MA637430 Analisis Deret Waktu | **Universitas Udayana**
Semester Ganjil 2018/2019 | **Program Studi Matematika**

Kuliah 8: Jawaban Soal Ujian Tengah Semester

1. Jika X dan Y saling takbebas tetapi $\text{var}(X) = \text{var}(Y)$ hitunglah $\text{cov}(X + Y, X - Y)$.
   Penyelesaian:

   $$\text{cov}(X+Y, X-Y) = \text{cov}(X, X) - \text{cov}(Y, Y) + \text{cov}(X, Y) - \text{cov}(Y, X) = \text{var}(X) - \text{var}(Y) = 0.$$

2. Jika $Y = a + bX$ tunjukkan bahwa $\text{cor}(X, Y) = \pm 1$.
   Penyelesaian:
   Kita tahu bahwa $\text{var}(Y) = b^2\text{var}(X)$, $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, a + bX) = b\text{var}(X)$, sehingga

   $$\begin{aligned} \text{cor}(X, Y) &= \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)}\sqrt{\text{var}(Y)}} \\ &= \frac{b\text{var}(X)}{\sqrt{\text{var}(X)}\sqrt{b^2\text{var}(X)}} \\ &= \frac{b\text{var}(X)}{b\text{var}(X)} \end{aligned}$$

   Catatan penyebut tidak akan pernah bernilai negatif atau nol. Dengan kata lain, $\text{var}(X) > 0$, dengan demikin $b\text{var}(X) > 0$. Jadi tanda $\pm$ diakibatkan oleh nilai $\text{cov}(X, Y)$.

3. Misalkan $\{X_t\}$ adalah deret waktu stasioner dan definisikan

   $$Y_t = \begin{cases} X_t, & \text{untuk } t \text{ ganjil}, \\ X_t + 3, & \text{untuk } t \text{ genap}. \end{cases}$$

   (a) Tunjukkan bahwa $\text{cov}(Y_t, Y_{t-h})$ adalah bebas dari t untuk semua beda kala (*lag*) h.
   Penyelesaian:

   $$\text{cov}(Y_t, Y_{t-h}) = \text{cov}(X_t + 3, X_{t-h} + 3) = \text{cov}(X_t, X_{t-h})$$

   yang bebas dari t karena $\{X_t\}$ stasioner.

   (b) Apakah $\{Y_t\}$ stasioner?
   Penyelesaian:
   Untuk t ganjil $\text{E}(Y_t) = \text{E}(X_t) = \mu_X$, tetapi untuk t genap $\text{E}(Y_t) = \text{E}(X_t + 3) = \mu_X + 3$. Jadi Y_t tidak stasioner.

4. Misalkan $X_1 = \theta_0 + \varepsilon_1$ dan untuk $t > 1$ definisikan X_t secara rekursif dengan $X_t = \theta_0 + X_{t-1} + \varepsilon_t$ dengan θ_0 adalah konstanta. Proses $\{X_t\}$ disebut langkah acak dengan hanyutan (*random walk with drift*).

   (a) Tunjukkan bahwa X_t dapat ditulis sebagai $X_t = t\theta_0 + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \cdots + \varepsilon_1$.
   Penyelesaian:
   Substitusikan $X_{t-1} = \theta_0 + Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$ ke $X_t = \theta_0 + X_{t-1} + \varepsilon_t$ dan lakukan secara rekursif.

   (b) Hitung fungsi nilai tengah X_t.

   $$\mathrm{E}(Y_t) = \mathrm{E}(X_t) = \mathrm{E}(t\theta_0 + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \cdots + \varepsilon_1) = t\theta_0.$$

   (c) Hitung fungsi autokovarians untuk X_t.
   Penyelesaian:

   $$\begin{aligned}
   \mathrm{cov}(X_t, X_{t-h}) &= \mathrm{cov}[t\theta_0 + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \cdots + \varepsilon_1, (t-h)\theta_0 + \varepsilon_{t-h} + \varepsilon_{t-1-h} + \cdots + \varepsilon_1] \\
   &= \mathrm{cov}[\varepsilon_{t-h} + \varepsilon_{t-1-h} + \cdots + \varepsilon_1, \varepsilon_{t-h} + \varepsilon_{t-1-h} + \cdots + \varepsilon_1] \\
   &= \mathrm{var}(\varepsilon_{t-h} + \varepsilon_{t-1-h} + \cdots + \varepsilon_1) \\
   &= (t-h)\sigma_\varepsilon^2.
   \end{aligned}$$

5. Misalkan terdapat dua proses MA(2), yang satu dengan $\theta_1 = \theta_2 = 1/6$ dan yang lain $\theta_1 = -1$ dan $\theta_2 = 6$.

   (a) Tunjukkan bahwa kedua proses tersebut memiliki fungsi autokorelasi yang sama.
   Penyelesaian:
   Fungsi autokorelasi untuk proses MA(2) adalah

   $$\begin{aligned}
   \rho_1 &= \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \\
   \rho_2 &= \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \\
   \rho_h &= 0, \quad \text{untuk} \quad h = 3, 4, \ldots .
   \end{aligned}$$

   Untuk $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{6}$:

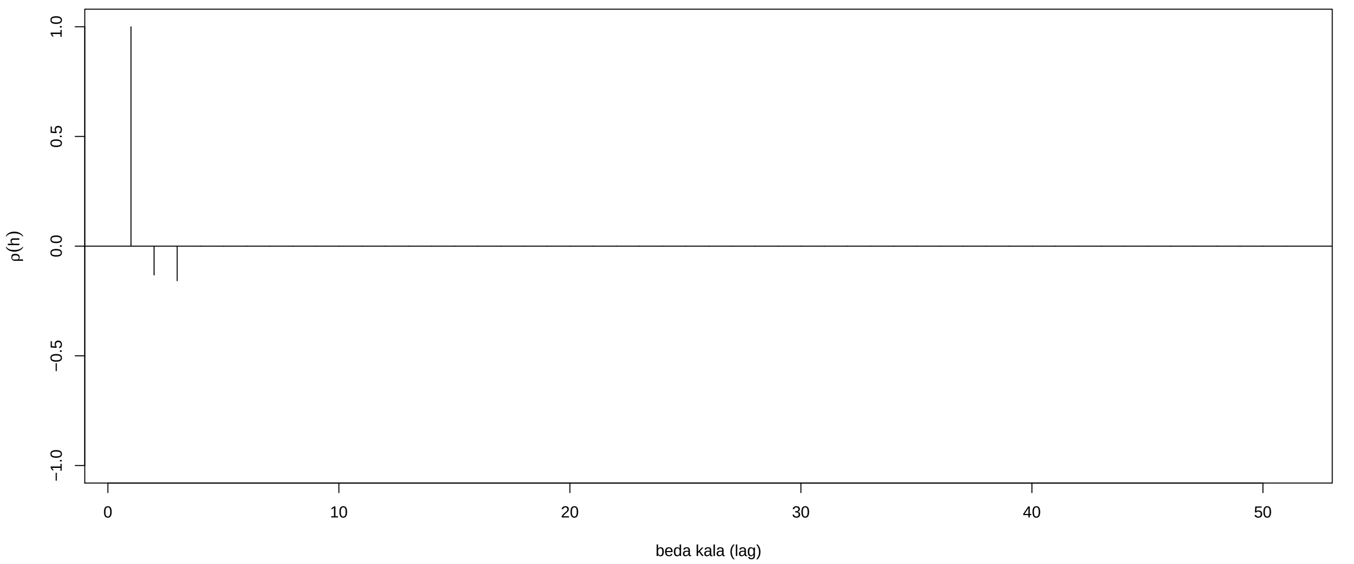
   $$\begin{aligned}
   \rho_1 &= \frac{-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\frac{1}{6}}{1 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = -\tfrac{5}{38}, \\
   \rho_2 &= \frac{-\frac{1}{6}}{1 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = -\tfrac{3}{19}, \\
   \rho_h &= 0, \quad \text{untuk} \quad h = 3, 4, \ldots .
   \end{aligned}$$

Untuk $\theta_1 = -1$ dan $\theta_2 = 6$:

$$\rho_1 = \frac{1-6}{1+1+6^2} = -\tfrac{5}{38},$$
$$\rho_2 = \frac{-6}{1+1+6^2} = -\tfrac{3}{19},$$
$$\rho_h = 0, \quad \text{untuk} \quad h = 3, 4, \ldots .$$

(b) Plot fungsi autokorelasi untuk kedua proses MA.

```
> ## Fungsi autokorelasi teoretis MA(2)
> plot(ARMAacf(ma=c(1/6,1/6),lag.max=50),ylim=c(-1,1),type="h",xlab="beda
(lag)",ylab=expression(rho(h)))
> abline(h=0)
> plot(ARMAacf(ma=c(1,-6),lag.max=50),ylim=c(-1,1),type="h",xlab="beda kal
(lag)",ylab=expression(rho(h)))
> abline(h=0)
```

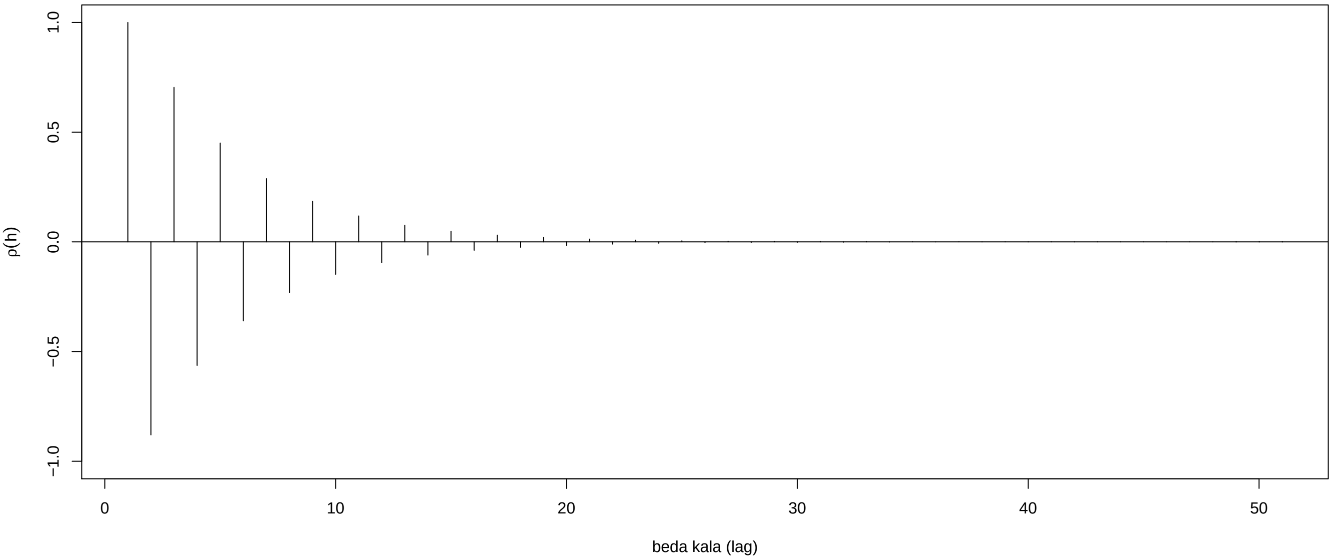


Gambar 8.1: Plot fungsi autokorelasi theoretis MA(2) untuk theta $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{6}$ dan $\theta_1 = -1$ dan $\theta_2 = 6$.

6. Sketsalah fungsi autokorelasi untuk model-model ARMA berikut:

(a) $X_t + 0{,}8X_{t-1} = \varepsilon_t - 0{,}4\varepsilon_{t-1}$
Penyelesaian:
Ini adalah mdel ARMA(1,1) dengan $\phi = -0{,}8$ dan $\theta = -0{,}4$.

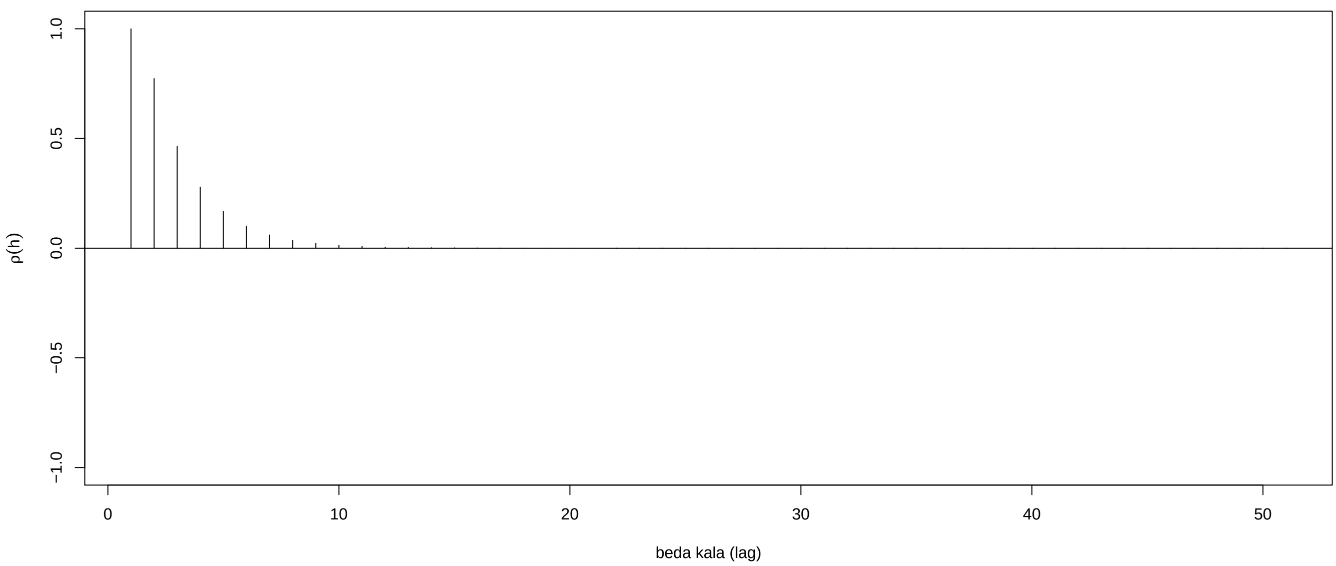
```
> plot(ARMAacf(ar=-0.8,ma=-0.4,lag.max=50),ylim=c(-1,1),type="h",xlab="be
kala (lag)",ylab=expression(rho(h)))
> abline(h=0)
```



Gambar 8.2: Sketsa fungsi autokorelasi untuk model $X_t + 0{,}8X_{t-1} = \varepsilon_t - 0{,}4\varepsilon_{t-1}$

(b) $X_t - 0{,}6X_{t-1} = \varepsilon_t + 0{,}5\varepsilon_{t-1}$
Penyelesaian:
Ini adalah mdel ARMA(1,1) dengan $\phi = -0{,}8$ dan $\theta = -0{,}4$.

```
> plot(ARMAacf(ar=0.6,ma=0.5,lag.max=50),ylim=c(-1,1),type="h",xlab="beda
kala (lag)",ylab=expression(rho(h)))
> abline(h=0)
```



Gambar 8.3: Sketsa fungsi autokorelasi untuk model $X_t - 0{,}6X_{t-1} = \varepsilon_t + 0{,}5\varepsilon_{t-1}$