

## Kuliah 16: Jawaban Soal Ujian Akhir Semester

1. Soal berikut berhubungan dengan model autoregresif.

- (a) Tunjukkan bahwa model AR(2) dengan bentuk  $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$  bisa dinyatakan dalam bentuk ortogonal sebagai

$$X_t = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} X_{t-1} + \phi_2 \left( X_{t-2} - \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} X_{t-1} \right) + \varepsilon_t.$$

**Penyelesaian:**

Ekskansikan suku disebelah kanan deret waktu  $X_t$ :

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} - \frac{\phi_1 \phi_2}{1 - \phi_2} X_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} X_{t-1} - \frac{\phi_1 \phi_2}{1 - \phi_2} X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \\ &= \frac{(1 - \phi_2) \phi_1}{(1 - \phi_2)} X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \\ &= \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t. \end{aligned}$$

- (b) Berikan syarat-syarat untuk  $\phi_1$  dan  $\phi_2$  agar model AR(2) ini stasioner.

**Penyelesaian:**

Agar model AR(2) stasioner, syarat yang harus dipenuhi adalah

$$\phi_1 + \phi_2 < 1, \quad \phi_2 - \phi_1 < 1, \quad |\phi_2| < 1. \quad (16.1)$$

- (c) Sekarang diberikan model AR(2) sebagai berikut:  $X_t - X_{t-1} + 0,5X_{t-2} = \varepsilon_t$ . Tentukan nilai  $\phi_1$  dan  $\phi_2$ . Kemudian, hitunglah secara manual (dengan kalkulator) nilai  $\rho(h)$  untuk  $h = 1, \dots, 5$ .

**Penyelesaian:**

Model AR(2) berbentuk  $X_t - X_{t-1} + 0,5X_{t-2} = \varepsilon_t$  dapat ditulis ke dalam bentuk

$$X_t = X_{t-1} - 0,5X_{t-2} + \varepsilon_t \quad (16.2)$$

Berdasarkan persamaan (16.2) diperoleh  $\phi_1 = 1$ ,  $\phi_2 = -0,5$ . Kondisi kestasioneran seperti pada jawaban soal b) dipenuhi. Silakan diverifikasi:  $\phi_1 + \phi_2 = 0,5 < 1$ ,

$\phi_2 - \phi_1 = -1,5 < 1$ , dan  $|0,5| = 0,5 < 1$ . Kemudian, kita juga tahu bahwa fungsi autokorelasi  $\rho(h)$  untuk AR(2) adalah

$$\rho(h) = \left(1 + \frac{1 + \phi_2}{1 - \phi_2} h\right) \left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^h.$$

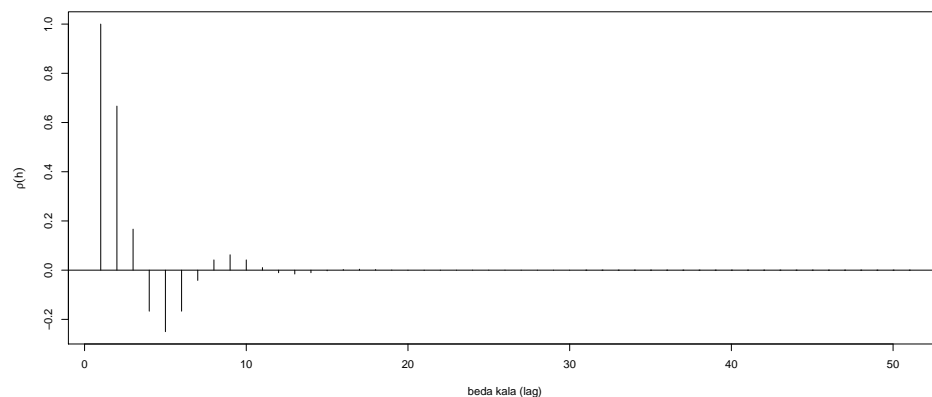
Selanjutnya kita bisa menghitung nilai  $\rho(h)$  untuk  $h = 1, \dots, 5$ . Kita peroleh

$$\rho(1) = 0,67; \quad \rho(2) = 0,17; \quad \rho(3) = -0,17; \quad \rho(4) = -0,25; \quad \rho(5) = -0,17.$$

(d) Buatlah sketsa plot fungsi autokorelasi untuk model (c) sampai beda kala 50.

**Penyelesaian:**

```
> plot(ARMAacf(ar=c(1,-0.5),lag.max=50),type="h",xlab="beda kala
+ (lag)",ylab=expression(rho(h)))
> abline(h=0)
```



Gambar 16.1: Plot fungsi autokorelasi teoretis  $\rho(h)$ .

2. Misalkan  $\{X_t\}$  adalah deret yang dibangkitkan dari deret  $X_t = \varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_{t-2} + c\varepsilon_{t-3} + \dots + c\varepsilon_0$  untuk  $t > 0$ .

(a) Hitung nilai tengah dan kovarians fungsi  $\{X_t\}$ . Apakah  $\{X_t\}$  stasioner?

**Penyelesaian:**

Nilai tengah  $X_t$  yaitu

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_{t-2} + c\varepsilon_{t-3} + \dots + c\varepsilon_0) \\ &= E(\varepsilon_t) + cE(\varepsilon_{t-1}) + \dots + cE(\varepsilon_0) \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 = 0. \end{aligned}$$

Kemudian untuk menghitung kovarians kita cukup menghitung

$$\begin{aligned}
 \text{var}(X_t) &= \text{var}(\varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_{t-2} + c\varepsilon_{t-3} + \cdots + c\varepsilon_0) \\
 &= \text{var}(\varepsilon_t) + c^2\text{var}(\varepsilon_{t-1}) + \cdots + c^2\text{var}(\varepsilon_0) \\
 &\quad + 2\text{cov}(\varepsilon_t, c\varepsilon_{t-1}) + \cdots + \text{cov}(\varepsilon_t, c\varepsilon_{t-2}) + \cdots \\
 &= \sigma_\varepsilon^2 + c^2\sigma_\varepsilon^2 + \cdots + c^2\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= \sigma_\varepsilon^2 + tc^2\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= (1 + tc^2)\sigma_\varepsilon^2.
 \end{aligned}$$

untuk mengatakan bahwa proses ini tidaklah stasioner.

- (b) Hitung nilai tengah dan kovarians fungsi  $\{\nabla X_t\}$ . Apakah  $\{\nabla X_t\}$  stasioner?

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned}
 X_t &= \varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_{t-2} + c\varepsilon_{t-3} + \cdots + c\varepsilon_0 \\
 X_{t-1} &= \varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_{t-2} + c\varepsilon_{t-3} + c\varepsilon_{t-4} + \cdots + c\varepsilon_0 + c\varepsilon_{-1}.
 \end{aligned}$$

Karena diasumsikan  $t > 0$ , maka  $c\varepsilon_{-1}$  diabaikan. Selanjutnya kita peroleh

$$\nabla X_t = \varepsilon_t + (c - 1)\varepsilon_{t-1} \quad (16.3)$$

yang merupakan model MA(1) dengan parameter  $\theta = (c - 1)$ .

- (c) Identifikasi  $\{X_t\}$  sebagai proses ARIMA. Dengan kata lain, tentukan berapa nilai  $p$ ,  $d$ , dan  $q$  pada model ARIMA( $p, d, q$ ).

**Penyelesaian:**

Model (b) adalah model MA(1). Dengan demikian, kalau dinyatakan dalam model ARIMA( $p, d, q$ ),  $p = 0$ ,  $d = 0$ , dan  $q = 1$ .

- (d) Lakukan simulasi model ARIMA dengan  $n = 200$  untuk  $c = 0,9$  dan  $c = 0,1$ . Kemudian plot hasil simulasi kedua model.

**Penyelesaian:**

Simulasi untuk nilai  $c = 0,9$  dapat dilihat pada Gambar 16.2. Sedangkan, untuk  $c = 0,1$  dapat dilihat pada Gambar 16.3.

3. Soal berikut berhubungan dengan identifikasi model ARIMA dan transformasi data.

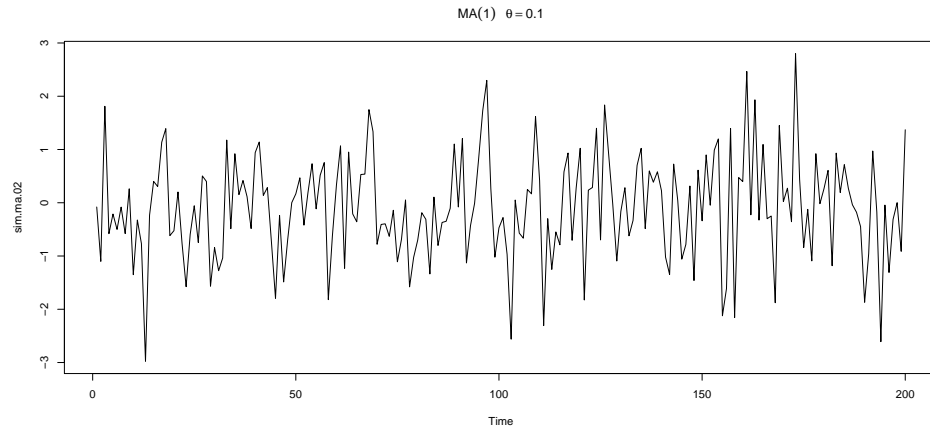
- (a) Untuk masing-masing model ARIMA berikut hitunglah nilai  $E(\nabla X_t)$  dan  $\text{var}(\nabla X_t)$

i.  $X_t = 3 + X_{t-1} + \varepsilon_t - 0,7\varepsilon_{t-1}$ .

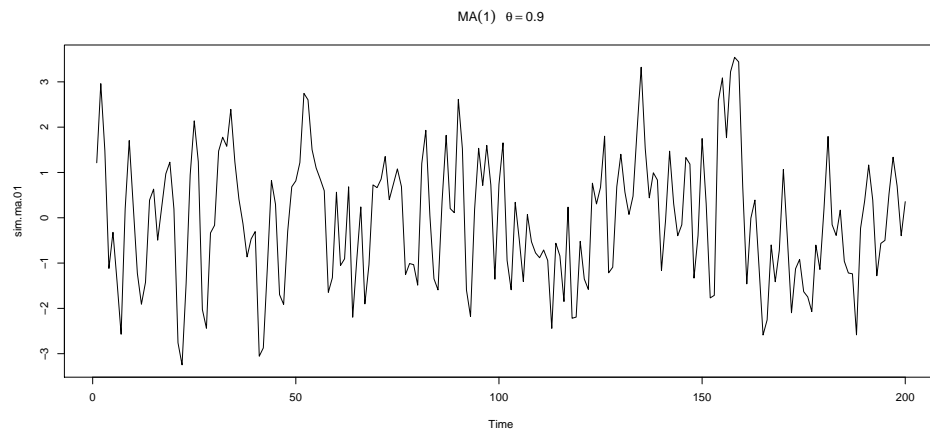
**Penyelesaian:**

Dalam kasus ini  $\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = 3 + \varepsilon_t - 0,7\varepsilon_{t-1}$ . Jadi  $E(\nabla X_t) = 3$  dan

$$\text{var}(\nabla X_t) = (1 + 0,75^2)\sigma_\varepsilon^2 = \frac{25}{16}\sigma_\varepsilon^2.$$



Gambar 16.2: Plot simulasi model MA(1) dengan  $c = 0,9$ .



Gambar 16.3: Plot simulasi model MA(1) dengan  $c = 0,1$ .

$$\text{ii. } X_t = 10 + 1,25X_{t-1} - 0,25X_{t-2} + \varepsilon_t - 0,1\varepsilon_{t-1}.$$

**Penyelesaian:**

Dalam kasus ini  $\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = 10 + 0,25(X_{t-1} - X_{t-2}) + \varepsilon_t - 0,1\varepsilon_{t-1}$  yang merupakan model ARIMA(1,1,1) dengan  $\phi = 0,25$ ;  $\theta = 0,1$ ; dan  $\theta_0 = 10$ .

Jadi  $E(\nabla X_t) = \theta_0/(1 - \phi) = \frac{40}{3}$  dan

$$\text{var}(\nabla X_t) = \frac{1 - 2\phi\theta + \theta^2}{1 - \phi^2} \sigma_\varepsilon^2 = 1,024\sigma_\varepsilon^2.$$

- (b) Lihat definisi transformasi Box-Cox. Gunakan kalkulus untuk menunjukkan bahwa untuk setiap  $x > 0$  dan sebagaimana  $\lambda \rightarrow 0$  maka  $(x^\lambda - 1)/\lambda \rightarrow \log x$ .

**Penyelesaian:**

Menggunakan Teorema l'Hôpital

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{x^\lambda - 1}{\lambda} = \frac{\frac{d}{dx}(x^\lambda)}{\frac{d}{dx}\lambda} = \ln x.$$

4. Misalkan deret waktu didefinisikan oleh

$$X_t = M_t + e_t \quad \text{dengan} \quad M_t = M_{t-1} + \varepsilon_t$$

dengan  $\{e_t\}$  dan  $\{\varepsilon_t\}$  adalah deret derau putih (*white noise*) saling bebas. Lebih jelasnya,  $\{e_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma_e^2)$  dan  $\{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

- (a) Buktikan bahwa  $\nabla X_t = \nabla M_t + \nabla e_t = \varepsilon_t + e_t - e_{t-1}$ .

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} \nabla X_t &= X_t - X_{t-1} \\ &= (M_t + e_t) - (M_{t-1} + e_{t-1}) \\ &= M_t - M_{t-1} + e_t - e_{t-1} \\ &= \nabla M_t + \nabla e_t \\ &= \varepsilon_t + e_t - e_{t-1}. \end{aligned}$$

- (b) Buktikan bahwa  $\text{var}(\nabla X_t) = \sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_e^2$ .

**Penyelesaian:**

Karena  $\varepsilon_t$  dan  $e_t$  saling bebas maka kovariansnya bernilai 0, sehingga

$$\begin{aligned} \text{var}(\nabla X_t) &= \text{var}(\varepsilon_t + e_t - e_{t-1}) \\ &= \text{var}(\varepsilon_t) + \text{var}(e_t) + \text{var}(e_{t-1}) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_e^2. \end{aligned}$$

(c) Buktikan bahwa  $\text{cov}(\nabla X_t, \nabla X_{t-1}) = -\sigma_e^2$ .

**Penyelesaian:**

Karena  $\epsilon_t$  dan  $e_t$  saling bebas maka kovariansnya bernilai 0, sehingga

$$\begin{aligned}\text{cov}(\nabla X_t, \nabla X_{t-1}) &= \text{cov}(\epsilon_t + e_t - e_{t-1}, \epsilon_{t-1} + e_{t-1} + e_{t-2}) \\ &= -\text{cov}(e_{t-1}, e_{t-1}) \\ &= -\sigma_e^2.\end{aligned}$$

(d) Buktikan bahwa

$$\text{cor}(\nabla X_t, \nabla X_{t-1}) = -\frac{1}{2 + \frac{\sigma_\epsilon^2}{\sigma_e^2}}.$$

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned}\text{cor}(\nabla X_t, \nabla X_{t-1}) &= \frac{\text{cov}(\nabla X_t, \nabla X_{t-1})}{\sqrt{\text{var}(X_t)}\sqrt{\text{var}(X_{t-1})}} \\ &= \frac{-\sigma_e^2}{\sqrt{\sigma_\epsilon^2 + 2\sigma_e^2}\sqrt{\sigma_\epsilon^2 + 2\sigma_e^2}} \\ &= \frac{-\sigma_e^2}{\sigma_\epsilon^2 + 2\sigma_e^2} \\ &= -\frac{1}{2 + \frac{\sigma_\epsilon^2}{\sigma_e^2}}.\end{aligned}$$

5. Lakukan analisis data terhadap data yang Anda miliki dan ramalkan untuk enam langkah ke depan. Ikuti format penulisan seperti pada berkas BJSales revisi.

**Penyelesaian:** Silakan lihat contoh analisis dan lakukan analisis serupa terhadap data Anda.