Pada Bab 5, kita telah membahas metode-metode umum untuk mendapatkan distribusi dari suatu fungsi dari n peubah acak, katakanlah Wn = u(X1; . . . ;Xn). Dalam beberapa kasus, fungsi densitas peuang Wn mudah diperoleh, tetapi dalam beberapa kasus penting penurunan distribusi tidaklah terlacak (not tractable). Untuk mengatasi hal ini, sangatlah mungkin untuk memperoleh hasil-hasil yang mendekati yang bisa diterapkan saat n besar. Hasil ini berdasarkan konsep konvergensi dalam distribusi dan limit distribusi.

6.1 Barisan Peubah Acak

Misal suatu barisan peubah acak $W_1, W_2, \ldots$ dengan barisan distribusi kumulatif yang bersesuain $G_1(w), G_2(w), \ldots$ sedemikian hingga untuk setiap $n = 1, 2, \ldots$

$$G_n(w) = P(W_n \leq w). \qquad (6.1)$$

Definisi 6.1

Konvergensi dalam Distribusi). Jika $W_n \sim G_n(w)$ untuk setiap $n = 1, 2, \ldots$, dan jika untuk beberapa fungsi distribusi kumulatif $G(w)$,

$$\lim_{n\to\infty} G_n(w) = G(w) \qquad (6.2)$$

untuk semua nilai w yang mana $G(w)$ adalah kontinu, maka barisan $W_1, W_2, \ldots$ dikatakan konvergen dalam distribusi (*converge in distribution*) ke $W \sim G(w)$, dinotasikan

$$W_n \to^{d} W \qquad (6.3)$$

Distribusi yang bersesuaian dengan fungsi distribusi kumulatif $G(w)$ disebut limit distribusi dari W_n (*limiting distribution of* W_n).

Contoh 6.1

Misal $X_1,...,X_n$ adalah sampel acak dari suatu distribusi seragam, yakni Xi~UNIF (0,1) dan misal $W_n = X_{n:n:}$ adalah statistik terurut terbesar. Dari Bab 5 kita tahu bahwa fungsi distribusi kumulatif W_n adalah

$$G_n(w) = \begin{cases} 0, & \text{Jika } w \leq 0\text{ ;} \\ w^n, & \text{jika } 0 < w < 1\text{; jika } w \\ 1, & \geq 1. \end{cases} \qquad (6.4)$$

Pada saat $0 < w < 1$, bentuk w^n mendekati 0 sebagaimana n mendekati ∞ ; pada saat $w \leq 0$ atau$w \geq 1$ maka $Gn(w)$ adalah suatu barisan konstan, dengan batas-batas bersesuaian 0 atau 1.

Dengan demikian $\lim_{n\to\infty} G_n(w) = G(w)$ dimana

$$G_n(w) = \begin{cases} 0, & \text{Jika } w < 1\ ; \\ 1, & \text{Jika } w \geq 1. \end{cases} \qquad (6.5)$$

Contoh 6.2

- Misal suatu sampel acak dari suatu sampel berukuran n dari suatu distribusi dengan fungsi distribusi kumulatif

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - 1/x, & \text{Jika } 1 \leq \infty\ ; \\ 0, & \text{Jika } x \text{ lainnya.} \end{cases} \qquad (6.6)$$

Misal $W_n = X_{1:}n$. Dari Bab 5 kita tahu bahwa fungsi distribusi W adalah

$$G_n(w) = \begin{cases} 1-[1-(1-1/w)]^n, & \text{Jika } 1 \leq w \leq \infty\ ; \\ 1, & \text{Jika } w \text{ lainnya.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - (1/w)^n, & \text{Jika } 1 \leq w \leq \infty\ ; \\ 1, & \text{Jika } w \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Kita peroleh $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(w) = 1$ jika $1 \leq w \leq \infty$ karena $1/w^n = 0$, dan $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$ jika w lainnya.

Definisi 6.2

(Distribusi Degenerasi). Fungsi $G(w)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari suatu distribusi degenerasi (*degenerate distribution*) pada nilai $w=c$ jika

$$G_n(w) = \begin{cases} 0, & \text{Jika } w < c\,; \\ 1, & \text{Jika } w \geq 1. \end{cases} \qquad (6.7)$$

Dengan kata lain, $G(w)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari suatu distribusi diskrit yang menugaskan peluang satu pada saat $w=c$ dan nol untuk yang lainnya.

Contoh 6.3

- Misal $X_1,\ldots,X_n$ adalah suatu sampel acak dari suatu distribusi eksponensial $Xi \sim$ EXP(θ) dan misalkan $W_n = X_{1:}n$ adalah statistik terurut terkecil. Dari Bab 5, kita tahu bahwa fungsi distribusi kumulatif untuk statistik terurut terkecil adalah

$$
\begin{aligned}
G_n(w) &= 1 - [1 - F(w_1)]^n \\
&= 1 - [1 - (1 - e^{-w/\theta})]^n \\
&= 1 - [1 - 1 + e^{-w/\theta n}] \\
&= 1 - [e^{-w/\theta}]^n \\
&= 1 - [e^{-wn/\theta}, \text{ untuk } w > 0,
\end{aligned}
$$

dan nol untuk w lainnya. Kita peroleh $\lim_{n\to\infty} {}_{G_n}(w) = 1$ jika $w > 0$ karena $e^{-w/\theta} < 1$ dalam hal ini. Dengan demikian limit ini nol jika $w < 0$ dan 1 jika $w > 0$, yang bersesuaian dengan distribusi degenerasi pada nilai $w = 0$.

Definisi 6.3

(Konvergen Secara Stokastik). Suatu barisan peubah acak $W_1, W_{2,\ldots}$, dikatakan konvergen secara stokastik (*converge stochastically*) ke suatu konstan c apabila memiliki suatu limit distribusi yang degenarasi pada $w = c$.

Berikut ini limit yang penting untuk diketahui:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^{nb} = e^{cb} \qquad (6.8)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{c}{n} + \frac{d(n)}{n}\right]^{nb} = e^{cb}, \quad \text{jika } \lim d(n) = 0 \qquad (6.9)$$

Contoh 6.4

- Misal $X_1,\ldots,Xn$ adalah suatu sampel acak dari suatu distribusi Pareto, yakni $Xi \backsim$ PAR $(1_,1)$, dan misal $W_n = n\, X_{1:}n$. Fungsi distribusi kumulatif Xi diberikan oleh $FX(x) = 1 - (1 + x)^{-1}$, $x > 0$. Dengan demikian fungsi distribusi kumulatif W_n adalah

$$G_n(w) = 1 - [1 - F(w/n)]^n$$
$$= 1 - [1 - (1 - (1 + w/n)^{-1})]^n$$
$$= 1 - [1 - 1 + (1 + w/n)^{-1}]^n$$
$$= 1 - [(1 + w/n)]^n$$
$$= 1 - (1 + w/n)^{-n} >, w\ 0.$$

- Untuk $w > 0$ kita peroleh $\lim\limits_{n\to\infty} {}_{G_n}(w) = 1 - e^{-w}$ dan nol untuk w lainnya. Ini merupakan fungsi distribusi kumlulatif

Contoh 6.5

- Jika kita lihat kembali Contoh 6.4 misal $W_n = X_{n:n}$. Fungsi distribusi kumulatif $W_n = x_{n:n}$. Fungsi distribusi kumulatif w_n adalah

$$G_n(w) = [F(w)]^n$$
$$= [1 - 1) / (1 + w)]^n$$
$$= \left[\frac{(1+w)-1}{1+w}\right]^n$$
$$= \left(\frac{w}{1+w}\right)^n, w > 0,$$

dan nol untuk w lainnya. Mengingat $w/(1+w) < 1$ maka kita peroleh $\lim_{n\to\infty} G_n(w) = G(w) = 0$ untuk semua w, yang tentu bukan suatu fungsi distribusi kumulatif karena tidak mendekati satu sebagaimana $w \to \infty$

Teorema Limit Pusat

Dalam contoh sebelumnya, fungsi distribusi komulatif yang pasti telah diketahui untuk setiap n tertentu (terbatas), dan distribusi limit diperoleh secara langsung dari barisan ini. Salah satu keuntungan limit distribusi adalah bahwa dimungkinkan untuk menentukan limit distribusi tanpa mengetahui bentuk pasti dari fungsi distribusi kumulatif untuk n terbatas. Limit distribusi menyediakan informasi yang berguna apabila peluang eksak tidak tersedia.

Teorema Limit Pusat

Teorema Misal $W_1, W_2, \ldots,$ adalah suatu barisan peubah acak dengan fungsi distribusi kumulatif bersesuaian $G_1(w), G_2(w), \ldots,$ dari fungsi pembangkit momen $M_1(t), M_2(t), \ldots$. Jika $M(t)$ adalah fungsi pembangkit momen dari suatu fungsi distribusi kumulatif $G(w)$ dan jika $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = M(t)$ untuk semua t dalam interval terbuka yang berisi nol, $-h < t < h$, maka $\lim_{n\to\infty} G_n(w) = G(w)$ untuk semua titik-titik kontinu dari $G(w)$.

Contoh 6.7. Misal $X_1, \ldots, X_n$ adalah suatu sampel acak dari suatu distribusi Bernoulli, yakni $X_i \sim \mathrm{BIN}(1, p)$, dan misalkan $W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Jika $p \to 0$ sebagaimana $n \to \infty$ sedemikian hingga $np = \mu$, maka untuk $\mu > 0$ diperoleh

$$\begin{aligned} M_n(t) &= (p\,\mathrm{e}^t + q)^n \\ &= (p\,\mathrm{e}^t + 1 - p)^n \\ &= \left(\frac{\mu\,\mathrm{e}^t}{n} + 1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{\mu(\mathrm{e}^t - 1)}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Note :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\mu(e^t-1)}{n}\right)^n = e^{\mu(e^t-1)}$$

Dengan demikian diperoleh $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = \mathrm{e}^{\mu(\mathrm{e}^t-1)}$ yang merupakan fungsi pembangkit momen dari distribusi Poisson dengan rata-rata μ. Hal ini berarti $W_n \xrightarrow{d} W \sim \mathrm{POI}(\mu)$. Contoh ini menyarankan bahwa peubah acak binomial $W_n \sim \mathrm{BIN}(n, p)$, jika n besar dan p kecil, maka $W_n \sim \mathrm{POI}(np)$.

Teorema Limit Pusat

- Suatu barisam distribusi gabungan peubah acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dengan rata-rata dan variansi yang berhingga dikatakan memenuhi Teorema Limit Pusat (TLP) jika Z_n yang didefinisikan sebagai;

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \quad , \quad S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Teorema 6.2

Misalkan $X_1, X_2, \ldots$ peubah acak bebas yang berdistribusi identik dengan $E(X_1) = \mu$ dan Var $(X_1) = \sigma^2 > 0$ (keduanya berhingga) maka untuk semua $z, -\infty < z < \infty\ jika\ n \to \infty$

$$P\left[\frac{(x_1-\mu)+\ldots+(x_n-\mu)}{\sqrt{n}\sigma} < z\right] \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

Berdasarkan teorema ;

Dengan menggunakan deret Taylor didapat

$$
\begin{aligned}
M_{\frac{(X_1-\mu)+(X_2-\mu)+\ldots+(X_n-\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(t) &= M_{\frac{(X_1-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}+\frac{(X_2-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}+\ldots+\frac{(X_n-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}}(t) \\
&= \left[M_{\frac{(X_1-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}}(t) \right]^n \\
&= \left[M_{X_1-\mu}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n \\
&= \left[E\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(X_1-\mu)} \right) \right]^n
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan deret Taylor didapat

$$= \left[1 + \frac{E(X_1 - \mu)}{1!} \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{E\left(X_1 - \mu\right)^2}{2!} \frac{t^2}{n\sigma^2} + \sum_{k=3}^{n} E\left(X_1 - \mu\right)^k \frac{t^k}{\left(\sigma\sqrt{n}\right)^k k!} \right]^n$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2} \frac{t^2}{n} + \sum_{k=3}^{n} E\left(X_1 - \mu\right)^k \frac{t^k}{\left(\sigma\sqrt{n}\right)^k k!} \right]^n$$

Untuk $n \to \infty$ maka

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n} E(X_1 - \mu)^k \frac{t^k}{\left(\sigma\sqrt{n}\right)^k k!} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} M_{\frac{(X_1-\mu)+(X_2-\mu)+\ldots+(X_n-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + 0\right]^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{t^2/2}{n}\right]^n$$

$$= e^{\frac{1}{2}t^2}$$

yang merupakan fungsi pembangkit momen dari distribusi normal standar. Jadi $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Contoh ini mengilustrasikan bahwa untuk n besar dan p tertentu (*fixed*) maka W_n mendekati normal yakni $W_n \sim \mathcal{N}(np, npq)$.

Teorema 6.2 (Teorema Limit Pusat). Jika $X_1, \ldots, X_n$ adalah suatu sampel acak dari distribusi dengan rata-rata μ dan variansi $\sigma^2 < \infty$, maka limit distribusi (*limiting distribution*) dari

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \tag{6.13}$$

adalah normal standar, yakni $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ sebagaimana $n \to \infty$.

Bentuk persamaan (6.13) dapat juga dihubungkan dengan rata-rata sampel, yakni

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}. \tag{6.14}$$

Berikut contoh Teorema Limit Pusat yang menyatakan kapan distribusi dari $\bar{X}$ hampir normal dalam terapan statistikanya.

Contoh 3.6

- Seorang ahli astronomi berencana membuat pengukuran berkelanjutan dan menggunaka nilai rata-rata dari pengukuran itu sebagai nilai penaksirnya untuk jarak nyata dari observatorium ken bintang terjauh. Adapun nilai pengukuran adalah peubah acak berdistribusi bebas dan identik dengan mean *d* (jarak sesungguhnya) dan variansi 4 tahun cahaya. Berdasarkan hal tsb akan dicari banyaknya pengukuran agar penaksiran jarak akurat dalam $\pm$ 0,5 th cahaya.

Penyelesaian:

Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$adalah obserfasi sebanyak *n* pengukuran maka berdasarkan definisi Teorema Limit Pusat dapat ditunjukan sebagai berikut:

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$$

Karena peubah acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ berdistribusi bebas dan identik maka:

$$E(X_1) = E(X_2) = \ldots = E(X_n) = \mu$$

$$Var(X_1) = Var(X_2) = \ldots = Var(X_n) = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} E(S_n) &= E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) \\ &= n\mu \end{aligned}$$

jika $\mu = d$, maka

$E(S_n) = nd$.

Sedangkan

$$\begin{aligned} Var(S_n) &= Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n) \\ &= n\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(S_n) &= \sqrt{n\sigma^2} \\ &= \sigma\sqrt{n} \\ &= 2\sqrt{n} \end{aligned}$$

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nd}{2\sqrt{n}}$$

konvergen dalam distribusi ke peubah acak yang berdistribusi normal baku. Sehingga peluang banyaknya pengukuran agar penaksiran jarak akurat dalam $\pm 0{,}5$ tahun cahaya adalah ;

$$P\left(-0{,}5 \le \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - d \le 0{,}5\right) = P\left(-0{,}5 \le \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - nd}{n} \le 0{,}5\right)$$

$$= P\left(-0{,}5\frac{\sqrt{n}}{2} \le \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - nd}{2\sqrt{n}} \le 0{,}5\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$

$$= P\left(-0{,}5\frac{\sqrt{n}}{2} \le Z_n \le 0{,}5\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$

$$= P\left(Z \le \frac{\sqrt{n}}{4}\right) - P\left(Z \le -\frac{\sqrt{n}}{4}\right)$$

$$= P\left(Z \le \frac{\sqrt{n}}{4}\right) - P\left(Z \ge \frac{\sqrt{n}}{4}\right)$$

$$= P\left(Z \le \frac{\sqrt{n}}{4}\right) - \left[1 - P\left(Z \le \frac{\sqrt{n}}{4}\right)\right]$$

$$= 2P\left(Z \le \frac{\sqrt{n}}{4}\right) - 1$$

- Apabila ahli astronomi itu menginginkan 95 persen kepastian bahwa nilai penaksiran itu akurat dalam 0,5 tahun cahaya maka dapat dibuat *n* pengukuran yaitu

$$2P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) - 1 = 0{,}95$$

atau

$$\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0{,}975$$

- Dari tabel normal didapat $\frac{\sqrt{n}}{4} = 1.96$ Jadi jumlah pengukuran harus dilakukan adalah sebanyak 62. Hal ini dapat pula diasumsikan bahwa pendekatan normal akan baik ketika *n* = 62.

SIFAT – SIFAT KONVERGENSI STOKASTIK

KONVERGEN DALAM PELUANG

Pada Teori Peluang, barisan variabel acak $\{X_n\}$ yang "dekat" ke X untuk n yang besar, dapat diartikan sebagai barisan variabel acak $\{X_n\}$ yang "konvergen dalam peluang" ke X.

Definisi 1 *Misal $\{X_n\}$ barisan variabel acak dan X variabel acak yang terdefinisi pada suatu ruang sampel. Barisan variabel acak $\{X_n\}$ dikatakan* ***konvergen dalam peluang*** *ke X, dinotasikan $X_n \xrightarrow{p} X$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0 \tag{1}$$

yang ekivalen dengan

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

KONVERGEN DALAM PELUANG

Pada Definisi 1, X disebut limit dari barisan $\{X_n\}$. Jika limitnya berupa konstanta (variabel acak *degenerate* atau varibel acak dengan satu nilai yang mungkin, misal a), maka dapat ditulis $X_n \xrightarrow{p} a$. Seandainya, barisan variabel acaknya semuanya merupakan konstanta misal $\{a_n\}$ maka pengertian kekonvergenan pada bilangan riil $a_n \to a$ ekivalen dengan $a_n \xrightarrow{p} a$.

KONVERGEN DALAM PELUANG

Interpretasi konvergen dalam peluang. Peristiwa $\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}$ pada persamaan (1) ekivalen dengan peristiwa

$$\{X_n - X \leq -\varepsilon \quad \text{atau} \quad X_n - X \geq \varepsilon\}$$

atau peristiwa

$$\{X_n \leq X - \varepsilon \quad \text{atau} \quad X_n \geq X + \varepsilon\}$$

Akibatnya, peristiwa $\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}$ ekivalen dengan peristiwa

$$X_n \notin (X - \varepsilon, X + \varepsilon)$$

Di sini, selang $(X - \varepsilon, X + \varepsilon)$ dapat dikatakan sebagai **lingkungan buka** untuk X dengan radius ε.

KONVERGEN DALAM PELUANG

Dengan demikian, pengertian $X_n \xrightarrow{p} X$ dapat diinterpretasikan bahwa untuk n besar dan untuk setiap $\varepsilon > 0$, hampir tidak mungkin X_n berada di luar lingkungan $(X - \varepsilon, X + \varepsilon)$. Hal ini juga ekivalen dengan pernyataan bahwa untuk n besar, hampir dipastikan bahwa X_n berada dalam lingkungan $(X - \varepsilon, X + \varepsilon)$.

KONVERGEN DALAM PELUANG

Sifat-sifat konvergen dalam peluang. Misal $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ masing-masing barisan variabel acak, dan X, Y variabel acak.

1. Jika $X_n \xrightarrow{p} X$ dan $Y_n \xrightarrow{p} Y$, maka $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$.
2. Jika $X_n \xrightarrow{p} X$ dan a suatu konstanta, maka $aX_n \xrightarrow{p} aX$.
3. Jika $X_n \xrightarrow{p} X$ dan g fungsi bernilai riil yang kontinu di titik a, maka $g(X_n) \xrightarrow{p} g(a)$. Sebagai contoh, jika $X_n \xrightarrow{p} a$ maka

$$\begin{aligned} X_n^2 &\xrightarrow{p} a^2, \\ 1/X_n &\xrightarrow{p} 1/a, \qquad \text{jika } a \neq 0, \\ \sqrt{X_n} &\xrightarrow{p} \sqrt{a}, \qquad \text{jika } a \geq 0, \end{aligned}$$

   karena fungsi kuadrat, fungsi kebalikan, dan fungsi akar merupakan fungsi yang kontinu di masing-masing domainnya.

4. Jika $X_n \xrightarrow{p} X$ dan $Y_n \xrightarrow{p} Y$, maka $X_nY_n \xrightarrow{p} XY$.

KONVERGEN DALAM PELUANG

Sifat-sifat tersebut dapat digunakan untuk membuktikan sifat konvergen dalam peluang. Selain itu, pembuktian sifat konvergen dalam peluang juga dapat dilakukan menggunakan Teorema Chebyshev yang dinyatakan pada teorema berikut:

Teorema 2 (Teorema Chebyshev) *Misal distribusi variabel acak X mempunyai* mean *μ dan variansi $\sigma^2 < \infty$, maka untuk setiap $k > 0$,*

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \tag{2}$$

yang ekivalen dengan

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Jika dimisalkan $k\sigma = \varepsilon$, maka persamaan (2) menjadi

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

HUKUM BILANGAN BESAR

Hukum Bilangan Besar. Terkait dengan perilaku rata-rata sampel $\bar{X}$ untuk ukuran sampel besar, terdapat dua teorema penting dalam statistika yaitu, "Hukum Lemah Bilangan Besar" atau *Weak Law of Large Number* (WLLN) dan "Hukum Kuat Bilangan Besar" atau *Strong Law of Large Number* (SLLN). Dua hukum tersebut sama-sama menyatakan bahwa untuk sampel besar, rata-rata sampel $\bar{X}$ "dekat" ke μ.

HUKUM BILANGAN BESAR

Teorema 3 (Hukum Lemah Bilangan Besar) *Misal* $\{X_n\}$ *barisan variabel acak ini dari distribusi dengan* mean μ *dan variansi* $\sigma^2 < \infty$. *Jika* $\overline{X}_n = 1/n \sum_{i=1}^{n} X_i$, *maka*

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

Bukti. Dari Akibat 1 di Subbab 3.4 (*handout* kuliah) telah diperoleh bahwa $\overline{X}_n$ mempunyai *mean* μ dan variansi σ^2/n. Akibatnya, menurut Teorema Chebyshev untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = P\left[|\overline{X}_n - \mu| \geq (\varepsilon\sqrt{n}/\sigma)(\sigma/\sqrt{n})\right] \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0. \quad \blacksquare$$

HUKUM BILANGAN BESAR

Secara tidak langsung Hukum Lemah Bilangan Besar pada Teorema 3 menyatakan bahwa rata-rata sampel $\overline{X}$ merupakan estimator yang konsisten untuk μ. Pengertian kekonsistenan secara formal diberikan pada definisi berikut:

Definisi 4 *Misal* X *variabel acak dengan* cdf $F(x, \theta)$, $\theta \in \Omega$. *Misalkan pula* $X_1, \ldots, X_n$ *sampel dari distribusi* X. *Statistik* T_n *dikatakan* ***estimator konsisten*** *jika*

$$T_n \xrightarrow{p} \theta.$$

HUKUM BILANGAN BESAR

Contoh 4.2.1 (Kekonsistenan variansi sampel). Misal $X_1, \ldots, X_n$ sampel acak dari suatu distribusi dengan mean μ dan variansi σ^2. Pada Teorema 3 telah ditunjukkan bahwa $\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$. Untuk menunjukkan variansi sampel konvergen dalam peluang ke σ^2, perlu diasumsikan $E[X_1^4] < \infty$, sehingga $\mathrm{Var}(S) < \infty$. Variansi sampel dapat ditulis

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2\right).$$

Menurut Teorema 3,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{p} E[X_1^2] \qquad \text{dan} \qquad \overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

dan dari Sifat (4),

$$\overline{X}_n^2 \xrightarrow{p} \mu^2.$$

HUKUM BILANGAN BESAR

Akibatnya

$$\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2\right) \xrightarrow{p} 1.(E[X_1^2] = \mu^2) = \sigma^2$$

Jadi variansi sampel merupakan estimator konsisten untuk σ^2. ■

Teorema berikut menunjukkan bahwa suatu barisan peubah acak yang normal asimtotis konvergen dalam peluang ke rata-rata asimtotis.

Teorema 6.5 Jika $Z_n = \sqrt{n}(W_n - m)/c \xrightarrow{d} Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, maka $W_n \xrightarrow{p} m$.