M$ untuk z pada kontur C berlaku:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq M\int_a^b |z'(t)|dt$$

- Apabila integral di ruas kanan dinyatakan dengan L dari kontur maka modulus dari nilai integral f sepanjang C tidak melampaui ML atau:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML$$

CONTOH

(1) Tunjukkan bahwa apabila C suatu kurva mulus dari z_0 ke ζmaka $\int_c \; dz = \zeta - z_0$
(2) Tunjukkan bahwa apabila C merupakan lingkaran dengan $z = z_0 + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi, r > 0$
Penyelesaian:

(1) Apabila C suatu kurva mulus dari z_0 ke ζmaka $\int_c \; dz = \zeta - z_0$

- Berarti $f(z) = 1$ untuk semua z, sehingga $f(\zeta_k) = 1$ untuk setiap ζ_k pada C.
- Menggunakan rumus definisi, diperoleh:

$$\int_c \; dz = \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(\Delta z)_k = \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_k - 1)$$

$$= \lim_{\mu \to 0} [(z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \cdots + (\zeta - z_{n-1})] = \lim_{\mu \to 0} (\zeta - z_0) = \zeta - z_0$$

(terbukti)

- Keadaan khusus, apabila C adalah kurva mulus tertutup maka: $\zeta = z_0$ dan $\int_c \; dz = 0$

(1) Apabila C merupakan lingkaran dengan $z = z_0 + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi, r > 0$

- Berarti:

$$\int_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

- maka diperoleh: $dz = ire^{it}dt$ sehingga:

$$\int_c \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}dt}{re^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = i\,(2\pi - 0) = 2\pi i$$

(terbukti)

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Hitunglah $\int_C \; z^2 dz$ sepanjang garis OA dari $z = (0,0) ke\; z = (1,2)$!

2. Hitunglah $\int_C \; \bar{z}\, dz$ sepanjang keliling lingkaran satuan $|z| = 1$ arah positif, dimana $z = \cos t + i \sin t$!

3. Tunjukkan bahwa $\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$, bila C keliling lingkaran dengan $= z_0 + re^{i\theta}$, $r > 0, 0 \le \theta \le 2\pi$ dengan arah positif!

4. Hitunglah $\int_C \; f(z)\, dz$ bila $f(z) = y - x + 6ix^2$ dan C terdiri atas dua penggal garis dari $z = 0\; sampai\; z = i\; dan\; dari\; z = 1 + i$

5. Hitunglah $\int_C \; y\, dz$ sepanjang C dimana $x = z + i\; dan\; y = e^t\; dengan\; 0 \le t \le 1$!