TEOREMA CAUCHY – GOURSAT, TEOREMA C – G DALAM DAERAH TERHUBUNG TUNGGAL/GANDA

Fungsi Kompleks
(Bab IV. Integral Fungsi Kompleks)
Dra. Retno Marsitin, M.Pd

TEOREMA CAUCHY – GOURSAT

- Apabila dianggap dua fungsi berharga real $P(x,y)\ dan\ Q(x,y)$ bersama-sama dengan derivative parsial tingakt satu kontinu di seluruh region tertutup R yang memuat titik-titik dalam dan pada kontur tertutup sederhana C. Suatu kontur berorientasi positif bila titik-titik dalam dari R selalu berada di sebelah kiri C. Menurut teorema Green untuk integral garis:

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_R (Q_x - P_y)dxdy$$

- Perhatikan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ yang analitik di seluruh region R di bidang z dan anggap $f'(z)$ kontinu. Fungsi $u\ dan\ v$ bersama derivative parsial tingkat satu kontinu di R maka:

$$\int_C udx - vdy = -\iint_R (v_x + u_y)dxdy \longrightarrow \int_C vdx + udy = \iint_R (u_x - v_y)dxdy$$

- Berdasarkan persamaan Cauchy-Riemann, integran di kedua dobel integral tersebut adalah nol di seluruh R dan berdasar persamaan integral garis maka dua integral pada ruas kiri masing-masing mewakili bagian real dan bagian imajiner dari harga integral $f(z)$ sepanjang C, sehingga dapat ditulis:

$$\int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy = 0 + 0i \quad atau \quad \int_C f(z)dz = 0$$

LANJUTAN TEOREMA CAUCHY – GOURSAT

- Contoh:

➢ Apabila C kontur tertutup sederhana maka $\int_C dz = 0$, $\int_C zdz = 0$, $\int_C z^2 dz = 0$, karena $f(z) = 1, z\ dan\ z^2$ masing-masing merupakan fungsi menyeluruh dan derivatifnya kontinu dimanapun.

- Goursat merupakan orang pertama yang membuktikan hilangnya syarat kontinu pada $f'(z)$. Penghilangnya syarat ini penting dan salah satu akibat misalnya, derivative dari fungsi analitik adalah juga analitik, sehingga muncul revisi dari teorema Cauchy yang dikenal dengan teorema Cauchy – Goursat yaitu:

➢ Bila f(z) analitik di semua titik di dalam dan pada kontur tertutup sederhana C maka $\int_C f(z)dz = 0$

TEOREMA C – G DALAM DAERAH TERHUBUNG TUNGGAL/GANDA

- Daerah terhubung tunggal (*simply connected domain*) D adalah domain sedemikian hingga tiap kontur tertutup sederhana, didalamnya hanyalah terdiri atas titik-titik dari D, sedangkan daerah yang tidak terhubung tunggal disebut terhubung ganda (*multiply connected domain*). Daerah interior dari suatu kontur tertutup misalnya, adalah domain terhubung tunggal, sedangkan daerah eksteriornya adalah domain terhubung ganda, dan daerah diantara dua lingkaran konsentris misalnya adalah domain terhubung ganda.
- ***Teorema Cauchy – Goursat:***
  - Bila f analitik di seluruh domain terhubung tungga D maka untuk tiap kontur tertutup sederhana C di D yaitu $\int_C \ f(z)dz = 0$

LANJUTAN TEOREMA C – G DALAM DAERAH TERHUBUNG TUNGGAL/GANDA

- Kontur tertutup sederhana C dapat diganti dengan kontur tertutup yang tidak tunggal, sehingga bila C memotong dirinya sendiri sebanyak berhingga maka diperoleh sebanyak berhingga kontur tertutup sederhana yang bersesuaian dan teorema Cauchy – Goursat dapat dinyatakan sebagai berikut:
  - Bila C kontur tertutup sederhana dan andaikan C_j $, j = 1,2,3, \dots, n$ sejumlah berhingga kontur tertutup sederhana di dalam C sedemikian hingga interior tiap C_j tidak mempunyai titik berserikat. Jika R region terttutup yang memuat semua titik di dalam dan pada C kecuali interior di tiap C_j. Apabila B mempunyai arah terbatas menyeluruh dari R yang memuat C dan semua C_j dan yang arahnya dinyatakan sedemikian hingga titik-titik dari R selalu berada di sebelah kiri B dan bila $f(z)$ analitik di R maka $\int_B f(z)dz = 0$

LANJUTAN TEOREMA C – G DALAM DAERAH TERHUBUNG TUNGGAL/GANDA

- Contoh:

➢ Perhatikan bahwa $\int_B \frac{dz}{z^2(z^2+9)} = 0$ dimana B memuat lingkaran $|z| = 2$ dengan arah positif bersama lingkaran $|z| = 1$ dengan arah negatif. Integran *f(z)* analitik kecuali pada titik-titik $z = 0 \;\; dan \;\; z = \pm 3i$, ternyata ketiga titik ini berada di luar region terbatas B, sehingga berlaku teorema Cauchy – Goursat.

➢ Hitunglah $\int_{-i}^{1} \frac{dz}{z}$ sepanjang seperempat lingkaran yang ditentukan oleh $z = e^{it}, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0$

Penyelesaian:

- $\int_{-i}^{1} \frac{dz}{z}$ sepanjang seperempat lingkaran yang ditentukan oleh $z = e^{it},\; -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0$
- Integran tersebut tidak analitik pada $z = 0$

$$\int_{-i}^{1} \frac{1}{z} dz = \log z \Big|_{-i}^{1} = \log(1) - \log(-i) = \frac{\pi i}{2}$$

- Perhitungan integral yang secara langsung:

$$\int_{-i}^{1+i} 2z\, dz = z^2 \Big|_{-i}^{1+i} = (1+i)^2 - (-i)^2 = 1 + 2i$$

$$\int_{0}^{i\pi} e^{z+i} dz = e^{z+1} \Big|_{0}^{i\pi} = e^{i\pi+1} - e^1 = -2e$$

$$\int_{\pi}^{i} \sin z\, dz = -\cos z \Big|_{\pi}^{i} = -\cos i + \cos \pi = -1 - \cos i$$