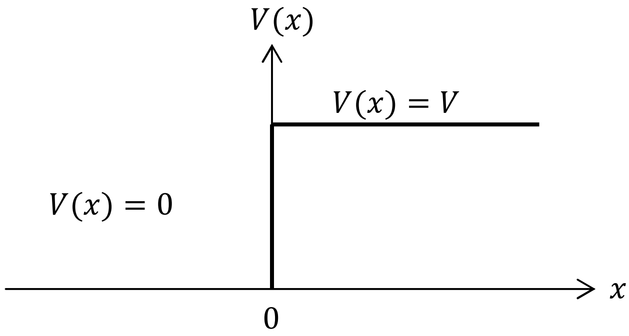
**MATERI PERKULIAHAN**

## 3. Potensial Tangga

Tinjau suatu partikel bermassa *m*, bergerak dari kiri ke kanan pada suatu daerah dengan potensial berbentuk tangga, seperti pada Gambar 1. Pada daerah $x < 0$ potensialnya nol sedangkan pada daerah $x \geq 0$, potensialnya konstan yaitu $V$.




Gambar 1. Potensial tangga

Bagaimana bentuk fungsi gelombang partikel tersebut? Jawaban dari pertanyaan ini memiliki dua kemungkinan, pertama jika energi partikel kurang dari atau sama dengan potensial, $E < V$, dan yang kedua energi partikel lebih dari potensial $E > V$.

### a. Jika $\boldsymbol{E} < V$

Oleh karena ada dua daerah dengan potensial yang berbeda maka persamaan Schrödinger memiliki bentuk yang berbeda-beda pada masing-masing daerah tersebut. Pada daerah $x < 0$, persamaan Schrödinger dengan $V(x) = 0$ adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = E\,\varphi(x) \qquad (1)$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\,\varphi(x)$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -k^2\varphi(x) \qquad (2)$$

dengan *k* adalah konstanta real positif

$$k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{3}$$

Persamaan (2) adalah persamaan diferensial orde dua dengan akar-akar bilangan kompleks yang berlainan sehingga solusinya adalah

$$\varphi_1(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx} \tag{4}$$

Bentuk solusi bergantung waktunya adalah

$$\Psi_1(x,t) = \varphi_1(x)f(t)$$

dengan $f(t) = e^{-iEt/\hbar}$

$$\Psi_1(x,t) = \left(Ae^{-ikx} + Be^{ikx}\right)e^{-iEt/\hbar}$$

$$\Psi_1(x,t) = Ae^{-(ikx+Et/\hbar)} + Be^{i(kx-Et/\hbar)} \tag{5}$$

Suku pertama dari persamaan (5), yaitu $Ae^{-(ikx+Et/\hbar)}$ adalah bentuk gelombang yang merambat dari kanan ke kiri, sehingga ditafsirkan sebagai gelombang pantul dengan perambatan dari $x = 0$ menuju $x = -\infty$. Sementara itu, suku kedua dari persamaan (5), yaitu $Be^{i(kx-Et/\hbar)}$ adalah bentuk gelombang yang merambat dari kiri ke kanan, sehingga ditafsirkan sebagai gelombang datang dengan perambatan dari $x = -\infty$ menuju $x = 0$.

Pada daerah $x \geq 0$, Persamaan Schrödinger dengan potensial $V(x) = V$ adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V\varphi(x) = E\,\varphi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -V\varphi(x) + E\,\varphi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -(V-E)\varphi(x)$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\varphi(x) \tag{6}$$

Jika didefinisikan suatu konstanta real positif baru, $q \equiv \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V-E)}$

maka persamaan (6) menjadi

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = q^2\,\varphi(x) \qquad (7)$$

Perhatikan persamaan (6)! Persamaan ini adalah persamaan diferensial orde dua, mirip dengan persamaan (2), namun dengan akar-akar real berlainan, solusinya adalah

$$\varphi_2(x) = Ce^{-qx} + De^{qx} \qquad (8)$$

Salah satu syarat fungsi gelombang agar memenuhi persamaan Schrödinger adalah fungsi gelombang harus bernilai berhingga saat $x$ menuju tak hingga. Oleh karena pada daerah $x \to \infty$ fungsi gelombangnya adalah $\varphi_2(x)$ maka

$$\varphi_2(\infty) = Ce^{-\infty} + De^{\infty}$$

$$= 0 + \infty$$

Tampak bahwa fungsi gelombang bernilai tak hingga pada saat $x$ menuju tak hingga. supaya $\varphi_2(\infty)$ berhingga maka haruslah $D = 0$ dengan demikian, persamaan (8) menjadi

$$\varphi_2(x) = Ce^{-qx} \qquad (9)$$

Dengan demikian, solusi persamaan Schrödinger pada masing-masing daerah telah diperoleh, persamaan (4) untuk daerah $x < 0$, dan persamaan (9) untuk daerah $x \geq 0$.

$$\varphi_1(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}, \qquad \text{untuk } x < 0$$

$$\varphi_2(x) = Ce^{-qx}, \qquad \text{untuk } x \geq 0$$

Untuk menentukan konstanta $A, B,$ dan $C$ maka kita terapkan syarat kontinuitas fungsi gelombang dan turunannya pada batas kedua daerah, yaitu pada $x = 0$.

Syarat kontinuitas fungsi gelombang pada $x = 0$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$$

$$Ae^0 + Be^0 = Ce^0$$

$$A + B = C \tag{10}$$

Syarat kontinuitas turunan pertama fungsi gelombang pada $x = 0$

$$\frac{d}{dx}\varphi_1(x)\bigg|_{x=0} = \frac{d}{dx}\varphi_2(x)\bigg|_{x=0}$$

$$\frac{d}{dx}\left(Ae^{-ikx} + Be^{ikx}\right)\bigg|_{x=0} = \frac{d}{dx}\left(Ce^{-qx}\right)\bigg|_{x=0}$$

$$\left(-ikAe^{-ikx} + ikBe^{ikx}\right)\Big|_{x=0} = -kCe^{-qx}|_{x=0}$$

$$-ikA + ikB = -qC$$

$$ikA - ikB = qC \tag{11}$$

$$ikA - ikB = qC$$

$$C = \frac{ikA - ikB}{q} \tag{12}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (10) ke persamaan (11) maka diperoleh

$$ikA - ikB = q(A + B)$$

$$ikA - ikB = q(A + B)$$

$$qB + ikB = ikA - qA$$

$$B = \frac{(ik - q)}{ik + q}A \tag{13}$$

Untuk mendapatkan konstanta C, yaitu dengan mensubstitusikan persamaan (13) ke persamaan (10), diperoleh

$$C = A + \frac{(ik - q)}{ik + q}A$$

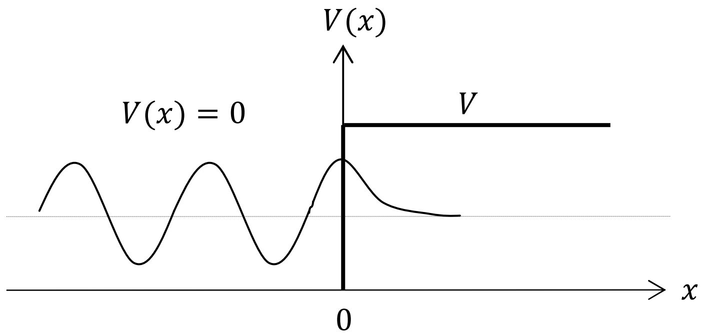
$$C = \frac{2ik}{ik + q}A \tag{14}$$

Dengan demikian, solusi persamaan Schrödinger pada masing-masing daerah adalah

$$\varphi_1(x) = Ae^{-ikx} + \frac{(ik-q)}{ik+q}\, A\, e^{ikx}, \text{ untuk } x < 0 \tag{15}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{2ik}{ik+q} A\, e^{-qx}, \quad \text{untuk } x \geq 0 \tag{16}$$

Gambar 2 menampilkan grafik fungsi gelombang $\varphi_1(x)$ dan $\varphi_2(x)$. Pada daerah $x \geq 0$ fungsi gelombang meluruh secara eksponensial menuju nol




Gambar 2. Fungsi gelombang pada potensial tangga dengan $E < V$

Berbeda dengan permasalahan partikel dalam sumur potensial tak hingga dan osilator harmonik, pada permasalahan ini, tidak diperoleh keadaan dengan energi yang berbeda-beda. Namun demikian, dari tinjauan secara kuantum, partikel yang bergerak dengan energi yang lebih kecil dari potensial, masih dapat menembus daerah dengan potensial yang lebih tinggi dari energinya sedangkan secara klasik tidak.

**b. Jika $E \geq V$**

Jika partikel berenergi $E \geq V$, Persamaan Schrödinger pada daerah $x < 0$ sama dengan kasus $a$ di atas karena potensial pada daerah tersebut nol. Dengan demikian, solusinya juga sama, yaitu

$$\varphi_1(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx} \tag{17}$$

Sementara pada daerah $x \geq 0$ persamaan Schrödingernya adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+V\varphi(x)=E\ \varphi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}=(E-V)\varphi(x)$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}=-\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\varphi(x) \tag{18}$$

Jika

$$q\equiv\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)} \tag{19}$$

maka persamaan (18) menjadi

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}=-q^2\varphi(x) \tag{20}$$

dengan $q$ adalah konstanta real positif. Persamaan (20) adalah persamaan diferensial orde dua dengan akar-akar bilangan kompleks yang berlainan. Solusi persamaan (20) adalah

$$\varphi_2(x)=Ce^{-iqx}+De^{iqx} \tag{21}$$

Mirip dengan kondisi pada persamaan (5), suku $Ce^{-iqx}$ merepresentasikan gelombang yang merambat dari kanan ke kiri sedangkan suku $De^{iqx}$ merepresentasikan gelombang yang merambat dari kiri ke kanan. Oleh karena gelombang merambat dari kiri ke kanan, maka pada daerah $x\geq 0$ tidak ada gelombang pantul, jadi suku $Ce^{-iqx}$ tidak menunjukkan keadaan fisis sehingga konstanta $C=0$. Dengan demikian, persamaan (21) menjadi

$$\varphi_2(x)=De^{iqx} \tag{22}$$

Konstanta $A, B,$ dan $D$ ditentukan dengan menerapkan syarat kontinuitas fungsi gelombang beserta turunannya pada $x=0$, sama seperti pada kasus (a) sebelumnya.

Syarat kontinuitas fungsi gelombang pada daerah batas, yaitu pada $x=0$

$$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$$

$$Ae^0 + Be^0 = De^0$$

$$D = A + B \tag{23}$$

Syarat kontinuitas turunan pertama fungsi gelombang pada daerah batas, yaitu pada $x = 0$

$$\frac{d}{dx}\varphi_1(x)\bigg|_{x=0} = \frac{d}{dx}\varphi_2(x)\bigg|_{x=0}$$

$$\frac{d}{dx}\left(Ae^{-ikx} + Be^{ikx}\right)\bigg|_{x=0} = \frac{d}{dx}\left(De^{iqx}\right)\bigg|_{x=0}$$

$$\left(-ikAe^{-ikx} + ikBe^{ikx}\right)\big|_{x=0} = iqDe^{-qx}|_{x=0}$$

$$-ikA + ikB = iqD$$

$$D = \frac{kA - kB}{q} \tag{24}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (23) ke persamaan (24), diperoleh

$$A + B = \frac{kA - kB}{q}$$

$$qA + qB = kA - kB$$

$$B = \frac{(k-q)A}{k+q} \tag{25}$$

Kemudian untuk memperoleh konstanta $D$, yaitu dengan mensubstitusikan persamaan (25) ke persamaan (23), didapatkan

$$D = A + \frac{(k-q)A}{k+q}$$

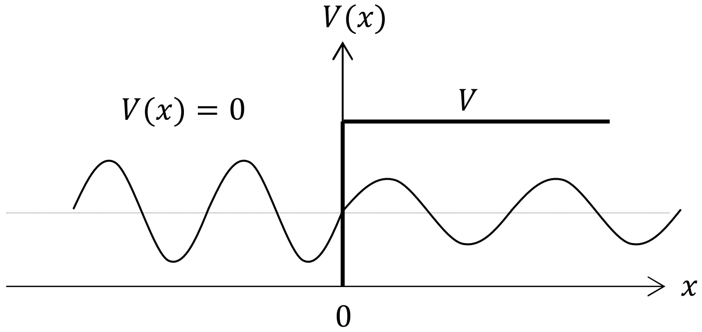
$$D = \frac{2kA}{k+q} \tag{26}$$

Dengan demikian, fungsi gelombang pada masing-masing daerah adalah

$$\varphi_1(x) = Ae^{-ikx} + \frac{(k-q)A}{k+q}e^{ikx} \tag{27}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{2kA}{k+q} e^{iqx} \tag{28}$$

Gambar 3 menampilkan grafik fungsi gelombang $\varphi_1(x)$ dan $\varphi_2(x)$. Pada daerah $x \geq 0$ fungsi gelombang berupa sinusoidal dengan amplitudo yang lebih kecil dan panjang gelombang yang lebih panjang dibanding fungsi gelombang pada daerah $x \geq 0$.




Gambar 3. Fungsi gelombang pada potensial tangga dengan $E \geq V$