



Telkom
University

Pengolahan Sinyal Digital Lanjut dan Aplikasi (PSDLA) : TTH5I3

**Pertemuan 04 : Proses Moving Average
(MA)**

Oleh : Koredianto Usman

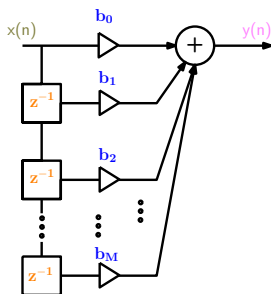
Versi : Juni 2020

Proses Moving Average

- 1 Yang dimaksud dengan proses moving average adalah proses melewatkan sinyal stokastik ke filter Moving Average
- 2 Filter Moving Average adalah Filter Finite Impulse Response (FIR)
- 3 Hanya ada struktur forward dalam filter MA, tidak ada struktur feedback.
- 4 Proses MA ini adalah proses yang paling sederhana dari bentuk lainnya yaitu Autoregressive (AR), dan proses Autoregressive Moving Average (ARMA)

Struktur FILTER MA

- 1 Struktur Filter MA orde M ditunjukkan pada Gambar berikut:



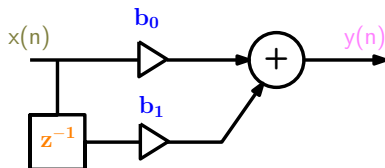
- 2 Terdapat $M+1$ koefisien filter yaitu b_0 sampai b_M
- 3 Input dari filter ini adalah sinyal acak $\mathbf{x(n)}$
- 4 Pada banyak kasus, sinyal input ini adalah sinyal acak Gaussian dengan mean 0 dan variansi 1.
- 5 Input ini dinotasikan dengan $\mathbf{N(0,1)}$

Proses MA

- 1 Oleh karena input adalah Gaussian $\mathbf{N}(0,1)$
- 2 Maka fungsi autokorelasi $r_{xx}(0) = 1$, dan $r_{xx}(k) = 0$ untuk $k \neq 0$
- 3 Jika input Gaussian $\mathbf{N}(0,1)$ dimasukkan ke filter MA, pertanyaannya adalah bagaimana fungsi autokorelasi dari keluarannya ($r_{yy}(k)$), untuk setiap k ?
- 4 Untuk menjawab pertanyaan ini, maka kita dapat telusuri dari persamaan yang menghubungkan antara input dan output filter

Proses MA

- 1 Tinjau proses MA orde 1 dengan struktur berikut:



- 2 Persamaan yang menghubungkan input dengan output adalah: $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n - 1)$
- 3 Korelasikan ruas kiri dan kanan dengan $y(n)$, diperoleh:

$$COR(y(n), y(n)) = COR(y(n)[b_0x(n) + b_1x(n - 1)])$$

- 4 Ruas kiri memberikan $r_{yy}(0)$, sedangkan ruas kanan perlu disederhanakan dengan mensubstitusi $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n - 1)$

Proses MA

1 $COR(y(n), y(n)) =$
 $COR([b_0x(n) + b_1x(n-1)][b_0x(n) + b_1x(n-1)])$

2 Setelah disederhanakan diperoleh:

$$r_{yy}(0) = b_0^2 + b_1^2$$

3 Proses yang sama dapat kita lakukan untuk menghitung $r_{yy}(1)$, yaitu mengkorelasikan $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1)$ dengan $y(n-1)$ Dengan pendekatan ini diperoleh:

$$r_{yy}(1) = b_0b_1$$

4 Tentu saja berlaku sifat simetri yaitu:

$$r_{yy}(-1) = r_{yy}(1) = b_0b_1$$

5 Nilai $r_{yy}(2) = r_{yy}(3) = \dots = 0$

Proses MA

- 1 Proses menghitung nilai autokorelasi $r_{yy}(0)$, $r_{yy}(1)$ dst ini dapat ditabelkan sebagai berikut:

- 2 Menghitung $r_{yy}(0)$:

Koef	b_0	b_1	0	0
Koef	b_0	b_1	0	0
Perkalian	b_0^2	b_1^2	0	0
JUMLAH	$b_0^2 + b_1^2$			

- 3 Menghitung $r_{yy}(1)$ (koefisien baris 2 digeser 1 ke kanan):

Koef	b_0	b_1	0	0
Koef	0	b_0	b_1	0
Perkalian	0	$b_0 b_1$	0	0
JUMLAH	$b_0 b_1$			

Contoh 1

- ❶ Sinyal Gaussian $N(0,1)$ diinputkan ke filter MA(1) dengan koefisien filter $b_0 = 1$ dan $b_1 = 2$, tentukan fungsi autokorelasi keluaran $r_{yy}(0)$, $r_{yy}(1)$!

- ❷ **Jawab:** Menghitung $r_{yy}(0)$:

Koef	1	2	0	0
Koef	1	2	0	0
Perkalian	1	4	0	0
JUMLAH	1+4=5			

- ❸ Menghitung $r_{yy}(1)$ (koefisien baris 2 digeser 1 ke kanan):

Koef	1	2	0	0
Koef	0	1	2	0
Perkalian	0	2	0	0
JUMLAH	2			

- ❹ Dengan demikian: $r_{yy}(0) = 5$ dan $r_{yy}(1) = 2$

Contoh 2

- ❶ Sinyal Gaussian $N(0,1)$ diinputkan ke filter MA(2) dengan koefisien filter $b_0 = 1$, $b_1 = 2$ dan $b_2 = 5$, tentukan fungsi autokorelasi keluaran $r_{yy}(0)$, $r_{yy}(1)$, dan $r_{yy}(2)$!

- ❷ **Jawab:** Menghitung $r_{yy}(0)$:

Koef	1	2	5	0
Koef	1	2	5	0
Perkalian	1	4	25	0
JUMLAH	1+4+25=30			

- ❸ Menghitung $r_{yy}(1)$ (koefisien baris 2 digeser 1 ke kanan):

Koef	1	2	5	0
Koef	0	1	2	5
Perkalian	0	2	10	0
JUMLAH	12			

- ❹ Dengan demikian: $r_{yy}(0) = 5$ dan $r_{yy}(1) = 2$

Contoh 2 - lanjutan

- ① Menghitung $r_{yy}(2)$: (koefisien baris 2 digeser 2 ke kanan):

Koef	1	2	5	0
Koef	0	0	1	2
Perkalian	0	0	5	0
JUMLAH	5			

- ② Dengan demikian: $r_{yy}(0) = 30$ dan $r_{yy}(1) = 12$ dan $r_{yy}(2) = 5$
- ③ Meski tidak ditanyakan, maka nilai $r_{yy}(-1) = r_{yy}(1) = 12$ dan $r_{yy}(-2) = r_{yy}(2) = 5$

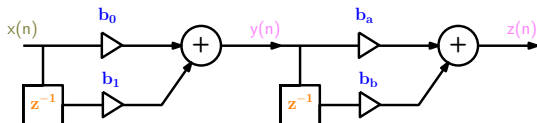
Latihan 01

- 1 Sinyal Gaussian $N(0,1)$, Dilewatkan pada filter MA(3) dengan koefisien $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ dan $b_3 = -1$
- 2 Hitung $r_{yy}(0)$, $r_{yy}(1)$, $r_{yy}(2)$ dan $r_{yy}(3)$!

Jawab:

Susunan Cascade

- 1 Susunan Cascade adalah filter MA disusun serial dengan filter MA lainnya.
- 2 Contoh struktur cascade adalah sebagai berikut:



- 3 Input $\mathbf{x(n)}$ adalah Gaussian $N(0,1)$
- 4 Berapakah nilai autokorelasi dari r_{yy} dan r_{zz} ?
- 5 Nilai r_{yy} dapat dihitung dengan mudah menggunakan teknik tabulasi seperti sebelumnya. Untuk orde 1, proses MA sebelah kiri (Stage I) maka kita peroleh: $r_{yy}(0) = b_0^2 + b_1^2$ dan $r_{yy}(-1) = r_{yy}(1) = b_0 b_1$

Susunan Cascade

- 1 Nilai r_{zz} dapat dihitung bertahap sebagai berikut:
- 2 Misalkan masukannya filter MA sebelah kanan (Stage II) adalah Gaussian $N(0,1)$. maka kita peroleh: $r_{zz}(0) = b_a^2 + b_b^2$ dan $r_{zz}(-1) = r_{zz}(1) = b_a b_b$
- 3 Selanjutnya baru kita tinjau jika masukan $\mathbf{y(n)}$, maka kita peroleh $r_{zz}(0)$ dengan tabulasi:

Korelasi input	$b_0 b_1$	$b_0^2 + b_1^2$	$b_0 b_1$	
Korelasi filter	$b_a b_b$	$b_a^2 + b_b^2$	$b_a b_b$	
Perkalian
JUMLAH	...			

Latihan Soal

- 1 Sinyal Gaussian $N(0,1)$, Dilewatkan pada filter MA(1) yang dicascade dengan MA(2). Untuk filter MA(1) koefisien filter adalah $b_0 = 1$ dan $b_1 = 1$, sedangkan untuk filter MA(2) koefisien filter adalah $b_0 = 2$, $b_1 = 1$ dan $b_2 = -1$
- 2 Hitung $r_{yy}(0)$, $r_{yy}(1)$, $r_{zz}(0)$ dan $r_{zz}(1)$!

Jawab: