MA637430 Analisis Deret Waktu | **Universitas Udayana**
Semester Ganjil 2018/2019 | **Program Studi Matematika**

Kuliah 5: Model-model Deret Waktu Nonstasioner

Koordinator Tim: I Wayan Sumarjaya (sumarjaya@unud.ac.id)
Anggota Tim Teaching I: I Gusti Ayu Made Srinadi (srinadi@unud.ac.id)
Anggota Tim Teaching II: Made Susilawati (mdsusilawati@unud.ac.id)

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah
Mampu memisahkan antara proses stasioner dan proses nonstasioner (S5, S9, KU1, KU2, KU9, KK1, KK2, PP1)

Kemampuan Akhir yang Diharapkan
Mahasiswa mampu memisahkan antara proses stasioner ARMA dan proses nonstasioner ARIMA dan mendemonstrasikan dengan perangkat lunak R (C4, P2, A2)

Indikator

1. Ketepatan membandingkan fungsi autokorelasi dan autokovarians proses nonstasioner
2. Ketepatan menggunakan R untuk mensimulasikan proses nonstasioner ARMA

Bahan Kajian/Materi Ajar

1. Fungsi autokovarians model ARIMA
2. Fungsi autokorelasi model ARIMA

Materi pada bab ini diadaptasi dari Cryer and Chan (2008).

Deret waktu $\{X_t\}$ dikatakan mengikuti model rerata bergerak terintegrasi autoregresif (*autoregressive integrated moving average*) jika beda (*difference*) ke-d $W_t = \nabla^d X_t$ adalah proses ARMA stasioner. Dengan kata lain, jika W_t mengikuti model ARMA(p,q), maka kita katakan $\{X_t\}$ adalah proses ARIMA(p,d,q). Pada praktiknya, biasanya dipilih $d = 1$ atau paling banyak $d = 2$.

5.1 Model ARIMA$(p, 1, q)$

Contoh 5.1.1. Misalkan proses ARIMA$(p, 1, q)$ dengan $W_t = X_t - X_{t-1}$. Selanjutnya kita akan peroleh

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \cdots + \phi_p W_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{5.1}$$

atau dalam deret amatan

$$\begin{aligned} X_t - X_{t-1} = {} & \phi_1(X_{t-1} - X_{t-2}) + \phi_2(X_{t-2} - X_{t-3}) + \cdots + \phi_p(X_{t-p} - X_{t-p-1}) + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \\ & - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \end{aligned} \tag{5.2}$$

yang dapat pula dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} X_t = {} & (1 + \phi_1) X_{t-1} + (\phi_2 - \phi_1) X_{t-2} + \cdots + (\phi_p - \phi_{p-1}) X_{t-p} - \phi_p X_{t-p-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \\ & - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Bentuk ARIMA pada persamaan (5.3) dikatakan bentuk persamaan beda (*difference equation model*). Model ini tampak seperti ARMA$(p + 1, q)$. Namun, persamaan karakteristiknya memenuhi

$$1 - (1 + \phi_1)x - (\phi_2 - \phi_1)x^2 - \cdots - (\phi_p - \phi_{p-1})x^p + \phi_p x^{p+1} = (1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \cdots - \phi_p x^p)(1 - x). \tag{5.4}$$

Faktorisasi ini menunjukkan akar pada $x = 1$ yang mengimplikasikan ketakstasioneran. Akar sisanya menunjukkan akar dari polinom karakteristik proses ARMA stasioner ∇X_t.

Mengingat proses nonstationer tidak berada dalam ekuilibrium statistika, kita tidak dapat mengasumsikan bahwa proses tersebut pergi ke masa lalu secara tak terbatas atau bahwa proses tersebut mulai pada saat $t = -\infty$. Namun, kita bisa mengasumsikan bahwa proses ini mulai pada saat $t = -m$, katakanlah, $-m$ lebih awal dibandingkan waktu $t = 1$, pada saat kita mengamati deret pertama kali. Misalkan kita ambil $X_t = 0$ untuk $t < -m$. Persamaan beda $X_t - X_{t-1} = W_t$ dapat diselesaikan dengan menjumlahkan kedua sisi dari $t = -m$ ke $t = t$ untuk mendapatkan representasi

$$X_t = \sum_{j=-m}^{t} W_j \tag{5.5}$$

untuk proses ARIMA$(p, 1, q)$. Untuk proses ARIMA$(p, 2, q)$ dapat dilakukan dengan menjumlahkan dua kali untuk mendapatkan

$$X_t = \sum_{j=-m}^{t} \sum_{i=-m}^{j} W_i = \sum_{j=0}^{t+m} (j + 1) W_{t-j}. \tag{5.6}$$

Jika proses tidak berisi komponen autoregresif, maka model ARIMA dikatakan rerata bergerak terintegrasi (*integrated moving average*) dan disingkat IMA(d, q). Demikian pula, apabila model ARIMA tidak berisi komponen rerata bergerak, maka model dikatakan terintegrasi autoregresif (*integrated autoregressive*) disingkat ARI(p, d).

5.2 Model IMA$(1, 1)$

Model IMA$(1, 1)$ merupakan model yang sering dipakai dalam ekonomi dan bisnis. Bentuk persamaan beda model ini adalah

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_{t-1}. \tag{5.7}$$

Untuk menuliskan X_t secara eksplisit sebagai fungsi nilai derau masa kini dan masa lalu kita dapat menggunakan persamaan (5.5) dan fakta bahwa $W_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$. Lebih lanjut kita peroleh

$$X_t = \varepsilon_t + (1-\theta)\varepsilon_{t-1} + (1-\theta)\varepsilon_{t-2} + \cdots + (1-\theta)\varepsilon_{-m} - \theta\varepsilon_{-m-1}. \tag{5.8}$$

Model ini, berbeda halnya dengan model ARMA stasioner, bobot pada suku derau putih (*white noise*) tidak meluruh sebagaimana kita melihat masa lalu.

5.3 Model ARI$(1, 1)$

Proses ARI$(1, 1)$ memenuhi

$$X_t - X_{t-1} = \phi(X_{t-1} - X_{t-2}) + \varepsilon_t \tag{5.9}$$

atau

$$X_t = (1+\phi)X_{t-1} - \phi X_{t-2} + \varepsilon_t \tag{5.10}$$

dengan $|\phi| < 1$.

5.4 Model ARIMA dengan Konstanta

Asumsi standar dalam model ARIMA adalah bahwa model tersebut stasioner dengan nilai tengah (*mean*) nol. Jika ternyata nilai tengahnya tidak nol, katakanlah μ dapat diasumsikan bahwa

$$W_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \phi_2(W_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p(W_{t-p} - \mu) + \varepsilon - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta\varepsilon_{t-q} \tag{5.11}$$

atau

$$W_t = \theta_0 + \phi_1 W_{t-1} + \cdots + \phi_p W_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}. \tag{5.12}$$

Mengambil ekspektasi kedua sisi pada persamaan (5.12) diperoleh

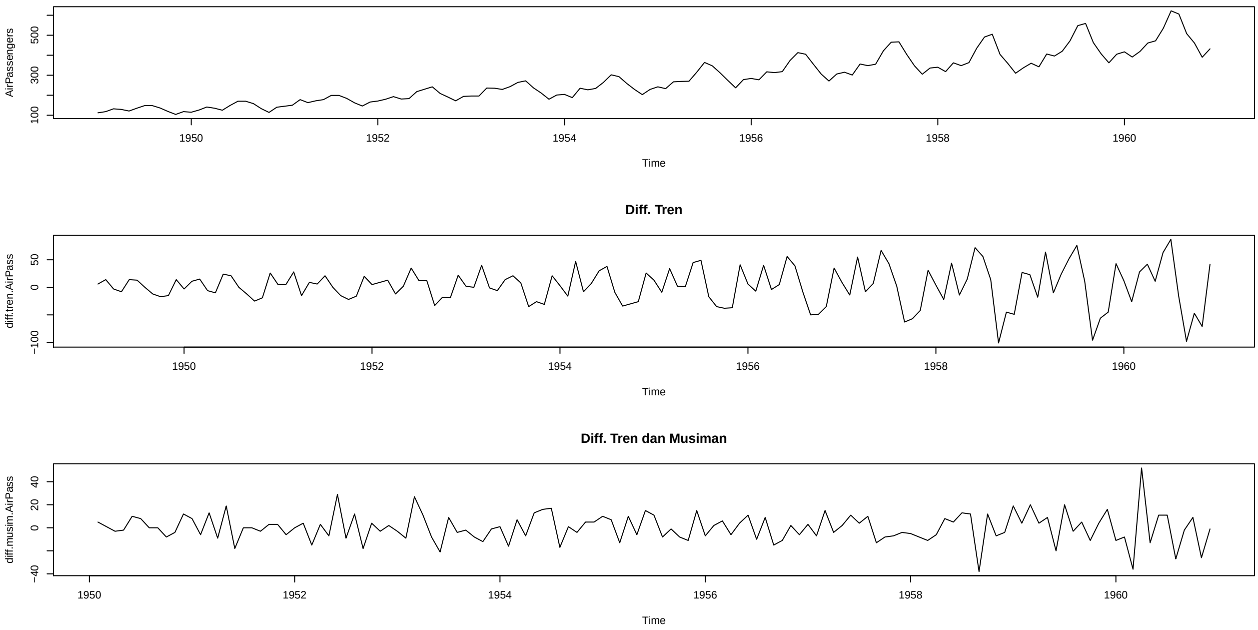
$$\mu = \theta_0 + (\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p)\mu \tag{5.13}$$

atau

$$\mu = \frac{\theta_0}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p} \tag{5.14}$$

atau

$$\theta_0 = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p). \tag{5.15}$$



5.5 Transformasi Data

Pembedaan (*differencing*) merupakan salah satu cara untuk menstasionerkan data. Untuk data yang mengandung tren, maka *differencing* dilakukan terhadap tren. Jika data mengandung tren dan musiman maka *differencing* dilakukan terhadap tren dan musiman.

Contoh 5.5.1. Kita akan melakukan *differencing* terhadap tren dan kemudian musiman pada data `AirPassengers`.

```
> diff.tren.AirPass <- diff(AirPassengers,lag=1)
> diff.musim.AirPass <- diff(diff.tren.AirPass,lag=12)
> par(mfrow=c(3,1))
> plot(AirPassengers)
> plot(diff.tren.AirPass,main="Diff. Tren")
> plot(diff.musim.AirPass,main="Diff. Tren dan Musiman")
```

Alternatif lain untuk menstasionerkan data adalah dengan transformasi pangkat (*power transformation*) Box-Cox yang berbentuk

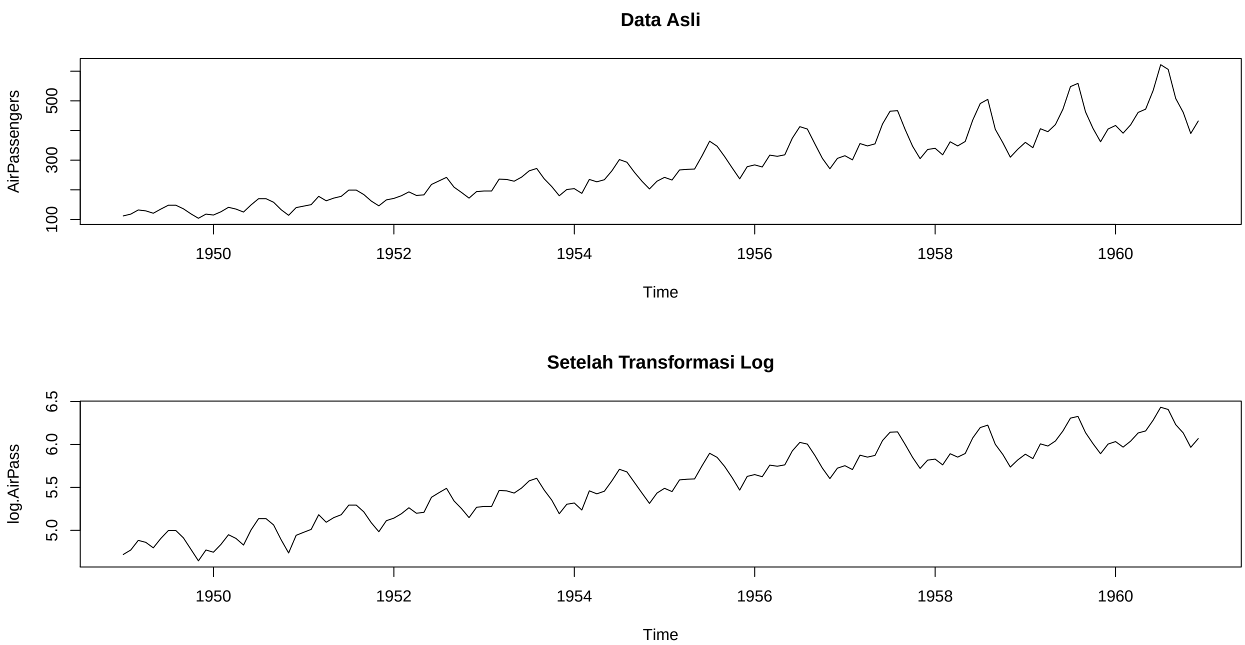
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^\lambda - 1}{\lambda}, & \text{untuk } \lambda \neq 0, \\ \log(x), & \text{untuk } \lambda = 0. \end{cases} \tag{5.16}$$

Suku x^λ merupakan bagian penting pada transformasi di atas. Selanjutnya mengurangkan 1 dan membagi dengan λ akan membuat $g(x)$ berubah secara pelan-pelan sebagaimana λ mendekati nol. Sebagai catatan nilai $\lambda = \frac{1}{2}$ berarti transformasi akar kuadrat untuk data dan $\lambda = -1$ berarti transformasi kebalikan. Transformasi pangkat ini hanya berlaku untuk data positif. Jika beberapa nilai data adalah nol atau negatif, konstanta positif bisa ditambahkan kepada semua nilai data agar membuat data menjadi positif sebelum akhirnya ditransformasi.

Contoh 5.5.2. Sebagai contoh kita akan melihat apakah data `AirPassengers` perlu ditransformasi. Untuk itu kita akan melihat nilai λ yang sesuai menggunakan library `forecast`.

```
> library(forecast)
> lambda.AirPass.1 <- BoxCox.lambda(AirPassengers,lower=-2,upper=2)
> lambda.AirPass.1
[1] -0.2947127
```

Diperoleh nilai $\lambda = -0{,}294127 \approx 0$, sehingga kita akan pilih transformasi logaritma untuk data. Perhatikan Gambar 5.1



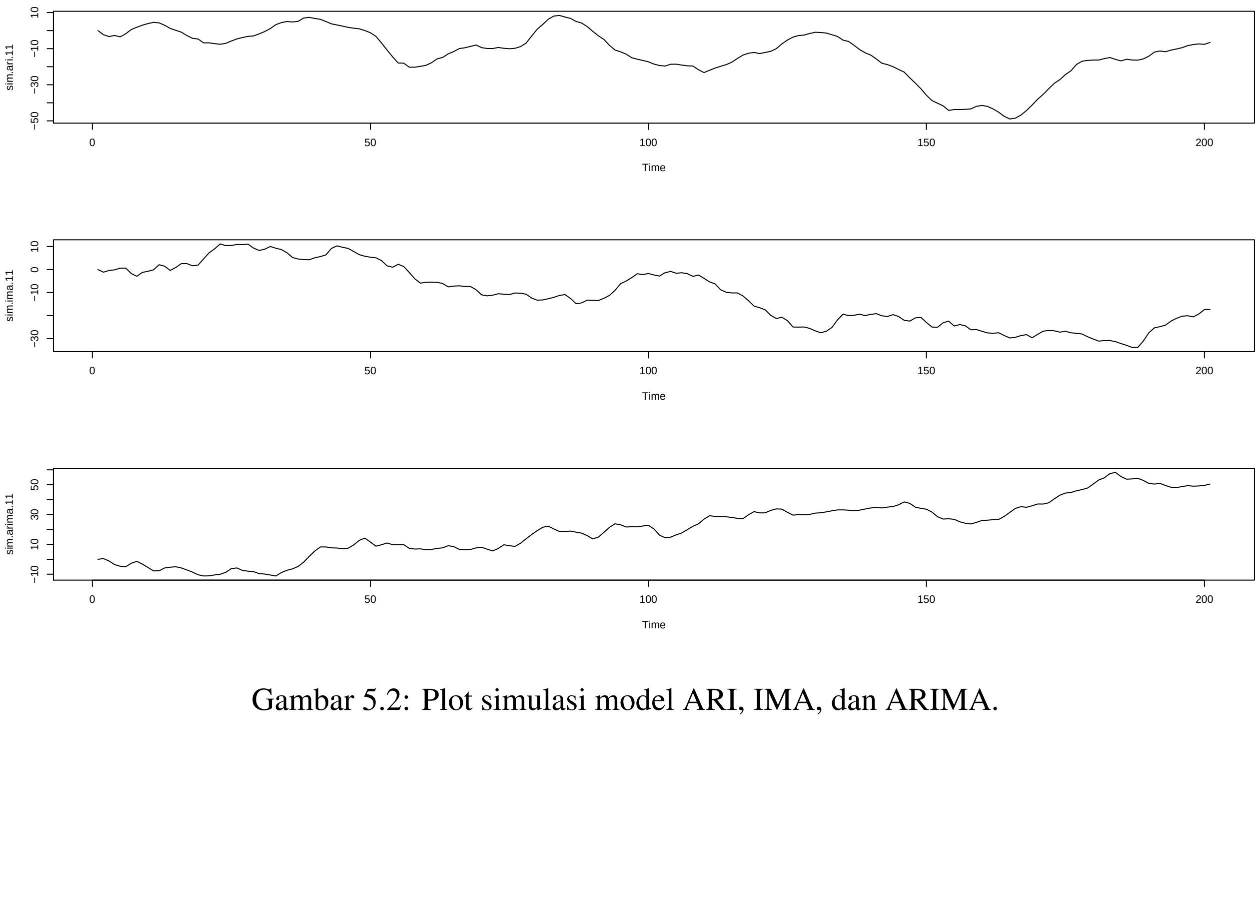
Gambar 5.1: Plot data AirPassengers dan transformasi log terhadap AirPassengers.

5.6 Simulasi Model ARIMA

Simulasi ARMA dan ARIMA dapat dilakukan dengan perintah `arima.sim`.

Contoh 5.6.1. Berikut ini kita akan mensimulasikan model ARI$(1, 1)$, IMA$(1, 1)$, dan ARIMA$(1, 1, 1)$ dengan realisasi sebanyak $n = 200$. Parameter untuk masing-masing model ARIMA adalah sebagai berikut: untuk ARI$(1, 1)$ parameter $\phi = 0{,}8$; untuk IMA$(1, 1)$ parameter $\theta = 0{,}8$, dan untuk ARIMA$(1, 1, 1)$ parameter $\phi = 0{,}2$ dan $\theta = 0{,}8$.

```
> sim.ari.11 <- arima.sim(list(order=c(1,1,0),ar=0.8),n=200)
> plot(sim.ari.11)
> sim.ima.11 <- arima.sim(list(order=c(0,1,1),ma=0.8),n=200)
> plot(sim.ima.11)
> sim.arima.11 <- arima.sim(list(order=c(1,1,1),ar=0.2,ma=0.8),n=200)
> plot(sim.arima.11)
```



Gambar 5.2: Plot simulasi model ARI, IMA, dan ARIMA.

5.7 Pengayaan

Buku-buku seperti Cryer and Chan (2008), Shumway and Stoffer (2011), Brockwell and Davis (2016), dan Box et al. (2016) dapat digunakan untuk pengayaan lebih lanjut.

5.8 Latihan

1. Identifikasi model ARIMA berikut. Dengan kata lain tentukan berapakah nilai p, d, q dan berapa nilai masing-masing parameter.

   (a) $X_t = X_{t-1} - 0{,}25X_{t-2} + \varepsilon_t - 0{,}1\varepsilon_{t-1}$.

   (b) $X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + \varepsilon_t$.

2. Untuk masing-masing model ARIMA berikut hitunglah nilai $\mathrm{E}(\nabla X_t)$ dan $\mathrm{var}(\nabla X_t)$

   (a) $X_t = 3 + X_{t-1} + \varepsilon_t - 0{,}7\varepsilon_{t-1}$.

   (b) $X_t = 10 + 1{,}25X_{t-1} - 0{,}25X_{t-2} + \varepsilon_t - 0{,}1\varepsilon_{t-1}$.

   (c) $X_t = 5 + 2X_{t-1} - 1{,}7X_{t-2} + 0{,}7X_{t-3} + \varepsilon_t - 0,5\varepsilon_{t-1} + 0{,}25\varepsilon_{t-2}$.

3. Misalkan $\{X_t\}$ adalah deret yang dibangkitkan dari deret $X_t = \varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_{t-2} + c\varepsilon_{t-3} + \cdots + c\varepsilon_0$ untuk $t > 0$.

   (a) Hitung nilai tengah dan kovarians fungsi $\{X_t\}$. Apakah $\{X_t\}$ stasioner?

   (b) Hitung nilai tengah dan kovarians fungsi $\{\nabla X_t\}$. Apakah $\{\nabla X_t\}$ stasioner?

4. Lihat kembali Latihan pada materi pertemuan kedua. Untuk semua data amatilah apakah perlu dilakukan *differencing* untuk menstasionerkan data (baik tren maupun musiman)? Apakah perlu transformasi untuk menstasionerkan data?

5. Gunakan kalkulus untuk menunjukkan bahwa untuk setiap $x > 0$ dan sebagaimana $\lambda \to 0$ maka $(x^\lambda - 1)/\lambda \to \log x$.

Daftar Pustaka

George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins, Gregory C. Reinsel, and Greta M. Ljung. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. John Wiley & Sons, Inc.,, Hoboken, New Jersey, fifth edition, 2016.

Peter J. Brockwell and Richard A. Davis. *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer, New York, third edition, 2016.

Jonathan D Cryer and Kung-Sik Chan. *Time Series Analysis with Applications in R*. Springer, New York, second edition, 2008.

Robert H. Shumway and David S. Stoffer. *Time Series Analysis and Its Applications with R Examples*. Springer, New York, 2011.