Kuliah 4: Model-model Deret Waktu Stasioner

Koordinator Tim: I Wayan Sumarjaya (sumarjaya@unud.ac.id)
Anggota Tim Teaching I: I Gusti Ayu Made Srinadi (srinadi@unud.ac.id)
Anggota Tim Teaching II: Made Susilawati (mdsusilawati@unud.ac.id)

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah
Mahasiswa mampu membandingkan konsep proses stasioner dan nonstasioner (S5, KU1, KK1, PP1)

Kemampuan Akhir yang Diharapkan
Mahasiswa mampu membandingkan proses stasioner sebagai bagian dari proses linear dan mendemonstrasikan dengan perangkat lunak R (C4, P2, A2)

Indikator

1. Ketepatan membandingkan proses stasioner dan proses nonstasioner
2. Ketepatan membedakan masing-masing proses stasioner
3. Ketepatan menggunakan R untuk mensimulasikan proses stasioner
4. Ketepatan membedakan masing-masing proses stasioner dengan melihat sifat fungsi autokovarians dan autokorelasi

Bahan Kajian/Materi Ajar

1. Proses rerata bergerak (moving average),
2. Proses autoregresif (autoregressive)
3. Proses rerata bergerak autoregresif (autoregress-ive moving average).

Pada kuliah sebelumnya kita telah membahas konsep-konsep dasar proses stasioner. Kuliah ini membahas suatu kelas model deret waktu parametrik yang digunakan secara luas yaitu model rerata bergerak autoregresif (*autoregressive movingaverage*). Kuliah ini diadaptasi dari Cryer dan Chan (2010).

4.1 Proses-proses Linear Umum

Misalkan $\{X_t\}$ menyatakan deret waktu teramati dan $\{\varepsilon_t\}$ menyatakan deret derau putih (*white noise*) yang tidak teramati, yakni barisan peubah acak saling bebas, memiliki nilai tengah nol, dan berdistribusi identik. Pada pembahasan-pembahan selanjutnya, asumsi kebebasan (*independence*) dapat digantikan dengan asumsi yang lebih lemah, yaitu bahwa $\{\varepsilon_t\}$ adalah barisan peubah acak saling tidak berkorelasi.

Definisi 4.1.1. Suatu proses linear umum (*general linear process*) adalah proses yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear terbobot dari suku derau putih sekarang dan masa lalu yaitu

$$X_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots . \tag{4.1}$$

Jika ruas kanan pada persamaan (4.1) adalah deret tak berhingga, tentu kondisi tertentu harus diberikan pada bobot ψ sehingga secara matematika ekspresi tersebut berarti. Untuk itu cukup diasumsikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty. \tag{4.2}$$

Kita juga harus ingat bahwa $\{\varepsilon_t\}$ tidak teramati. Tanpa kehilangan sifat keberumuman kita dapat mengasumsikan bahwa koefisien ε_t adalah 1, demikian pula $\psi_0 = 1$.

Contoh 4.1.1. Salah satu contoh yang tidak sederhana adalah kasus pada saat ψ berbentuk barisan meluruh secara eksponensial, yaitu

$$\psi_j = \phi^j \tag{4.3}$$

dengan ϕ adalah bilangan yang berada antara -1 dan 1. Pada kasus ini kita mempunyai deret waktu

$$X_t = \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots . \tag{4.4}$$

Selanjutnya kita peroleh

$$\mathrm{E}(X_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots) = 0 \tag{4.5}$$

Demikian pula

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X_t) &= \mathrm{var}(\varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots) \\ &= \mathrm{var}(\varepsilon_t) + \phi^2 \mathrm{var}(\varepsilon_{t-1}) + \phi^4 \mathrm{var}(\varepsilon_{t-2}) + \cdots \\ &= \sigma_\varepsilon^2 (1 + \phi^2 + \phi^4 + \cdots) \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Kemudian kovarians

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X_t, X_{t-1}) &= \mathrm{cov}(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \cdots, \varepsilon_{t-1} + \phi\varepsilon_{t-2} + \phi^2\varepsilon_{t-3} + \cdots) \\
&= \mathrm{cov}(\phi\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \mathrm{cov}(\phi^2\varepsilon_{t-2}, \phi\varepsilon_{t-2}) + \cdots \\
&= \phi\sigma_\varepsilon^2 + \phi^3\sigma_\varepsilon^2 + \phi^5\sigma_\varepsilon^2 + \cdots \\
&= \phi\sigma_\varepsilon^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + \cdots) \\
&= \frac{\phi\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian diperoleh

$$\mathrm{cor}(X_t, X_{t-1}) = \frac{\dfrac{\phi\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}}{\dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}} = \phi. \qquad (4.8)$$

Dengan cara yang sama kita dapat menghitung

$$\mathrm{cov}(X_t, X_{t-h}) = \frac{\phi^h\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} \qquad (4.9)$$

dan

$$\mathrm{cor}(X_t, X_{t-1}) = \phi^h. \qquad (4.10)$$

Penting bagi kita untuk mengingat bahwa proses yang didefinisikan seperti ini adalah stasioner. Fungsi autokorelasi hanya bergantung pada beda kala waktu dan tidak tergantung pada waktu absolut.

Untuk proses linear $X_t = \varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + \cdots$ perhitungan serupa dengan contoh di atas menghasilkan

$$\mathrm{E}(X_t) = 0 \qquad (4.11)$$

$$\gamma(h) = \mathrm{cov}(X_t, X_{t-h}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i\psi_{i+h},\ h \geq 0 \qquad (4.12)$$

dengan $\psi_0 = 1$. Sebagai catatan proses dengan nilai tengah taknol μ dapat ditambahkan pada persamaan (4.1). Namun, mengingat nilai tengah tidak memengaruhi sifat-sifat kovarians dari proses, kita asumsikan nilai tengah nol sampai kita mulai mencocokkan (*fitting*) model pada data.

4.2 Proses Rerata Bergerak

Pada kasus berhingga bobot ψ taknol, kita memperoleh proses rerata bergerak (*moving average process*). Bentuk ini dapat dinyatakan sebagai

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}. \qquad (4.13)$$

Deret ini disebut rerata bergerak tingkat q dan disingkat MA (q). Catatan pada beberapa buku lain MA (q) dinyatakan sebagai

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}. \tag{4.14}$$

Istilah rerata bergerak berasal dari fakta bahwa X_t diperoleh dengan menerapkan bobot $1, -\theta_1, -\theta_2, \ldots, -\theta$ pada peubah $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_{t-q}$ dan menggerakkan bobot dan menerapkannya pada $\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots,$ untuk mendapatkan X_{t+1} dan seterusnya.

4.2.1 Proses Rerata Bergerak Tingkat Satu

Proses rerata bergerak tingkat satu dinyatakan sebagai $X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$. Catatan tika bawah 1 pada θ dapat kita hilangkan karena θ hanya satu. Pada proses ini $\mathrm{E}(X_t) = 0$ dan $\mathrm{var}(X_t) = \sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2)$. Kovarians dapat dihitung sebagai

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X_t, X_{t-1}) &= \mathrm{cov}(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2})\\ &= \mathrm{cov}(-\theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) = -\theta\sigma_\varepsilon^2\end{aligned} \tag{4.15}$$

dan

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X_t, X_{t-2}) &= \mathrm{cov}(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2} - \theta\varepsilon_{t-3})\\ &= 0\end{aligned} \tag{4.16}$$

karena tidak ada ε dengan tika bawah yang sama antara X_t dan X_{t-2}. Dengan cara yang sama $\mathrm{cov}(X_t, X_{t-h}) = 0$ untuk $h \geq 2$. Artinya proses ini tidak memiliki korelasi di luar beda kala 1. Jadi untuk model MA (1) dengan bentuk $X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ diperoleh

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_t) &= 0,\\ \gamma(0) &= \mathrm{var}(X_t) = \sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2),\\ \gamma(1) &= -\theta\sigma_\varepsilon^2,\\ \rho(1) &= -\theta/(1+\theta^2),\\ \gamma(h) = \rho(h) &= 0, \quad h \geq 2.\end{aligned} \tag{4.17}$$

4.2.2 Proses Rerata Bergerak Tingkat Dua

Proses rerata bergerak tingkat dua, MA(2) berbentuk:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} \tag{4.18}$$

Dengan cara serupa kita akan peroleh

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= \mathrm{var}(X_t) = \mathrm{var}(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2, && (4.19)\\
\gamma(1) &= \mathrm{cov}(X_t, X_{t-1})\\
&= \mathrm{cov}(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2} - \theta_2\varepsilon_{t-3})\\
&= \mathrm{cov}(-\theta_1\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \mathrm{cov}(-\theta_1\varepsilon_{t-2}, -\theta_2\varepsilon_{t-2})\\
&= [-\theta_1 + (-\theta_1)(-\theta_2)]\sigma_\varepsilon^2\\
&= (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_\varepsilon^2, && (4.20)\\
\gamma(2) &= \mathrm{cov}(X_t, X_{t-2}) = \mathrm{cov}(\varepsilon - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2} - \theta_1\varepsilon_{t-3} - \theta_2\varepsilon_{t-4})\\
&= \mathrm{cov}(-\theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2})\\
&= -\theta_2\sigma_\varepsilon^2. && (4.21)
\end{aligned}$$

Fungsi autokorelasi untuk MA(2) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\rho(1) &= \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, && (4.22)\\
\rho(2) &= \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, && (4.23)\\
\rho(h) &= 0, \quad |h| > 2. && (4.24)
\end{aligned}$$

4.2.3 Proses MA(q)

Secara umum untuk proses MA(q) berbentuk $X_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$ diperoleh

$$\gamma(0) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2 \tag{4.25}$$

dan

$$\rho(h) = \begin{cases} \dfrac{-\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + \theta_2\theta_{h+2} + \cdots + \theta_{q-h}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2} & \text{untuk } h = 1, 2, \ldots, q\\ 0, & \text{untuk } h > q. \end{cases} \tag{4.26}$$

4.3 Proses Autoregresif

Proses autoregresif secara harfiah berarti regresi pada dirinya sendiri. Proses autoregresif tingkat ke-p dari deret waktu $\{X_t\}$, disingkat AR(p), memenuhi persamaan

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t. \tag{4.27}$$

Diasumsikan ε_t saling bebas dengan $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots.$

4.3.1 Proses Autoregresif Tingkat Pertama

Pada subbagian ini kita akan membahas model autoregresif tingkat pertama berbentuk

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{4.28}$$

Deret ini adalah deret waktu stasioner dengan nilai tengah nol (buktikan!). Sekarang kita akan menghitung fungsi autokorelasi untuk proses AR ini. Ambil varians pada kedua sisi pada persamaan (4.28)

$$\gamma(0) = \phi^2 \gamma(0) + \sigma_\varepsilon^2. \tag{4.29}$$

Selanjutnya diperoleh

$$\gamma(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}. \tag{4.30}$$

Ingat bahwa untuk kondisi varians pada (4.30) $\phi^2 < 1$ atau $|\phi| < 1$. Sekarang perhatikan Persamaan (4.28). Kalikan kedua sisi dengan X_{t-h}, $h = 1, 2, \ldots$ dan hitung nilai harapan

$$\mathrm{E}(X_{t-h}X_t) = \phi \mathrm{E}(X_{t-h}X_{t-1}) + \mathrm{E}(\varepsilon_t X_{t-h}) \tag{4.31}$$

atau

$$\gamma(h) = \phi\gamma(h-1) + \mathrm{E}(\varepsilon_t X_{t-h}). \tag{4.32}$$

Karena deret dianggap stasioner dengan nilai tengah nol dan ε_t saling bebas dengan X_{t-h} diperoleh

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t X_{t-h}) = \mathrm{E}(\varepsilon_t)\mathrm{E}(X_{t-h}) = 0. \tag{4.33}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\gamma(h) = \phi\gamma(h-1), \quad \text{untuk}\, h = 1, 2, 3, \ldots . \tag{4.34}$$

Untuk $h = 1$ kita peroleh

$$\gamma(1) = \phi\gamma(0) = \phi\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}. \tag{4.35}$$

Untuk $h = 2$ kita peroleh

$$\gamma(2) = \phi^2\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}. \tag{4.36}$$

Nah, dengan mudah dapat kita lihat bahwa

$$\gamma(h) = \phi^h\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}. \tag{4.37}$$

Dengan demikian

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi^h, \quad \text{untuk}\, h = 1, 2, 3, \ldots . \tag{4.38}$$

Karena $|\phi| < 1$, nilai fungsi autokorelasi menurun secara eksponensial seiring dengan naiknya jumlah beda kala h. Jika $0 < \phi < 1$ semua autokorelasi bernilai positif. Sebaliknya, jika $-1 < \phi < 0$, beda kala pertama bernilai negatif, dan nilai autokorelasi berubah-ubah dari positif ke negatif dan seterusnya menurun secara ekponensial.

4.3.1.1 Proses Linear Umum Model AR(1)

Definisi rekursif AR(1) pada (4.28) dapat dinyatakan sebagai proses linear. Jika kita ganti t dengan $t-1$ kita memperoleh $X_{t-1} = \phi X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$. Mensubstitusikan pada (4.28) kita peroleh

$$\begin{aligned} X_t &= \phi(\phi X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2 X_{t-2}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Jika kita ulangi proses substitusi ini sampai sebanyak $h-1$ kali, kita akan peroleh

$$X_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \phi^{h-1}\varepsilon_{t-h+1} + \phi^h X_{t-h}. \tag{4.40}$$

Dengan mengasumsikan $|\phi| < 1$ dan membiarkan h naik tanpa batas, maka kita memperoleh representasi tak berhingga

$$X_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \phi^3\varepsilon_{t-3} + \cdots \tag{4.41}$$

Bentuk ini merupakan representasi proses linear dengan $\psi_j = \phi^j$. Kestasioneran proses AR(1) hanya terjadi jika dan hanya jika $|\phi| < 1$. Kondisi ini disebut kondisi kestasioneran (*stationarity condition*).

4.3.2 Proses Autoregresif Tingkat Kedua

Proses autoregresif tingkat kedua, disingkat AR(2) berbentuk

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \tag{4.42}$$

dan diasumsikan ε_t saling bebas dengan $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \ldots$. Untuk membahas kestationeran, kita akan menggunakan polinomial karakteristik AR berbentuk

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 \tag{4.43}$$

dan persamaan karakteristik AR

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0. \tag{4.44}$$

Persamaan kuadratik pada (4.44) memiliki dua akar (bisa juga bilangan kompleks). Akar-akar persamaan kuadratik ini adalah

$$\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}. \tag{4.45}$$

Selanjutnya, kondisi kestasioneran akan tercapai apabila akar-akar ini melebihi 1 dalam nilai mutlak. Hal ini akan terpenuhi jika dan hanya jika ketiga kondisi berikut terpenuhi:

$$\phi_1 + \phi_2 < 1, \quad \phi_2 - \phi_1 < 1, \quad \text{dan} \quad |\phi_2| < 1. \tag{4.46}$$

4.3.2.1 Fungsi Autokorelasi Proses AR(2)

Dengan cara serupa untuk model AR(1) diperoleh

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \phi_2 \gamma(h-2), \quad h = 1, 2, 3, \dots \tag{4.47}$$

dan

$$\rho(h) = \phi_1 \rho(h-1) + \phi_2 \rho(h-2), \quad h = 1, 2, 3, \dots \tag{4.48}$$

Persamaan (4.47) dan (4.48) disebut dengan persamaan Yule-Walker. Selanjutnya, dengan $h = 1$ dan menggunakan $\rho(0) = 1$ dan $\rho(-1) = \rho(1)$ kita peroleh $\rho(1) = \phi_1 + \phi_2 \rho(1)$, sehingga

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, \\ \rho(2) &= \frac{\phi_2(1-\phi_2) + \phi_1^2}{1-\phi_2}. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Bagaimana dengan varians model AR(2)? Dengan mengambil varians pada kedua sisi (4.42) diperoleh

$$\gamma(0) = (\phi_1^2 + \phi_2^2)\gamma(0) + 2\phi_1\phi_2\gamma(1) + \sigma_\varepsilon^2 \tag{4.50}$$

atau

$$\gamma(0) = \left(\frac{1-\phi_2}{1+\phi_2}\right) \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2}. \tag{4.51}$$

4.3.3 Proses Autoregresif Umum

Model autoregresif tingkat ke-p berbentuk

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \tag{4.52}$$

dengan polinomial karakteristik AR

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \cdots - \phi_p x^p \tag{4.53}$$

dan persamaan karakteristik

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \cdots - \phi_p x^p = 0. \tag{4.54}$$

Seperti pada pembahasan sebelumnya diasumsikan ε_t saling bebas dengan $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \dots$. Syarat perlu, bukan syarat cukup, agar stasioner adalah

$$\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p < 1 \tag{4.55}$$

dan $|\phi_p| < 1$. Dengan mengasumsikan kestasioneran dan nilai tengah 0, kalikan persamaan (4.52) dengan X_{t-h}, kemudian hitung nilai ekspektasinya, dan bagi dengan $\gamma(0)$ kita akan mendapatkan relasi rekursif berikut:

$$\rho(h) = \phi_1\rho(h-1) + \phi_2\rho(h-2) + \phi_3\rho(h-3) + \cdots + \phi_p\rho(h-p). \tag{4.56}$$

Selanjutnya untuk nilai $h = 1, 2, \ldots$ dan menggunakan fakta bahwa $\rho(0) = 1$ dan $\rho(-h) = \rho(h)$ kita akan mendapatkan persamaan umum Yule-Walker sebagai berikut

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \phi_1 + \phi_2\rho(1) + \phi_3\rho(2) + \cdots + \phi_p\rho(p-1) \\ \rho(2) &= \phi_1\rho(1) + \phi_2 + \phi_3\rho(1) + \cdots + \phi_p\rho(p-2) \\ &\vdots \\ \rho(p) &= \phi_1\rho(p-1) + \phi_2\rho(p-2) + \phi_3\rho(p-3) + \cdots + \rho(p) \end{aligned} \tag{4.57}$$

Apabila nilai-nilai $\phi_1, \ldots, \phi_p$ diketahui, persamaan linear di atas dapat diselesaikan untuk mendapatkan nilai numerik $\rho(1), \ldots, \rho(p)$. Mengingat bahwa

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t X_t) = \mathrm{E}[\varepsilon_t(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t)] = \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2. \tag{4.58}$$

Selanjutnya kalau kita kalikan persamaan (4.52) dengan X_t kita akan peroleh

$$\gamma(0) = \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \cdots + \phi_p\gamma(p) + \sigma_\varepsilon^2. \tag{4.59}$$

Kemudian menggunakan sifat $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$, diperoleh

$$\gamma(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1\rho(1) - \phi_2\rho(2) - \cdots - \phi_p\rho(p)}. \tag{4.60}$$

4.4 Proses ARMA

Jika kita asumsikan deret waktu sebagian autoregresif dan sebagian lagi rerata bergerak, maka kita peroleh model deret waktu berbentuk

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}. \tag{4.61}$$

Dalam hal ini dikatakan bahwa $\{X_t\}$ adalah proses rerata bergerak autoregresif (*autoregressive moving average*) dengan tingkat (*order*) p dan q. Proses ini dituliskan sebagai ARMA(p, q).

4.4.1 Proses ARMA$(1, 1)$

Model ARMA(1, 1) dapat dituliskan sebagai

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}. \tag{4.62}$$

Untuk mendapatkan persamaan tipe Yule-Walker, kita hitung

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t X_t) = \mathrm{E}[\varepsilon_t(\phi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})] = \sigma_\varepsilon^2 \tag{4.63}$$

$$\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} X_t) = \mathrm{E}[\varepsilon_{t-1}(\phi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})] = \phi\sigma_\varepsilon^2 - \theta\sigma_\varepsilon^2 = (\phi - \theta)\sigma_\varepsilon^2. \tag{4.64}$$

Kemudian kalikan persamaan (4.62) dengan X_{t-h} dan ambil nilai harapannya sehingga diperoleh

$$\gamma(0) = \phi\gamma(1) + [1 - \theta(\phi - \theta)]\sigma_\varepsilon^2, \tag{4.65}$$

$$\gamma(1) = \phi\gamma(0) - \theta\sigma_\varepsilon^2, \tag{4.66}$$

$$\gamma(h) = \phi\gamma(h-1), \quad \text{untuk}\, h \geq 2. \tag{4.67}$$

Setelah menyelesaikan dua persamaan pertama diperoleh

$$\gamma(0) = \frac{(1 - 2\phi\theta + \theta^2)}{1 - \phi^2}\sigma_\varepsilon^2 \tag{4.68}$$

dan menyelesaikan persamaan rekursif tersebut diperoleh

$$\rho(h) = \frac{(1 - \theta\phi)(\phi - \theta)}{1 - 2\theta\phi + \theta^2}\phi^{h-1}, \quad \text{untuk}\, h \geq 1. \tag{4.69}$$

Bentuk proses linear umum model ARMA(1, 1) dapat dinyatakan sebagai

$$X_t = \varepsilon_t + (\phi - \theta)\sum_{j=1}^{\infty}\phi^{j-1}\varepsilon_{t-j} = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j}, \quad \text{untuk}\, j \geq 1. \tag{4.70}$$

Untuk proses ARMA(p, q) dengan asumsi bahwa ε_t saling bebas dengan $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \ldots$ solusi stasioner akan ada jika dan hanya jika semua akar dari persamaan karakteristik AR $\phi(x) = 0$ lebih dari satu dalam modulus.

4.5 Keterbalikan

Kita telah melihat bahwa proses MA (1) memiliki fungsi autokorelasi yang sama jika θ diganti dengan $1/\theta$. Hal serupa juga terjadi untuk MA(2). Ketidaktunggalan (*lack of uniqueness*) MA harus diatasi sebelum mengambil simpulan tentang nilai-nilai parameter dari deret waktu amatan (kenapa?). Tampaknya ketidaktunggalan ini berhubungan dengan pertanyaan berikut. Suatu proses autoregresif selalu dapat dinyatakan sebagai proses linear umum melalui koefisien ψ sehingga suatu proses AR dapat pula dianggap sebagai proses rerata bergerak dengan tingkat tak berhingga (*infinite order*). Dapatkah proses rata-rata bergerak dinyakan sebagai proses autoregresif? Sebagai contoh proses MA(1) dengan bentuk:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}. \tag{4.71}$$

Selanjutnya, tulis $\varepsilon_t = X_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ kemudian ganti t dengan $t-1$ dan substitusi ε_{t-1} kita akan peroleh

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= X_t + \theta(X_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) \\ &= X_t + \theta X_{t-1} + \theta^2\varepsilon_{t-2}.\end{aligned} \tag{4.72}$$

Jika $|\theta| < 1$ dan kita lanjutkan proses substitusi ini sampai tak berhingga, kita peroleh

$$\varepsilon_t = X_t + \theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} + \cdots \tag{4.73}$$

atau

$$X_t = (-\theta X_{t-1} - \theta^2 X_{t-2} - \theta^3 X_{t-3} - \cdots) + \varepsilon_t. \tag{4.74}$$

Jika $|\theta| < 1$, kita lihat bahwa model MA(1) dapat dibalik menjadi model autoregresif dengan tingkat tak berhingga. Kita katakan bahwa model MA(1) dapat dibalik (*invertible*) jika dan hanya jika $|\theta| < 1$.

Untuk proses MA(q) umum, didefinisikan polinom karakteristik MA sebagai

$$\theta(x) = 1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \theta_3 x^3 - \cdots - \theta_q x^q \tag{4.75}$$

dan persamaan karakteristik MA sebagai

$$1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \theta_3 x^3 - \cdots - \theta_q x^q = 0. \tag{4.76}$$

Model MA (q) dikatakan terbalikkan jika terdapat koefisien π_j sedemikian hingga

$$X_t = \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \pi_3 X_{t-3} + \cdots + \varepsilon_t \tag{4.77}$$

jika dan hanya jika akar-akar karakteristika MA lebih dari 1 dalam modulus. Misalkan terdapat proses MA(1) dengan bentuk $X_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1}$ dan $X_t = \varepsilon_t + \frac{1}{2}\varepsilon_t$. Dalam hal sifat keterbalikan manakah di antara kedua proses MA(1) tersebut yang terbalikkan?

4.6 Pengayaan

Buku-buku seperti Cryer and Chan (2008), Shumway and Stoffer (2011), Brockwell and Davis (2016), dan Box et al. (2016) dapat digunakan untuk pengayaan lebih lanjut.

4.7 Latihan

1. Hitunglah fungsi autokorelasi dari proses stasioner yang didefinisikan oleh
$$X_t = 5 + \varepsilon_t - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \tfrac{1}{4}\varepsilon_{t-2}$$
2. Sketsalah fungsi autokorelasi untuk model MA(2) dengan parameter
   (a) $\theta_1 = 1{,}2$ dan $\theta_2 = -0{,}7$
   (b) $\theta_1 = -1$ dan $\theta_2 = -0{,}6$
3. Tunjukkan bahwa pada saat θ diganti $1/\theta$ fungsi autokorelasi untuk MA(1) tidak berubah.
4. Misalkan $\{X_t\}$ adalah proses AR(1) dengan $-1 < \phi < 1$.
   (a) Hitunglah fungsi autokovarians untuk $W_t = \Delta X_t = X_t - X_{t-1}$.
   (b) Buktikan bahwa $\mathrm{var}(W_t) = 2\sigma_\varepsilon^2/(1+\phi)$.
5. Deskripsikan karakteristik-karakteristik penting dari fungsi autokorelasi proses-proses berikut:
   (a) MA(1)
   (b) MA(2)
   (c) AR(1)
   (d) AR(2)
   (e) ARMA(1, 1)
6. Misalkan model ARMA(1, 2) dengan bentuk $X_t = 0{,}8X_{t-1} + \varepsilon_t + 0{,}7\varepsilon_{t-1} + 0{,}6\varepsilon_{t-2}$. Tunjukkan bahwa
   (a) $\rho(h) = 0{,}8\rho(h-1)$ untuk $h > 2$
   (b) $\rho(2) = 0{,}8\rho(1) + 0{,}6\sigma_\varepsilon^2/\gamma(0)$
7. Misalkan model MA(2), yang satu memiliki parameter $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{6}$ dan yang lainnya memiliki parameter $\theta_1 = -1$ dan $\theta_2 = 6$.
8. Misalkan model AR(1) dengan bentuk $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$. Tunjukkan bahwa jika $|\phi| = 1$ proses tidak bisa stasioner.
9. Misalkan $\{X_t\}$ adalah proses AR(1) dengan $\rho(1) = \phi$. Definisikan barisan $\{b_t\} = X_t - \phi X_{t+1}$
   (a) Tunjukkan bahwa $\mathrm{cov}(b_t, b_{t-h}) = 0$ untuk semua t dan h.
   (b) Tunjukkan bahwa $\mathrm{cov}(b_t, X_{t+h}) = 0$ untuk semua t dan $h > 0$.

Daftar Pustaka

George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins, Gregory C. Reinsel, and Greta M. Ljung. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. John Wiley & Sons, Inc.,, Hoboken, New Jersey, fifth edition, 2016.

Peter J. Brockwell and Richard A. Davis. *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer, New York, third edition, 2016.

Jonathan D Cryer and Kung-Sik Chan. *Time Series Analysis with Applications in R*. Springer, New York, second edition, 2008.

Robert H. Shumway and David S. Stoffer. *Time Series Analysis and Its Applications with R Examples*. Springer, New York, 2011.