DERIVATIVE FUNGSI-FUNGSI ANALITIK, TEOREMA MORERA, NILAI MUTLAK MAKSIMUM FUNGSI, SIFAT DASAR ALJABAR

Fungsi Kompleks

(Bab IV. Integral Fungsi Kompleks)

Dra. Retno Marsitin, M.Pd

DERIVATIVE FUNGSI-FUNGSI ANALITIK

- Apabila suatu fungsi analitik di suatu titik maka derivative semua tingkat ada dan analitik di titik tersebut ada. Dengan menganggap *f* analitik di dalam dan pada kontur tertutup sederhana *C*, *z* adalah sembarang titik dalam *C*. Misal *s di C* dan menggunakan rumus integral Cauchy maka:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s - z} ds \qquad (1)$$

  - Derivative *f di z* dapat dinyatakan sebagai integral:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z)^2} ds \qquad (2)$$

  - Derivarive kedua dari f di setiap titik z dalam C:

$$f''(z) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z)^3} ds \qquad (3)$$

LANJUTAN DERIVATIVE FUNGSI-FUNGSI ANALITIK

- Realitanya, apabila suatu fungsi adalah analitik di setiap titik maka derivativenya juga analitik di titik tersebut, sehingga apabila *f* analitik di titik *z* maka harus ada lingkaran yang mengelilingi *z* sedemikian hingga *f* analitik di dalam dan pada lingkaran tersebut dan menurut rumus (3), $f''(z)$ ada di setiap titik dalam lingkartan dimana $f'(z)$ yang analitik berbeda. Dengan alasan yang tentang keanalitikan $f'(z)$ untuk menyimpulkan keanalitikan $f''(z)$, pada teorema:

➢ Apabila f analitik di suatu titik maka derivative dari semua tingkat juga analitik di titik tersebut.

  - Teorema di atas dapat dibuktikan:

- Dari $f'(z)$ kontinu, dan karena $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,Y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$ maka derivative parsial tingkat satu dari *u dan v* adalah kontinu. Dari $f''(z)$ analitik serta kontinu, dan karena $f''(z) = u_{xx}(x,y) + iv_{xx}(x,Y) = v_{yy}(x,y) - iu_{yy}(x,y)$ maka derivative parsial tingkat satu dari $u_x, u_y, v_x\ dan\ v_y$ adalah kontinu, begitu seterusnya hingga derivative parsial *u dan v* dari semua tingkat adalah kontinu pada titik dimana *f* analitik.

LANJUTAN DERIVATIVE FUNGSI-FUNGSI ANALITIK

- Pola pikir diperolehnya rumus (2) dan (3) dapat digunakan umtuk menjelaskan rumus integral bagi derivative dari berbagai tingkat, dan berikut ini rumus umum yang diperoleh dari induksi matematik :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds, n = 1,2,\ldots \qquad (4)$$

atau

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, n = 1,2,\ldots$$

- Bahwa rumus berlaku untuk $n = 1$. Apabila dianggap rumus berlaku untuk sembarang bilangan positif $n = k$ maka dapat ditunjukkan bahwa ternyata rumus berlaku untuk $n = k + 1$. Secara detail dapat dibuktikan sendiri. Apabila sepakat bahwa $f^{(0)}(z_0)$ dapat ditulis $f(z_0)$, dan $0! = 1$ maka rumus (4) dapat ditulis:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} z, n = 0,1,2,\ldots \qquad (5)$$

dimana menjadi rumus integral Chauchy bila $n = 0$ dan akan menjadi rumus (4) dengan notasi yang berbeda bila $n = 1,2,\ldots$

CONTOH

- Hitunglah integral $\int_c \frac{z^3+z^2}{(z+\pi i)^3} dz$ dengan $C: z = 7e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$
- Penyelesaian:

$$\int_c \frac{z^3+z^2}{(z+\pi i)^3} dz \text{ dengan } C: z = 7e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

- Persamaan integral tersebut diperoleh:

$$f(z) = z^3 + z^2, z_0 = -\pi i \; dan \; n = 2$$

$$\int_c \frac{z^3 + z^2}{(z + \pi i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \cdot f''(-\pi i) = 6\pi^2 - \pi i$$

TEOREMA MORERA

- Pada uraian telah dipelajari bahwa derivative fungsi: $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds$ (1)

  ada di setiap titik dari domain terhubung tunggal *D* dimana f(z) analitik tapi realitanya:

$$F'(z) = f(z)$$

- Meskipun dianggap *f* analitik di *D*, dalam pembuktiannya hanya menggunakan kontinuitas dari *f* bersama-sama dengan syarat integral *f* mengelilingi tiap kontur tertutup sederhana dalam *D* berharga nol, sehingga pemahaman tentang fungsi *f* baru dua sifat yaitu *F* analitik di *D* dan $F'(z) = f(z)$. Berikut ini diperoleh bahwa apabila *f* analitik di *D* maka derivativenya analitik di *D*. Teorema ini dikemukakan oleh ***E. Morera*** yaitu:

➢ Bila f kontinu di seluruh domain terhubung tunggal D, dan bila untuk tiap kontur terttutup sederhana C yang terletak di dalam C berlaku:

$$\int_C f(z)\, dz = 0, maka\ f\ analitik\ di\ seluruh\ D \qquad (2)$$

Teorema Morera merupakan kebalikan dari teorema C-G. Teorema Morera dapat dikembangkan terhadap sembarang domain *D* dengan syarat bahwa persamaan (2) terpenuhi untuik setiap kontur tertutup sederhana di dalam *D*.

Apabila z_0 adalah titik di *D* maka terdapatlah neighborhood ε, yaitu $|z - z_0| < \varepsilon$ yang termuat dalam *D*, dan teorema Morera dapat diberlakukan pada sembarang neighborhood ε untuk menunjukkan *f* analitik di z_0, sehingga *f* analitik di seluruh *D*.

NILAI MUTLAK MAKSIMUM FUNGSI

- Apabila f analitik dan bukan fungsi konstan dalam cakram terbuka $|z-z_0|<r_0$ pusat z_0. Bila C stu diantara lingkaran-lingkaran $|z-z_0|<r$ dimana $0<r<r_0$ maka menurut rumus integral Cauchy:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \qquad (1)$$

- Lintasan C diambil positif, dan dengan mengganti parameter $z(\theta)=z_0+re^{i\theta},\ 0\le\theta\le 2\pi$ maka persamaan (1) dapat ditulis:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta \qquad (2)$$

- Secara aritmatik, persamaan (2) menunjukkan bahwa nilai fungsi di titik pusat di dalam dan pada lingkaran dimana *f* analitik adalah sama dengan nilai pada lingkaran. Dari persamaan (2) didapat ketidaksamaan yaitu:

$$|f(z_0)|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{i\theta})\right|d\theta, 0\le r\le r_0 \qquad (3)$$

  dimana jelas bahwa khusus untuk $r=0$ termasuk.

- Sebaliknya bila dianggap $|f(z)|\le|f(z_0)|$ untuk semua *z* sedemikian hingga $|z-z_0|<r_0$ maka:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{i\theta})\right|d\theta\le|f(z_0)|, 0\le r\le r_0 \qquad (4)$$

LANJUTAN NILAI MUTLAK MAKSIMUM FUNGSI

- Penggabungan persamaan (3) dan (4) didapat:

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + re^{i\theta})\right| d\theta \quad atau \quad \int_0^{2\pi} \left\{|f(z_0)| - \left|f(z_0 + re^{i\theta})\right|\right\} d\theta = 0\,,0 \le r \le r_0$$

- Karena integran terakhir ini kontinu non negatif, dan selanjutnya $|f(z_0)| = \left|f(z_0 + re^{i\theta})\right|$ maka dengan demikian untuk semua *z*, berlaku $|f(z)| = |f(z_0)|$ untuk $|z - z_0| < r_0$, tetapi berdasarkan uraian bahwa *f(z)* haruslah fungsi konstan pada domain $|z - z_0| < r_0$, dan penetapan *f(z)* bukan sebagai fungsi konstan menyalahi aturan, sehingga anggapan bahwa $|f(z)| \le |f(z_0)|$ untuk semua *z* sedemikian hingga $|z - z_0| < r_0$ merupakan suatu kontadiksi.
- Apabila *f* analitik dan bukan fungsi konstan dalam neighborhood titik z_0 maka ada paling sedikit titik *z* dalam neighborhood tersebut sedemikian hingga:

$$|f(z)| > |f(z_0)| \qquad (5)$$

- akibatnya diperoleh kaidah nilai mutlak maksimum, dengan teorema sebagai berikut:
- ➢ Bila *f* analitik dan bukan fungsi konstan di suatu region maka $|f(z)|$ tidak mempunyai nilai maksimum
- Sekarang anggaplah $|f(z)|$ mempunyai nilai maksimum di titik z_0 dalam *R*, berarti $|f(z)| \le |f(z_0)|$ untuk tiap *z* dalam neighborhood dimana z_0 berada dan ini akan bertentangan dengan persamaan (5).
- Apabila *f* analitik di tiap titik dalam region tertutup terbatas *R* yang merupakan kontinu di seluruh *R*. Hal ini berarti ada bilangan positif M sedemikian hingga $|f(z)| \le M$ untuk semua titik *z* di *R* dan artinya terpenuhinya paling tidak satu titik.

  Apabila *f* fungsi konstan maka $|f(z)| \le M$ untuk semua *z* di *R*, sehingga apabila *f* tidak konstan maka menurut kaidah maksimum $|f(z)| \ne M$ untuk tiap titik di *R*.

LANJUTAN NILAI MUTLAK MAKSIMUM FUNGSI

- *Jadi apabila f kontinu dalam region tertutup terbatas R dan analitik bukan konstan di R maka* $|f(z)|$ *dianggap nilai maksimum pada batas R dan tidak pernah didalamnya.*
- Kaidah nilai minimum dari $|f(z)|$, seperti halnya nilai maksimum dan minimum dari fungsi harmonik $u(x,y) = Re[f(z)]$.
  - Apabila *f* analitik di dalam dan pada lingkaran C_0, $|z - z_0| = r_0$ dengan arah positif maka:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, n = 0,1,2,\ldots$$

- Bila M nilai maksimum dari $|f(z)|$ di C_0 maka ketidaksamaan Cauchy berikutnya yaitu:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{M}{r_0}, n = 1,2,\ldots \qquad (6)$$

Untuk $n = 1$ maka didapat: $|f'(z_0)| \le \frac{M}{r_0}$ (7)

- Dari sini didapat bahwa tidak ada fungsi menyeluruh kecuali satu-satunya fungsi konstan yang dibatasi untuk semua *z*, dan sebagai kesimpulan diperoleh pernyataan yaitu:

Teorema Liouville: Bila *f* menyeluruh dan terbatas untuk semua nilai z maka *f(z)* fungsi konstan

- Untuk membuktikan dengan menyelidiki hipotesis bahwa ada konstanta M sedemikian hingga $|f(z)| \le M$ untuk semua *z*, sehingga untuk tiap titik z_0 persamaan (7) akan terpenuhi untuk sembarang bilangan positif r_0. Karena r_0 dapat dibuat besar sekehendak dan dari $f'(z_0)$ adalah bilangan tertentu maka ketidaksamaan (7) dapat terpenuhi hanya apabila $f'(z_0) = 0$. Jadi derivatif dari $f(z)$ akan sama dengan nol untuk semua z, yang berarti $f(z)$ harus fungsi konstan.

CONTOH

- Contoh:

1. Misalkan $f(z)$ analitik di dalam dan pada suatu kurva tertutup sederhana C. Tunjukkan bahwa jika $f(z) \neq 0$ maka $f|(z)|$ harus mencapai nilai minimumnya pada C dengan teorema minimum
2. Berikan contoh untuk menunjukkan bahwa jika $f(z)$ analitik di dalam dan pada suatu kurva tertutup sederhana C dan $f(z) = 0$ pada suatu titik di dalam C maka $f|(z)|$ tidak perlu mencapai nilai minimumnya pada C

- Penyelesaian:

(1) (z) analitik di dalam dan pada C dan juga karena $f(z) \neq 0$ di dalam C maka mengakibatkan $\frac{1}{f(Z)}$ analitik di dalam C. Menurut teorema maksimum, $\frac{1}{|f(z)|}$ tidak dapat mencapai maksimumnya di dalam C akibatnya $|f(z)|$ tidak dapat mencapai nilai minimumnya di dalam C sehingga minimum ini tercapai pada C.

(2) Misalkan $f(z) = z$ untuk $|z| \leq 1$ sehingga C adalah suatu lingkaran dengan pusat di titik asal dan berjari-jari satu maka $f(z) = 0\ di\ z = 0$. Jika $z = re^{i\theta}$ maka $|f(z)|$ tampak bahwa nilai minimum $|f(z)|$ tidak tercapai pada C tetapi tercapai di dalam C pada $z = 0$

SIFAT DASAR ALJABAR

- Teorema-teorema berikut dikenal sebagai teorema dasar aljabar:

➢ Tiap polynomial $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, a_n \neq 0$ dan $n \geq 1$ mempunyai paling sedikit satu titik nol, yaitu terdapat paling tidak satu titik z_0 sehingga $P(z_0) = 0$

- Pembuktian teorema ini akan sulit dengan metode aljabar murni, tetapi dengan teorema Lioville yang telah diuraikan. Andaikan *P(z)* tidak nol untuk tiap *z* maka fungsi $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ adalah menyeluruh dan merupakan terbatas (bounded) untuk semua *z*. Untuk melihat bahwa fungsi itu terbatas yaitu fungsi tersebut kontinu dan oleh karenanya terbats tiap cakram tertutup yang pusatnya titik asal. Demikian juga terdapatlah bilangan positif *R*, sehingga:

$$|f(z)| = \frac{1}{P(z)} < \frac{2}{|a_n|R^n}$$

- untuk semua *z* di luar $|z| \leq R$, dengan demikian *f* bounded untuk semua nilai *z*. Selanjutnya dengan teorema Lioville, *f(z)* dan demikian pula akibatnya *P(z)* merupakan fungsi konstan, padahal *P(z)* bukan fungsi konstan maka terjadilah kontradiksi.

LANJUTAN SIFAT DASAR ALJABAR

- Teorema-teorema dasar dalam aljabar elementer biasanya tidak dibuktikan, sebagaimana teorema berikut ini bahwa *tiap polynomial derajat n, dimana* $n \geq 1$, *dapat dinyatakan sebagai perkalian faktor-faktor linear* yaitu: $P(z) = c(z - z_1)(z - z_2)\ldots.(z - z_n)$, dimana c *dan* z_k merupakan konstanta-konstanta kompleks, $k=1,2,3,\ldots,n$
-
- Teorema dilengkapi dengan pernyataan bahwa bila untuk bilangan $z = z_1$ ternyata $P(z_1) = 0$ maka polynomial dapat habis dibagi dengan $z - z_1$ dan dapat ditulis: $P(z) = (z - z_1)Q(z)$, dimana *Q(z)* merupakan polynomial derajat $(n - 1)$, yang pembuktiannya dapat diperoleh dari induksi matematik, sehingga akhirnya satu polynomial derajat n mempunyai tidak lebih dari n titik nol yang berbeda.

CONTOH

- Contoh:

(1) Tunjukkan bahwa setiap persamaan suku banyak $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, a_n \neq 0$ dan $n \geq 1$ memiliki paling sedikit satu akar

(2) Tunjukkan bahwa setiap persamaan suku banyak $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, a_n \neq 0$ dan $n \geq 1$ memiliki tepat n akar.

- Penyelesaian:

(1) Jika $P(z)$ tidak memiliki akar maka $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ analitik untuk setiap z dan $|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|}$ (terbatas dan dalam kenyataannya mendekati nol) untuk $|z| = \infty$. Teorema Lioville mengakibatkan bahwa $f(z)$ dan $P(z)$ haruslah suatu konstanta dan ini brtentangan dengan derajat $n \geq 1$ dan $a_n \neq 0$ sehingga $P(z)$memiliki paling sedikit satu akar atau dikatakan bahwa $P(z)$ memiliki paling sedikit stu nilai nol.

(2) Menurut teorema dasar aljabar bahwa $P(z)$ memiliki paling sedikit satu akar dengan akarnya α maka $P(\alpha) = 0$ sehingga:

- $P(z) - P(\alpha) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n - (a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \cdots + a_n \alpha^n) = a_1(z - \alpha) + a_2(z^2 - \alpha^2) + \cdots + a_n(z^n - \alpha^n)$
- dengan $Q(z)$ merupakan suatu suku banyak berderajat $(n-1)$

  Menggunakan teorema dasar aljabar sekali lagi maka terlihat bahwa $Q(z)$ memiliki paling sedikit satu akar yang dapat dinyatakan dengan β (yang mungkin sama dengan α) maka $P(z) = (z - \alpha)(z - \beta)\ R(z)$ dan bisa dilanjutkan sehingga $P(z)$ memiliki tepat n akar.