

9.2 Karakteristik Lapisan Batas

Medan aliran dengan bilangan Reynolds besar dapat dibagi menjadi daerah viskos dan inviscid.

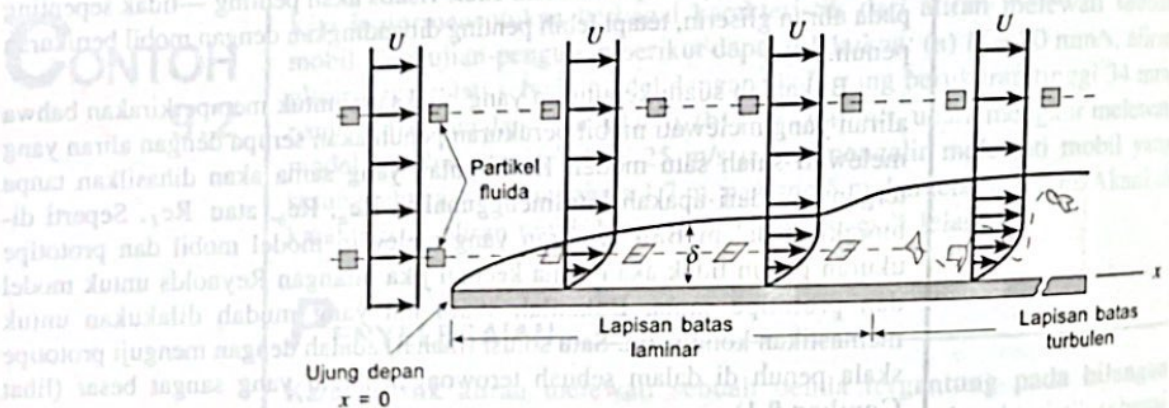
Seperti yang telah dibahas dalam subbab sebelumnya, seringkali kita menganggap aliran yang melewati sebuah benda sebagai sebuah kombinasi dari aliran viskos di dalam lapisan batas dan aliran inviscid di tempat lainnya. Jika bilangan Reynolds cukup besar, efek viskos penting hanya di bagian lapisan batas di dekat benda (dan di daerah olakan di belakang benda). Lapisan batas diperlukan untuk memungkinkan kondisi batas tanpa slip yang mensyaratkan fluida untuk menempel pada suatu permukaan padat yang dilewati alirannya. Di luar lapisan batas, gradien kecepatan tegak lurus terhadap aliran relatif kecil, dan fluida berperilaku seakan-akan inviscid, meskipun viskositasnya tidak nol. Kondisi yang diperlukan untuk struktur aliran ini adalah bilangan Reynolds yang besar.

9.2.1 Struktur dan Ketebalan Lapisan Batas pada Sebuah Pelat Datar

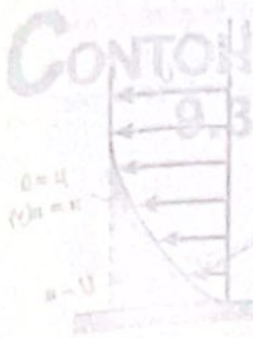
Terdapat banyak ragam ukuran sebuah lapisan batas dan struktur dari aliran di dalamnya. Sebagian dari variasi ini disebabkan oleh bentuk benda di mana lapisan batas tersebut terbentuk. Dalam subbab ini kita akan meninjau situasi yang paling sederhana, yaitu situasi di mana lapisan batas terbentuk pada sebuah pelat datar dengan panjang tak terhingga yang di sepanjangnya mengalir suatu fluida viskos, tak mampu-mampat seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 9.7. Jika permukaannya melengkung (misalnya sebuah silinder bundar atau airfoil), struktur lapisan batas akan lebih rumit. Aliran serupa itu dibahas dalam Subbab 9.2.6.

Jika bilangan Reynolds cukup besar, hanya fluida di dalam lapisan batas relatif tipis pada pelat yang akan merasakan efek dari pelat. Artinya, kecuali di daerah dekat pelat, kecepatan aliran pada dasarnya akan sebesar $V = U_i$, yaitu kecepatan hulu. Untuk pelat datar dengan panjang tak terhingga yang membentang dari $x = 0$ sampai $x = \infty$, tidaklah jelas bagaimana mendefinisikan bilangan Reynolds karena tidak ada panjang karakteristik. Pelat tidak memiliki ketebalan dan panjangnya tidak terbatas!

Untuk pelat dengan panjang tertentu, jelas bahwa panjang pelat ℓ , dapat digunakan sebagai panjang karakteristik. Untuk pelat dengan panjang tak



■ GAMBAR 9.7 Distorsi dari partikel fluida ketika mengalir di dalam lapisan batas.



terhingga, kita menggunakan x , jarak koordinat sepanjang pelat dari ujung depan, sebagai panjang karakteristik dan mendefinisikan bilangan Reynolds sebagai $Re_x = Ux/\nu$. Jadi, untuk fluida atau kecepatan hulu apapun, bilangan Reynolds akan cukup besar untuk aliran tipe lapisan batas (yaitu Gambar 9.5c) jika pelat cukup panjang. Secara fisik, hal ini berarti bahwa situasi aliran yang diilustrasikan dalam Gambar 9.5c dapat dianggap terjadi pada pelat yang sama, tetapi harus dipandang dengan melihat pada bagian yang lebih panjang dari pelat dengan menjauhi pelat untuk melihat aliran dalam Gambar 9.5a, 9.5b dan 9.5c.

Jika pelat cukup panjang, bilangan Reynolds $Re = U/\nu$ juga cukup besar sehingga aliran tersebut menyerupai karakteristik lapisan batasnya (kecuali sangat dekat dengan ujung depan). Perincian dari medan aliran di dekat ujung depan hilang dari pengamatan kita, karena kita berdiri sangat jauh dari pelat sehingga kita tidak dapat membuat perincian ini. Untuk skala ini (Gambar 9.5c) pelat mempunyai efek yang dapat diabaikan pada fluida di depan pelat. Keberadaan pelat dirasakan hanya di dalam lapisan batas yang relatif tipis dan di daerah olakan. Seperti yang dijelaskan sebelumnya, Prandtl pada tahun 1940 adalah orang yang pertama kalinya menghipotesiskan konsep seperti itu. Hal ini menjadi salah satu titik balik yang besar dalam analisis mekanika fluida.

Suatu pemahaman yang lebih baik dari struktur aliran lapisan batas dapat diperoleh dengan meninjau apa yang terjadi pada sebuah partikel fluida yang mengalir ke dalam lapisan batas. Seperti ditunjukkan dalam Gambar 9.7, sebuah partikel segiempat kecil mempertahankan bentuk aslinya ketika mengalir di dalam aliran seragam di luar lapisan batas. Ketika partikel itu memasuki lapisan batas, partikel tersebut mulai terdistorsi karena gradien kecepatan di dalam lapisan batas—bagian atas partikel mempunyai kecepatan yang lebih besar daripada bagian bawahnya. Partikel fluida tidak berotasi ketika mengalir sepanjang bagian luar lapisan batas, namun akan mulai berotasi ketika melewati batas semu permukaan lapisan batas dan mulai memasuki kawasan aliran viskos. Aliran tersebut dikatakan tak berotasi (*irrotasional*) di luar lapisan batas dan berotasi (*rotasional*) di dalam lapisan batas. (Dalam terminologi kinematika partikel fluida yang dibahas dalam Subbab 6.1, aliran di luar lapisan batas memiliki vortisitas nol, dan aliran di dalam lapisan batas mempunyai vortisitas tidak nol.)

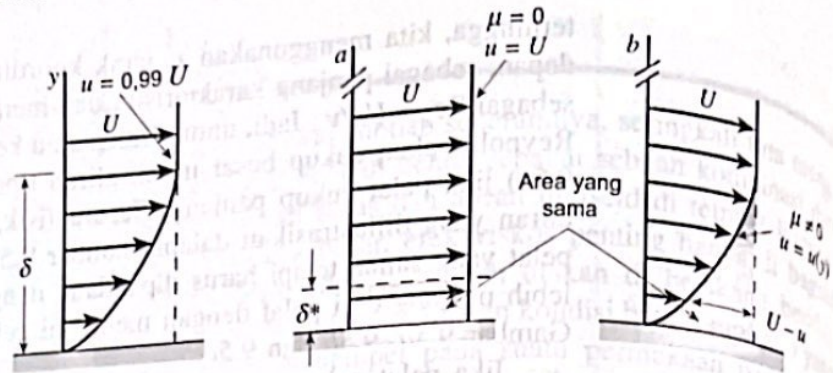
Pada suatu jarak di hilir dari ujung depan, aliran lapisan batas menjadi turbulen dan partikel fluida menjadi sangat terdistorsi karena sifat acak dan tak beraturannya turbulensi. Salah satu sifat yang mencirikan aliran turbulen adalah terjadinya pencampuran tak beraturan dari parsel-parcel fluida yang ukurannya berkisar mulai dari partikel-partikel fluida paling kecil sampai yang seukuran dengan benda yang dibahas. Untuk aliran laminar, pencampuran terjadi hanya pada skala molekuler. Skala molekuler ini besarnya lebih kecil daripada ukuran yang khas untuk pencampuran aliran turbulen. Transisi dari aliran laminar ke turbulen terjadi pada nilai kritis bilangan Reynolds, $Re_{x,c}$, sekitar 2×10^5 sampai 3×10^6 , tergantung pada kekasaran permukaan dan besarnya turbulensi pada aliran hulu, seperti yang dibahas dalam Subbab 9.2.4.

Tujuan dari lapisan batas pada pelat adalah untuk memungkinkan fluida berubah kecepatannya dari nilai U di hulu menjadi nol pada pelat. Jadi $\mathbf{V} = 0$ pada $y = 0$ dan $\mathbf{V} \approx U\hat{i}$ pada $y = \delta$, dengan profil kecepatan, $u = u(x,y)$

Partikel fluida di dalam lapisan batas mengalami efek-efek viskos.



V9.3 Transisi Laminar/turbulen.



■ GAMBAR 9.8 Ketebalan lapisan batas (a) ketebalan lapisan batas standar, (b) ketebalan perpindahan lapisan batas.

sepanjang ketebalan lapisan batas. Dalam kenyataannya (baik secara matematik dan fisika, tidak terdapat “tepi” yang tajam dari lapisan batas. Artinya $u \rightarrow U$ ketika kita semakin jauh dari pelat; tidaklah tepat benar $u = U$ pada $y = \delta$. Kita mendefinisikan ketebalan lapisan batas, δ , sebagai jarak dari pelat di mana kecepatan fluida telah mencapai suatu nilai sembarang yang tertentu dibandingkan kecepatan hulunya. Biasanya, sebagaimana ditunjukkan dalam Gambar 9.8a ditetapkan

$$\delta^* = y \text{ di mana } u = 0,99 U$$

Untuk menghilangkan ketidakpastian dalam penentuan tersebut (apa istimewanya 99%, mengapa tidak 98%?), definisi-definisi berikut diperkenalkan. Ditunjukkan dalam Gambar 9.8b dua profil kecepatan untuk aliran yang melewati sebuah pelat datar—yang satu adalah jika tidak terdapat viskositas (sebuah profil seragam) dan yang lainnya adalah jika terdapat viskositas tidak ada slip pada dinding (profil lapisan batas). Karena berkurangnya kecepatan sebesar $U-u$ di dalam lapisan batas, laju aliran melintasi $b-b$ kurang dari yang melintasi bagian $a-a$. Namun demikian, jika kita memindahkan pelat pada bagian $a-a$ dengan besar yang tepat δ^* , yang disebut sebagai ketebalan perpindahan lapisan batas, laju aliran di setiap bagian akan sama. Hal ini akan berlaku jika

Ketebalan perpindahan lapisan batas didefinisikan dalam laju aliran volumetrik.

$$\delta^* b U = \int_0^{\infty} (U - u) b \, dy$$

di mana b adalah lebar pelat. Jadi,

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \tag{9.3}$$

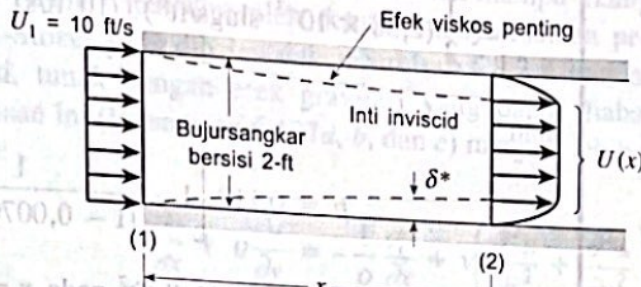
Ketebalan perpindahan ini menyatakan besarnya ketebalan dari benda yang harus ditingkatkan sehingga aliran inviscid seragam semu memiliki sifat laju aliran massa yang sama seperti aliran viskos aktual. Ketebalan ini juga menyatakan perpindahan ke arah luar dari garis-garis arus yang disebabkan oleh efek viskos pada pelat. Gagasan ini memungkinkan kita mensimulasikan kehadiran dari lapisan batas pada aliran di luar lapisan batas dengan menambahkan ketebalan perpindahan pada dinding aktual dan memperlakukan aliran di atas benda yang bertambah tebal tersebut sebagai sebuah aliran inviscid. Konsep ketebalan perpindahan tersebut diilustrasikan pada Contoh 9.3

CONTOH 9.3

Udara yang mengalir ke dalam sebuah saluran duct bujur sangkar bersisi 2-ft dengan kecepatan seragam sebesar 10 ft/s membentuk sebuah lapisan batas pada dinding seperti yang ditunjukkan dalam Gambar C9.3. Fluida di dalam daerah inti (di luar lapisan batas) mengalir seakan-akan fluida tersebut inviscid. Dari perhitungan tingkat lanjut, ditentukan bahwa untuk aliran ini ketebalan perpindahan lapisan batas diberikan oleh

$$\delta^* = 0,0070(x)^{1/2} \quad (1)$$

di mana δ^* dan x dalam satuan feet. Tentukan kecepatan $U = U(x)$ dari udara di dalam saluran tetapi di luar lapisan batas.



■ GAMBAR C9.3

PENYELESAIAN

Jika kita mengasumsikan aliran tak mampu-mampat (asumsi yang cukup beralasan karena rendahnya kecepatan), maka laju aliran volume melintasi penampang manapun dari saluran duct sama dengan laju aliran pada bagian masuk ($Q_1 = Q_2$). Artinya,

$$U_1 A_1 = 10 \text{ ft/s} (2 \text{ ft})^2 = 40 \text{ ft}^3/\text{s} = \int_{(2)} u \, dA$$

Menurut definisi dari ketebalan perpindahan, δ^* , laju aliran melintasi bagian (2) sama dengan laju aliran dari sebuah aliran seragam dengan kecepatan U yang melewati saluran duct yang dindingnya telah dipindahkan ke arah dalam sebesar δ^* . Artinya,

$$40 \text{ ft}^3/\text{s} = \int_{(2)} u \, dA = U(2 \text{ ft} - 2\delta^*)^2 \quad (2)$$

Dengan menggabungkan Persamaan 1 dan 2 kita mendapatkan

$$40 \text{ ft}^3/\text{s} = 4U(1 - 0,0070x^{1/2})^2$$

atau

$$U = \frac{10}{(1 - 0,0070x^{1/2})^2} \text{ ft/s} \quad \text{(Jawaban)}$$

Perhatikan bahwa U meningkat pada arah semakin ke hilir. Sebagai contoh, $U = 11,6 \text{ ft/s}$ pada $x = 100 \text{ ft}$. Efek viskos yang menyebabkan fluida tetap melekat pada dinding saluran duct mengurangi ukuran efektif dari saluran duct, sehingga (berdasarkan prinsip kekekalan massa) menyebabkan fluida mengalami percepatan. Penurunan tekanan yang diperlukan untuk melakukan hal ini dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan Bernoulli

(Persamaan 3.7) sepanjang garis-garis arus inviscid dari bagian (1) ke (2). (Ingat kembali bahwa persamaan ini tidak berlaku untuk aliran viskos di dalam lapisan batas. Namun, persamaan ini berlaku untuk aliran inviscid di luar lapisan batas.) Jadi,

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 = p + \frac{1}{2} \rho U^2$$

Sehingga, dengan $\rho = 2,38 \times 10^{-3}$ slugs/ft³ dan $p_1 = 0$ kita peroleh

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \rho (U_1^2 - U^2) \\ &= \frac{1}{2} (2,38 \times 10^{-3} \text{ slugs/ft}^3) \left[(10 \text{ ft/s})^2 - \frac{10^2}{(1 - 0,0079x^{1/2})^4} \text{ ft}^2/\text{s}^2 \right] \end{aligned}$$

atau

$$p = 0,119 \left[1 - \frac{1}{(1 - 0,0070x^{1/2})^4} \right] \text{ lb/ft}^2$$

Sebagai contoh, $p = -0,0401$ lb/ft² pada $x = 100$ ft.

Jika diinginkan untuk mempertahankan kecepatan yang tetap sepanjang garis sumbu dari daerah masuk saluran duct, dinding dapat dipindahkan ke arah luar sejauh ketebalan perpindahan lapisan batas, δ^* .

Sebuah definisi lain dari ketebalan lapisan batas yaitu *ketebalan momentum lapisan batas*, Θ , sering digunakan ketika menentukan *drag* dari sebuah benda. Lagi-lagi karena berkurangnya kecepatan $U-u$ di dalam lapisan batas, fluks momentum melintasi bagian $b-b$ di dalam Gambar 9.8 kurang dari yang melintasi bagian $a-a$. Kekurangan fluks momentum dari aliran lapisan batas aktual diberikan oleh

$$\int \rho u(U-u) dA = \rho b \int_0^{\infty} u(U-u) dy$$

Ketebalan momentum lapisan batas didefinisikan dalam fluks momentum.

yang menurut definisi adalah fluks momentum di sebuah lapisan yang berkecepatan seragam dan tebalnya Θ . Artinya,

$$\rho b U^2 \Theta = \rho b \int_0^{\infty} u(U-u) dy$$

atau

$$\Theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \quad (9.4)$$

Ketiga definisi ketebalan lapisan batas, δ , δ^* dan θ , digunakan dalam analisis lapisan batas.

Konsep lapisan batas didasarkan pada kenyataan bahwa lapisan batas ini tipis. Pada aliran pelat datar hal ini berarti bahwa pada suatu lokasi x sepanjang pelat, $\delta \ll x$. Sama halnya, $\delta^* \ll x$ dan $\theta \ll x$. Sekali lagi, hal

ini benar jika kita tidak berada terlalu dekat dengan ujung depan pelat (yaitu tidak lebih dekat dari $Re_x = Ux/\nu = 1000$).

Struktur dan sifat dari aliran lapisan batas tergantung pada apakah alirannya laminar atau turbulen. Seperti yang diilustrasikan pada Gambar 9.9 dan dibahas dalam Subbab 9.2.2 sampai 9.2.5, ketebalan lapisan batas dan tegangan geser dinding kedua-duanya berbeda-beda dalam dua rezim aliran ini.

9.2.2 Penyelesaian Lapisan Batas Prandtl/Blasius

Secara teori, perincian dari aliran viskos tak mampu-mampat yang melewati sebuah benda dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan pengatur Navier–Stokes yang dibahas dalam Subbab 6.8.2. Untuk aliran laminar dua-dimensi, tunak dengan efek gravitasi yang dapat diabaikan, persamaan-persamaan ini (Persamaan 6.127a, b, dan c) menjadi lebih sederhana sebagai berikut:

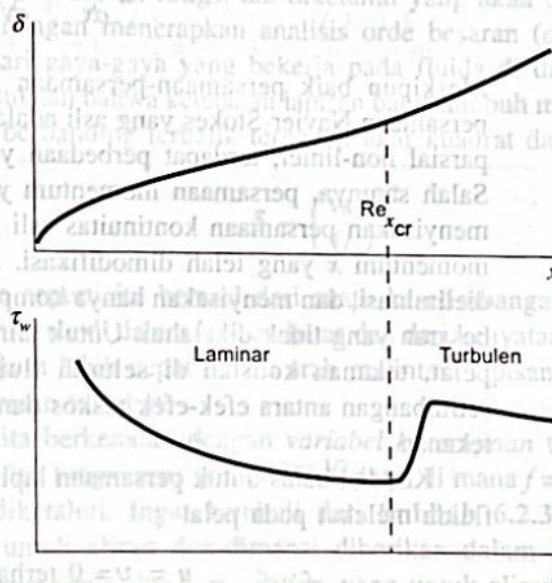
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (9.5)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (9.6)$$

yang mengekspresikan hukum kedua Newton. Sebagai tambahan, persamaan kekekalan massa, Persamaan 6.31 untuk aliran tak mampu-mampat adalah

$$\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9.7)$$

Kondisi batas yang tepat adalah bilamana kecepatan fluida yang jauh dari benda sama dengan kecepatan hulu dan fluida melekat pada permukaan benda padat. Meskipun persoalan matematikanya bisa ditunjukkan dengan



■ GAMBAR 9.9 Karakteristik yang khas dari ketebalan lapisan batas dan tegangan geser dinding untuk lapisan batas laminar dan turbulen. (9.12)

baik, tidak ada seorangpun yang telah memperoleh penyelesaian analitis dari persamaan-persamaan ini untuk aliran melewati benda berbentuk apapun. Saat ini banyak usaha sedang dilakukan untuk mendapatkan penyelesaian numerik dari persamaan pengatur ini untuk berbagai geometris aliran.

Dengan menggunakan konsep lapisan batas yang dijelaskan pada subbab sebelumnya, Prandtl telah dapat melakukan perkiraan-perkiraan pada subbab (berlaku untuk aliran dengan bilangan Reynolds yang besar), dan oleh karenanya dapat menyederhanakan persamaan-persamaan pengatur. Pada tahun 1908, H. Blasius (1883–1970), salah satu murid Prandtl, telah dapat memecahkan persamaan-persamaan yang disederhanakan ini untuk aliran lapisan batas yang melewati sebuah pelat datar sejajar dengan aliran. Uraian singkat dari teknik ini dan hasilnya disajikan di bawah ini. Pembahasan tambahan yang lebih terperinci dapat dijumpai pada literatur (Ref. 1.2.3).

Karena lapisan batas itu tipis, diperkirakan bahwa komponen kecepatan yang tegak lurus terhadap pelat jauh lebih kecil daripada yang sejajar dengan pelat dan laju perubahan dari parameter apapun melintasi lapisan batas harus jauh lebih besar daripada perubahan sepanjang arah aliran. Artinya,

$$v \ll u \text{ dan } \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$$

Secara fisik, aliran pada dasarnya sejajar terhadap pelat dan sifat fluida apapun dikonveksikan ke hilir jauh lebih cepat daripada yang berdifusi melintasi garis-garis arus.

Dengan asumsi-asumsi ini, dapat ditunjukkan bahwa persamaan-persamaan pengatur (Persamaan 9.5, 9.6, dan 9.7) dapat diringkas menjadi persamaan lapisan batas berikut

Persamaan Navier-Stokes dapat disederhanakan untuk analisis aliran lapisan batas.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9.8)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (9.9)$$

Meskipun baik persamaan-persamaan lapisan batas maupun persamaan-persamaan Navier-Stokes yang asli adalah persamaan-persamaan diferensial parsial non-linier, terdapat perbedaan yang sangat besar antara keduanya. Salah satunya, persamaan momentum y telah dieliminasi, sehingga hanya menyisakan persamaan kontinuitas asli yang tidak berubah dan persamaan momentum x yang telah dimodifikasi. Salah satu variabel, tekanan, telah dieliminasi, dan menyisakan hanya komponen x dan y dari kecepatan sebagai besaran yang tidak diketahui. Untuk aliran lapisan batas di atas permukaan pelat, tekanan konstan di seluruh fluida. Aliran menyatakan suatu keseimbangan antara efek-efek viskos dan inersia, tanpa adanya peranan dari tekanan.

Kondisi batas untuk persamaan lapisan batas pengatur adalah bilamana fluida melekat pada pelat

$$u = v = 0 \text{ terhadap } y = 0 \quad (9.10)$$

dan di luar lapisan batas aliran seragam seperti aliran hulu $u = U$. Artinya

$$u \rightarrow U \text{ sehingga } y \rightarrow \infty \tag{9.11}$$

Secara matematika, kecepatan hulu didekati secara asimtotik dengan penambahan jarak dari pelat. Secara fisika, kecepatan aliran berbeda 1% dari kecepatan hulu pada jarak δ dari pelat.

Dalam terminologi matematika, persamaan Navier-Stokes (Persamaan 9.5 dan 9.6) dan persamaan kontinuitas (Persamaan 9.7) adalah persamaan-persamaan eliptik, sementara persamaan-persamaan aliran lapisan batas (Persamaan 9.8 dan 9.9) adalah persamaan parabolik. Sifat dari penyelesaian kedua kumpulan persamaan ini, oleh karenanya, berbeda. Secara fisik, kenyataan ini diterjemahkan pada gagasan bahwa apa yang terjadi di hilir pada jarak tertentu di dalam lapisan batas tidak dapat mempengaruhi apa yang terjadi di hulu dari titik tersebut. Artinya, apakah pelat yang ditunjukkan pada Gambar 9.5c berakhir pada panjang ℓ atau lebih panjang sampai 2ℓ , aliran di dalam segmen yang pertama sepanjang ℓ akan tetap sama. Sebagai tambahan, keberadaan pelat tidak memberikan pengaruh apapun pada aliran di depan pelat.

Secara umum, penyelesaian dari persamaan-persamaan diferensial parsial nonlinear (seperti persamaan lapisan batas, Persamaan 9.8 dan 9.9) sangat sulit untuk diperoleh. Namun, dengan menerapkan transformasi koordinat secara cerdas dan mengubah variabel-variabel, Blasius meringkas persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa yang dapat dipecahkannya. Gambaran singkat mengenai proses tersebut diberikan di bawah ini. Perincian tambahan dapat dijumpai pada buku-buku standar yang membahas aliran lapisan batas. (Ref.1,2).

Dapat ditunjukkan bahwa dalam bentuk tak berdimensi profil kecepatan lapisan batas pada sebuah pelat datar harus serupa tanpa tergantung dari lokasi di sepanjang pelat. Artinya,

$$\frac{u}{U} = g\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

di mana $g(y/\delta)$ adalah fungsi tak diketahui yang akan ditentukan. Sebagai tambahan, dengan menerapkan analisis orde besaran (*order of magnitude analysis*) dari gaya-gaya yang bekerja pada fluida di dalam lapisan batas, dapat ditunjukkan bahwa ketebalan lapisan batas tumbuh menurut akar kuadrat dari x dan berbanding terbalik terhadap akar kuadrat dari U . Artinya

$$\delta \sim \left(\frac{\nu x}{U}\right)^{1/2}$$

Kesimpulan seperti itu berasal dari suatu kesetimbangan antara gaya-gaya viskos dan inersia di dalam lapisan batas dan dari kenyataan bahwa kecepatan bervariasi jauh lebih cepat dalam arah melintasi lapisan batas daripada sepanjang lapisan tersebut.

Jadi kita berkenalan dengan variabel keserupaan tak berdimensi $\eta = (U/\nu x)^{1/2}y$ dan fungsi arus $\psi = (\nu x U)^{1/2}f(\eta)$, di mana $f = f(\eta)$ adalah fungsi yang tak diketahui. Ingat kembali dari Subbab 6.2.3 bahwa komponen kecepatan untuk aliran dua-dimensi diberikan dalam bentuk fungsi arus sebagai $u = \partial \psi / \partial y$ dan $v = -\partial \psi / \partial x$, yang untuk aliran ini menjadi

$$u = U f'(\eta) \tag{9.12}$$

Persamaan lapisan batas dapat dituliskan dalam variabel keserupaan.

dan

$$v = \left(\frac{\nu U}{4x} \right)^{1/2} (\eta f' - f) \tag{9.13}$$

dengan notasi $(\prime) = d/d\eta$. Kita mensubstitusikan Persamaan 9.12 dan 9.13 ke dalam persamaan pengatur, Persamaan 9.8 dan 9.9, untuk memperoleh (setelah beberapa pengolahan) persamaan diferensial biasa orde ketiga non-linear:

$$2f''' + ff'' = 0 \tag{9.14a}$$

Kondisi batas yang diberikan dalam Persamaan 9.10 dan 9.11 dapat ditulis sebagai

$$f = f' = 0 \text{ pada } \eta = 0 \text{ dan } f' \rightarrow 1 \text{ sehingga } \eta \rightarrow \infty \tag{9.14b}$$

Persamaan diferensial parsial yang asli dan kondisi batas telah diringkas menjadi persamaan diferensial biasa dengan menggunakan variabel keserupaan η . Kedua variabel independen, x dan y , dikombinasikan menjadi variabel keserupaan dengan bentuk yang meringkas persamaan diferensial parsial (dan kondisi batas) menjadi persamaan diferensial biasa. Jenis penyederhanaan ini tidak selalu mungkin. Sebagai contoh, metode ini tidak dapat berlaku pada persamaan Navier-Stokes yang lengkap, walaupun metode ini bisa berlaku pada persamaan lapisan batas (Persamaan 9.8 dan 9.9)

Meskipun tidak diketahui penyelesaian analitis untuk Persamaan 9.14, persamaan tersebut lebih mudah untuk diintegrasikan menggunakan sebuah komputer. Profil lapisan batas tak berdimensi, $u/U = f'(\eta)$, yang diperoleh dari penyelesaian numerik dari Persamaan 9.14 (yang disebut sebagai penyelesaian Blasius), disketsa dalam Gambar 9.10a dan ditabulasi dalam Tabel 9.1. Pada lokasi x yang berbeda profil kecepatan adalah serupa sehingga hanya ada satu kurva yang diperlukan untuk menggambarkan kecepatan pada titik manapun di dalam lapisan batas. Karena variabel keserupaan η mengandung x dan y , terlihat dari Gambar 9.10b bahwa profil kecepatan aktual adalah fungsi dari x dan y . Profil pada lokasi x_1 adalah sama seperti pada x_2 kecuali bahwa koordinat y diregangkan dengan sebuah faktor $(x_2/x_1)^{1/2}$.

Dari penyelesaian ditemukan bahwa $u/U \approx 0,99$ apabila $\eta = 5,0$. Jadi,

Ketebalan lapisan batas pelat datar laminar meningkat menurut akar kuadrat dari jaraknya terhadap ujung depan.

atau

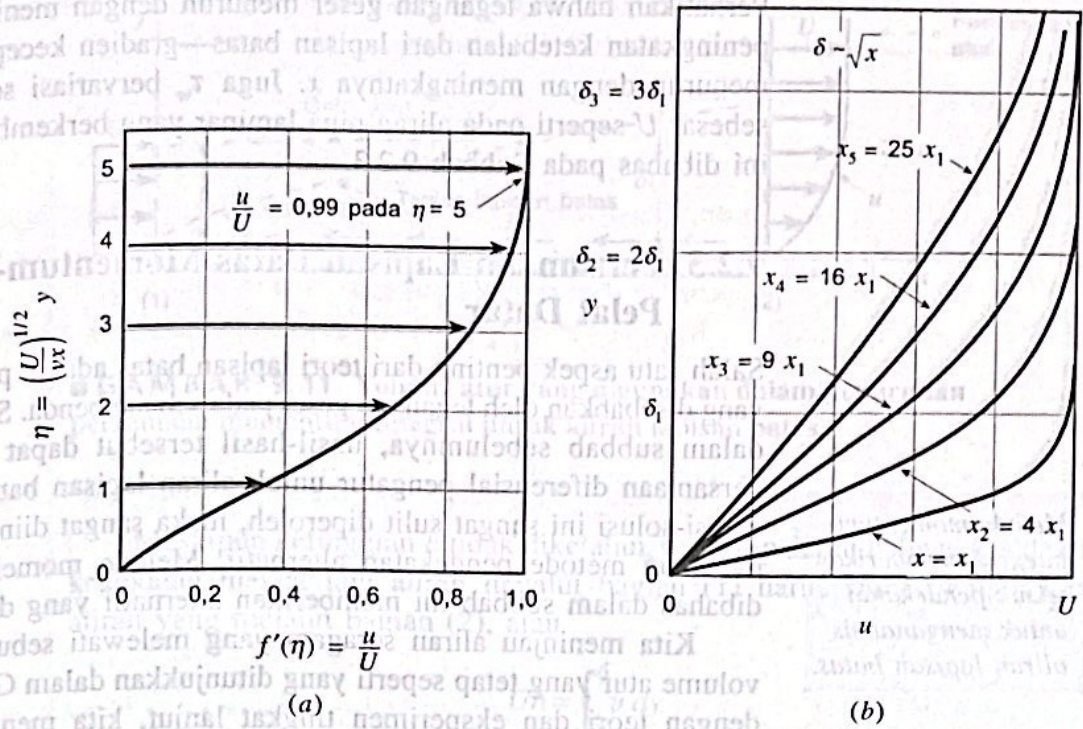
$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \tag{9.15}$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}$$

di mana $Re_x = Ux/\nu$. Juga dapat ditunjukkan bahwa ketebalan perpindahan dan ketebalan momentum diberikan oleh

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1,721}{\sqrt{Re_x}} \tag{9.16}$$

dan



■ GAMBAR 9.10 Profil lapisan batas Blasius: (a) profil batas dalam bentuk tak berdimensi dengan menggunakan variabel keserupaan η , (b) profil lapisan batas yang serupa pada lokasi yang berbeda sepanjang pelat datar.

■ TABEL 9.1 Aliran Laminar Sepanjang Pelat Datar (Penyelesaian Blasius)

$\eta = y(U/\nu x)^{1/2}$	$f'(\eta) = u/U$	η	$f'(\eta)$
0	0	3,6	0,9233
0,4	0,1328	4,0	0,9555
0,8	0,2647	4,4	0,9759
1,2	0,3938	4,8	0,9878
1,6	0,5168	5,0	0,9916
2,0	0,6298	5,2	0,9943
2,4	0,7290	5,6	0,9975
2,8	0,8115	6,0	0,9990
3,2	0,8761	∞	1,0000

$$\frac{\Theta}{x} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad (9.17)$$

Seperti yang dipostulasikan, lapisan batas tipis jika Re_x besar (artinya $\delta/x \rightarrow 0$ jika $Re_x \rightarrow \infty$).

Dengan diketahuinya profil kecepatan, merupakan masalah yang mudah untuk menentukan tegangan geser dinding, $\tau_w = \mu (\partial u/\partial y)_{y=0}$ di mana gradien kecepatan dievaluasi pada pelat. Nilai dari $\partial u/\partial y$ pada $y = 0$ dapat diperoleh dari penyelesaian Blasius yang memberikan

$$\tau_w = 0,332U^{3/2} \sqrt{\frac{\rho\mu}{x}} \quad (9.18)$$



Metode momentum-integral memberikan teknik pendekatan untuk menganalisis aliran lapisan batas.

Perhatikan bahwa tegangan geser menurun dengan meningkatnya x karena peningkatan ketebalan dari lapisan batas—gradien kecepatan pada dinding menurun dengan meningkatnya x . Juga τ_w bervariasi sebagai $U^{3/2}$, bukan sebesar U seperti pada aliran pipa laminar yang berkembang penuh. Variasi ini dibahas pada Subbab 9.2.3.

9.2.3 Persamaan Lapisan Batas Momentum-Integral untuk Pelat Datar

Salah satu aspek penting dari teori lapisan batas adalah penentuan dari *drag* yang disebabkan oleh tegangan geser pada sebuah benda. Seperti yang dibahas dalam subbab sebelumnya, hasil-hasil tersebut dapat diperoleh melalui persamaan diferensial pengatur untuk aliran lapisan batas laminar. Karena solusi-solusi ini sangat sulit diperoleh, maka sangat diinginkan untuk mendapatkan metode pendekatan alternatif. Metode momentum-integral yang dibahas dalam subbab ini memberikan alternatif yang dimaksud.

Kita meninjau aliran seragam yang melewati sebuah pelat datar dan volume atur yang tetap seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 9.11. Sesuai dengan teori dan eksperimen tingkat lanjut, kita mengasumsikan bahwa tekanan adalah konstan di seluruh medan aliran. Aliran yang memasuki volume atur pada ujung depan dari pelat [bagian (1)] adalah seragam, sementara kecepatan dari aliran yang keluar dari volume atur [bagian (2)] bervariasi, dari kecepatan hulu pada tepian lapisan batas sampai kecepatan nol pada pelat.

Fluida yang bersebelahan dengan pelat membentuk bagian bawah dari permukaan atur. Permukaan atas berimpit dengan garis arus tepat di luar tepian lapisan batas pada bagian (2). Permukaan tersebut tidak perlu (pada kenyataannya, memang tidak) berimpit dengan tepian lapisan batas kecuali pada bagian (2). Jika kita menerapkan persamaan komponen momentum x (Persamaan 5.22) pada aliran tunak dari fluida di dalam volume pengatur ini, kita peroleh

$$\sum F_x = \rho \int_{(1)} uV \cdot \hat{n} dA + \rho \int_{(2)} uV \cdot \hat{n} dA$$

di mana untuk sebuah pelat dengan lebar b

$$\sum F_x = -\mathcal{D} = - \int_{\text{pelat}} \tau_w dA = -b \int_{\text{pelat}} \tau_w dx \quad (9.19)$$

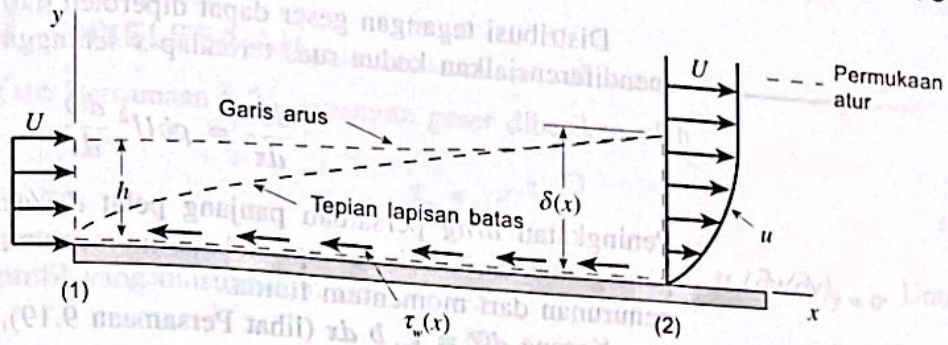
dan \mathcal{D} adalah *drag* yang diberikan oleh pelat kepada fluida. Perhatikan bahwa gaya netto yang disebabkan oleh distribusi tekanan seragam tidak berkontribusi pada aliran ini. Karena pelat adalah padat dan permukaan atas dari volume atur adalah sebuah garis arus, tidak terdapat aliran yang melalui daerah ini. Jadi,

$$-\mathcal{D} = \rho \int_{(1)} U(-U)dA + \rho \int_{(2)} u^2 dA$$

atau

$$\mathcal{D} = \rho U^2 bh - \rho b \int_0^\delta u^2 dy \quad (9.20)$$

Drag pelat datar berhubungan langsung dengan tegangan geser dinding.



■ GAMBAR 9.11 Volume atur yang digunakan dalam penurunan persamaan momentum integral untuk aliran lapisan batas.

Meskipun ketinggian h tidak diketahui, telah dipahami bahwa atas dasar kekekalan massa, laju aliran melalui bagian (1) harus sama dengan laju aliran yang melalui bagian (2), atau

$$Uh = \int_0^\delta u \, dy$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$\rho U^2 b h = \rho b \int_0^\delta U u \, dy \tag{9.21}$$

Jadi, dengan menggabungkan Persamaan 9.20 dan 9.21 kita memperoleh *drag* dalam suku-suku kekurangan fluks momentum melintasi sisi keluar dari volume atur sebagai

$$\mathcal{D} = \rho b \int_0^\delta u(U - u) \, dy \tag{9.22}$$

Jika alirannya inviscid, *drag* akan nol, karena kita akan mempunyai $u \equiv U$ dan ruas kanan dari Persamaan 9.22 akan nol. (Hal ini konsisten dengan kenyataan bahwa $\tau_w = 0$ jika $\mu = 0$). Persamaan 9.22 menunjukkan fakta penting bahwa aliran lapisan batas pada sebuah pelat datar diatur oleh keseimbangan antara *drag* geseran (ruas kiri dari Persamaan 9.22) dan suatu penurunan dalam momentum fluida (ruas kanan dari Persamaan 9.22). Seiring meningkatnya x , δ meningkat dan *drag* meningkat. Penebalan lapisan batas diperlukan untuk mengatasi *drag* dari tegangan geser viskos pada pelat. Hal ini bertentangan dengan aliran pipa horizontal berkembang penuh di mana momentum fluida tetap konstan dan tegangan geser diatasi oleh gradien tekanan di sepanjang pipa.

Pengembangan Persamaan 9.22 dan penggunaannya pertama kali diperkenalkan pada tahun 1921 oleh **T. von Karman** (1881–1963), seorang ahli aerodinamika Hungaria/Jerman. Dengan membandingkan Persamaan 9.22 dan 9.4, kita lihat bahwa *drag* dapat ditulis dalam suku-suku ketebalan momentum, Θ , sebagai

$$\mathcal{D} = \rho b U^2 \Theta \tag{9.23}$$

Perhatikan bahwa persamaan ini berlaku untuk aliran-aliran laminar dan turbulen.

Drag pelat datar berhubungan dengan kekurangan momentum di dalam lapisan batas.

Distribusi tegangan geser dapat diperoleh dari Persamaan 9.23 dengan mendiferensialkan kedua ruas terhadap x sehingga mendapatkan

$$\frac{d\tau}{dx} = \rho b U^2 \frac{d\Theta}{dx} \quad (9.24)$$

Peningkatan *drag* persatuan panjang pelat $d\mathcal{D}/dx$, terjadi dengan adanya peningkatan dari ketebalan lapisan batas momentum, yang menunjukkan adanya penurunan dari momentum fluida.

Karena $d\mathcal{D} = \tau_w b dx$ (lihat Persamaan 9.19), maka

$$\frac{d\mathcal{D}}{dx} = b\tau_w \quad (9.25)$$

Jadi, dengan mengkombinasikan Persamaan 9.24 dan 9.25 kita memperoleh persamaan integral momentum untuk aliran lapisan batas pada pelat datar

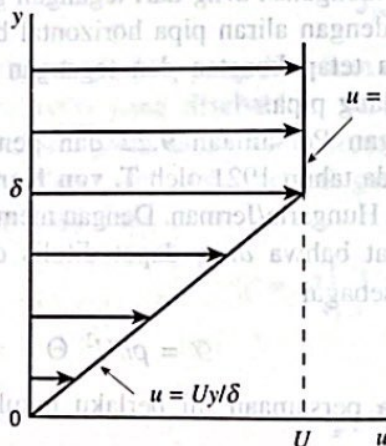
$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\Theta}{dx} \quad (9.26)$$

Tegangan geser pada pelat datar sebanding dengan laju pertumbuhan lapisan batas.

Manfaat dari hubungan ini terletak pada kemampuannya untuk memperoleh hasil-hasil pendekatan lapisan batas secara mudah dengan menggunakan asumsi yang agak kasar. Sebagai contoh, jika kita mengetahui profil kecepatan secara terperinci di dalam lapisan batas (yaitu penyelesaian Blasius yang dibahas dalam subbab sebelumnya), kita dapat menghitung baik ruas kanan Persamaan 9.23 untuk memperoleh *drag*, atau ruas kanan Persamaan 9.26 untuk memperoleh tegangan geser. Untungnya, bahkan suatu dugaan yang kasar pada profil kecepatan akan memungkinkan kita memperoleh hasil-hasil *drag* dan tegangan geser yang cukup memadai dari Persamaan 9.26. Metode ini diilustrasikan dalam Contoh 9.4.

CONTOH 9.4

Tinjaulah aliran laminar dari sebuah fluida tak mampu-mampat yang melewati sebuah pelat datar pada $y = 0$. Profil kecepatan lapisan batas diperkirakan sebagai $u = U y/\delta$ untuk $0 \leq y \leq \delta$ dan $u = U$ untuk $y > \delta$, seperti yang ditunjukkan dalam Gambar C9.4. Tentukan tegangan geser dengan menggunakan persamaan momentum integral. Bandingkan hasil-hasil ini dengan hasil dari Blasius yang diberikan oleh Persamaan 9.18.



■ GAMBAR C9.4

PENYELESAIAN

Dari Persamaan 9.26, tegangan geser diberikan oleh

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\Theta}{dx} \quad (1)$$

sementara untuk aliran laminar kita tahu bahwa $\tau_w = \mu (\partial u / \partial y)_{y=0}$. Untuk profil yang diasumsikan kita peroleh

$$\tau_w = \mu \frac{U}{\delta} \quad (2)$$

dan dari Persamaan) 9.4

$$\Theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right) \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) dy$$

atau

$$\Theta = \frac{\delta}{6} \quad (3)$$

Perhatikan bahwa kita belum mengetahui nilai δ (tetapi menduga merupakan fungsi dari x).

Dengan menggabungkan Persamaan 1, 2 dan 3 kita memperoleh persamaan diferensial berikut untuk δ :

$$\frac{\mu U}{\delta} = \frac{\rho U^2}{6} \frac{d\delta}{dx}$$

atau

$$\delta \, d\delta = \frac{6\mu}{\rho U} dx$$

Persamaan ini dapat diintegrasikan mulai dari ujung depan pelat, $x = 0$ (di mana $\delta = 0$) sampai sembarang lokasi x di mana ketebalan lapisan batas adalah δ . Hasilnya adalah

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{6\mu}{\rho U} x$$

atau

$$\delta = 3,46 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (4)$$

Perhatikan bahwa hasil pendekatan ini (yaitu profil kecepatan sebenarnya tidak berupa garis lurus yang kita asumsikan) cukup mendekati hasil Blasius (yang lebih rumit didapatkannya) yang diberikan oleh Persamaan 9.15.

Tegangan geser dinding juga dapat diperoleh dengan menggabungkan Persamaan 1, 3, dan 4 sehingga menghasilkan

$$\tau_w = 0,289 U^{3/2} \sqrt{\frac{\rho \mu}{x}} \quad (\text{Jawaban})$$

Sekali lagi hasil perkiraan ini sangat mendekati (13%) dengan nilai τ_w dari Blasius yang diberikan oleh Persamaan 9.18.

Seperti yang diilustrasikan dalam Contoh 9.4, persamaan momentum integral, Persamaan 9.26 dapat digunakan bersamaan dengan profil kecepatan yang diasumsikan untuk memperoleh hasil-hasil perkiraan lapisan batas yang memadai. Keakuratan dari hasil-hasil ini tergantung daripada seberapa dekat bentuk profil kecepatan yang diasumsikan dengan profil yang sesungguhnya. Jadi kita meninjau sebuah profil kecepatan umum

$$\frac{u}{U} = g(Y) \quad \text{untuk } 0 \leq Y \leq 1$$

dan

$$\frac{u}{U} = 1 \quad \text{untuk } Y > 1$$

Perkiraan profil kecepatan digunakan dalam persamaan momentum integral.

di mana koordinat tak berdimensi $Y = y/\delta$ bervariasi dari 0 sampai 1 melintasi lapisan batas. Fungsi tak berdimensi $g(Y)$ dapat berupa bentuk apapun yang kita pilih, meskipun fungsi itu harus merupakan perkiraan yang memadai dari profil lapisan batas. Secara khusus, fungsi itu jelas harus memenuhi kondisi-kondisi batas $u = 0$ pada $y = 0$ dan $u = U$ pada $y = \delta$. Artinya

$$g(0) = 0 \quad \text{dan} \quad g(1) = 1$$

Fungsi linier $g(Y) = Y$ yang digunakan dalam Contoh 9.4 adalah salah satu dari profil yang mungkin. Kondisi lain seperti $dg/dY = 0$ pada $Y = 1$ (artinya $\partial u/\partial y = 0$ pada $y = \delta$), juga dapat digabungkan ke dalam fungsi $g(Y)$ untuk lebih mendekati profil yang sesungguhnya.

Untuk $g(Y)$ yang diberikan, drag dapat ditentukan dari Persamaan 9.22 sebagai

$$\mathcal{D} = \rho b \int_0^\delta u(U - u) dy = \rho b U^2 \delta \int_0^1 g(Y)[1 - g(Y)] dY$$

atau

$$\mathcal{D} = \rho b U^2 \delta C_1 \quad (9.27)$$

di mana konstanta tak berdimensi C_1 mempunyai nilai

$$C_1 = \int_0^1 g(Y)[1 - g(Y)] dY$$

Dan juga, tegangan geser dinding dapat dituliskan sebagai

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\mu U}{\delta} \left. \frac{dg}{dY} \right|_{Y=0} = \frac{\mu U}{\delta} C_2 \quad (9.28)$$

di mana konstanta tak berdimensi C_2 mempunyai nilai

$$C_2 = \left. \frac{dg}{dY} \right|_{Y=0}$$

Dengan menggabungkan Persamaan 9.25, 9.27, dan 9.28 kita memperoleh

$$\delta d\delta = \frac{\mu C_2}{\rho U C_1} dx$$

yang dapat diintegrasikan dari $\delta = 0$ pada $x = 0$ sehingga memberikan

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu C_2 x}{U C_1}}$$

atau

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{2C_2/C_1}{\text{Re}_x}} \tag{9.29}$$

Dengan mensubstitusikan pernyataan ini kembali ke Persamaan 9.28 kita mendapatkan

$$\tau_w = \sqrt{\frac{C_1 C_2}{2}} U^{3/2} \sqrt{\frac{\rho \mu}{x}} \tag{9.30}$$

Untuk menggunakan Persamaan 9.29 dan 9.30 kita harus menentukan nilai dari C_1 dan C_2 . Beberapa profil kecepatan yang diasumsikan dan nilai-nilai δ yang dihasilkan diberikan dalam Gambar 9.12 dan Tabel 9.2. Semakin dekat bentuk yang diasumsikan dengan bentuk profil aktual (Blasius), maka akan semakin akurat hasil akhirnya. Untuk bentuk profil apapun yang diasumsikan, ketergantungan fungsional dari δ dan τ_w pada parameter-parameter fisika ρ , μ , U dan x adalah sama. Hanya konstantanya yang berbeda. Artinya $\delta \sim (\mu x / \rho U)^{1/2}$ atau $\delta \text{Re}_x^{1/2} / x = \text{konstan}$ dan $\tau_w \sim (\rho \mu U^3 / x)^{1/2}$, di mana $\text{Re}_x = \rho U x / \mu$.

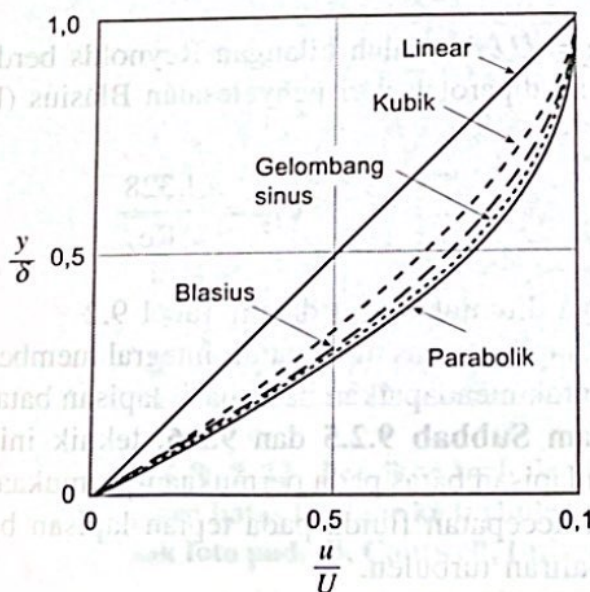
Seringkali lebih mudah jika kita menggunakan koefisien gesekan lokal tak berdimensi, c_f yang didefinisikan sebagai

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} \tag{9.31}$$

untuk menyatakan tegangan geser dinding. Dari Persamaan 9.30 kita mendapatkan nilai perkiraan

$$c_f = \sqrt{2C_1 C_2} \sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}} = \frac{\sqrt{2C_1 C_2}}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

sementara penyelesaian Blasius hasilnya diberikan oleh



■ GAMBAR 9.12 Perkiraan profil lapisan batas yang biasa digunakan dalam persamaan momentum integral.

Hasil-hasil pendekatan dari lapisan batas diperoleh dari persamaan momentum integral.

Koefisien gesekan lokal adalah tegangan geser dinding tak berdimensi.

■ TABEL 9.2 Hasil perhitungan Momentum-Integral untuk Pelat Datar dengan Berbagai Asumsi Profil Kecepatan Aliran laminar.

Karakter Profil	$\delta Re_x^{1/2} / x$	$c_f Re_x^{1/2}$	$C_{Df} Re_l^{1/2}$
a. Penyelesaian Blasius	5,00	0,664	1,328
b. Linear $u/U = y/d$	3,46	0,578	1,156
c. Parabola $u/U = 2y/\delta - (y/\delta)^2$	5,48	0,730	1,460
d. Kubik $u/U = 3(y/\delta)/2 - (y/\delta)^3/2$	4,64	0,646	1,292
e. Gelombang sinus $u/U = \sin[\pi(y/\delta)/2]$	4,79	0,655	1,310

$$c_f = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad (9.32)$$

Hasil-hasil ini juga ditunjukkan dalam Tabel 9.2

Untuk sebuah pelat datar dengan panjang l dan lebar b , drag gesekan netto, \mathcal{D}_f , dapat dinyatakan dalam koefisien drag gesekan, C_{Df} sebagai

$$C_{Df} = \frac{\mathcal{D}_f}{\frac{1}{2}\rho U^2 bl} = \frac{b \int_0^l \tau_w dx}{\frac{1}{2}\rho U^2 bl}$$

atau

$$C_{Df} = \frac{1}{l} \int_0^l c_f dx \quad (9.33)$$

Koefisien drag gesekan adalah integral dari koefisien gesekan lokal.

Kita menggunakan nilai perkiraan di atas untuk $c_f = (2C_1 C_2 \mu / \rho U x)^{1/2}$ untuk mendapatkan

$$C_{Df} = \frac{\sqrt{8C_1 C_2}}{\sqrt{Re_l}}$$

di mana $Re_l = U l / \nu$ adalah bilangan Reynolds berdasarkan panjang pelat. Nilainya yang diperoleh dari penyelesaian Blasius (Persamaan 9.32) memberikan

$$C_{Df} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_l}}$$

Hasil ini juga ditunjukkan di dalam Tabel 9.2

Metode lapisan batas momentum-integral memberikan teknik yang relatif sederhana untuk mendapatkan hasil-hasil lapisan batas yang berguna. Seperti dibahas dalam Subbab 9.2.5 dan 9.2.6, teknik ini dapat diperluas untuk aliran-aliran lapisan batas pada permukaan-permukaan melengkung (di mana tekanan dan kecepatan fluida pada tepian lapisan batas tidak konstan) dan pada aliran-aliran turbulen.