



Telkom
University

Pengolahan Sinyal Digital Lanjut dan Aplikasi (PSDLA) : TTH5I3

Pertemuan 13 : Filter LMS

Oleh : Dr. Koredianto Usman

Versi : Januari 2020

Filter LMS

Pada slide 11 dan 12 telah dibahas tentang filter Wiener dan aplikasinya pada ekualisasi kanal. Pada bagian ini akan kita mempelajari filter LMS.

- 1 Pengenalan Filter LMS
- 2 Perbedaan filter LMS dan Filter Wiener
- 3 Penurunan filter LMS
- 4 Update bobot filter LMS
- 5 Nilai parameter update filter LMS (μ)

Filter LMS

- 1 Filter LMS (Least Mean Square) adalah filter yang meminimalisasi perbedaan antara keluaran filter dengan suatu referensi
- 2 Perbedaan antara keluaran filter dengan suatu referensi ini diukur dengan Mean Error Square (MSE)
- 3 Misal input filter adalah $\mathbf{x}(n)$
- 4 Filter LMS adalah FIR dengan koefisien b_0, b_1, \dots, b_N (filter orde N)
- 5 Sinyal referensi adalah $\mathbf{s}(n)$
- 6 Filter LMS harus diatur nilai koefisien b_0, b_1, \dots, b_N tersebut sedemikian sehingga:
- 7 keluaran filter $y(n)$ semirip mungkin dengan sinyal referensi $\mathbf{s}(n)$

Filter LMS

- 1 Semirip mungkin diukur dengan norma orde 2 antara sinyal keluaran $y(n)$ dan sinyal referensi $s(n)$
- 2 Norma orde dua ini disebut juga dengan MSE (Mean Error Square)

3

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} e^2 = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} (s(i) - y(i))^2$$

Filter LMS

- 1 Secara konsep, filter LMS adalah sama dengan filter Wiener
- 2 hanya saja, Filter LMS melakukan update koefisien per sampel sedangkan filter Wiener adalah per blok sampel
- 3 dengan sifat ini, filter LMS bersifat lebih adaptif dibandingkan dengan filter Wiener.
- 4 Untuk sinyal yang bersifat stasioner, kinerja filter Wiener dapat sedikit lebih baik dari pada filter LMS
- 5 Untuk sinyal yang lebih dinamis, maka filter LMS dapat memberikan hasil yang lebih baik
- 6 Dari segi sumber daya komputasi, filter LMS karena bersifat perhitungan per sampel adalah lebih sederhana dibandingkan dengan filter Wiener.

Persamaan Update Bobot

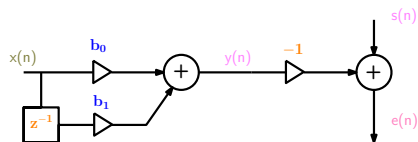
- 1 Inti dari filter LMS adalah persamaan peng-**update**-an bobot
- 2 Persamaan peng-**update**-an bobot ini dinyatakan dengan

$$\mathbf{b}_{n+1} = \mathbf{b}_n + \mu e_n \mathbf{x}_n$$

- 3 Dengan b_{n+1} adalah bobot pada iterasi berikutnya
- 4 b_n adalah bobot pada iterasi saat ini
- 5 e_n adalah nilai error pada iterasi saat ini
- 6 \mathbf{x}_n adalah nilai input pada lengan bobot FIR
- 7 μ adalah konstanta pengupdatean (misal $\mu = 0, 1$)
- 8 Penurunan persamaan ini dapat dilihat pada buku referensi (Monson Hayes)

Filter LMS

Tinjau Ilustrasi Filter orde 1 berikut:



- 1 Pada awal operasi ($n=0$), maka dipilih sebarang bobot b_0 dan b_1
- 2 Misalkan $\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- 3 Dengan input $x(0)$, maka dapat dihitung keluaran $\mathbf{y(n)}$ yaitu:
 $y(0) = b_0 x(0)$
- 4 Dari keluaran $y(0)$ tersebut maka dapat dihitung error
 $e(0) = s(0) - y(0)$

Filter LMS

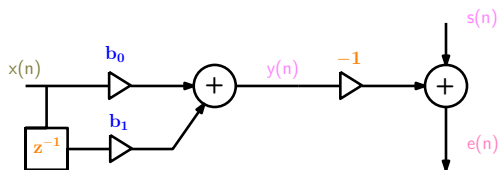
- 1 Setelah error dihitung $e(0) = s(0) - y(0)$ tersebut, maka bobot untuk iterasi berikutnya ($n=1$) dapat dihitung, yakni
- 2 $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_0 + \mu e_0 \mathbf{x}_0$
- 3 Nilai-nilai pada iterasi tersebut sudah jelas, yaitu \mathbf{b}_0 adalah nilai awal $\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, μ adalah konstanta, misalkan $\mu = 0, 1$, e_0 sudah diperoleh, dan $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x(0) \\ 0 \end{bmatrix}$
- 4 Dengan demikian, nilai \mathbf{b}_1 dapat dihitung.
- 5 Setelah \mathbf{b}_1 dihitung dimulai iterasi $n = 1$

Filter LMS

- 1 Setelah \mathbf{b}_1 dihitung dimulai iterasi $n = 1$
- 2 Pada iterasi ini datang sinyal $x(1)$ pada input filter
- 3 Dengan bobot filter \mathbf{b}_1 dan input $x(1)$, maka keluaran filter $y(1)$ dapat dihitung.
- 4 Setelah diperoleh $y(1)$, maka error $e(1)$ dapat pula dihitung, yaitu $e(1) = s(1) - y(1)$. Sinyal $s(1)$ adalah sinyal referensi yang diberikan.
- 5 Setelah error diperoleh maka persamaan update untuk iterasi berikutnya yaitu b_2 kembali dapat dihitung dengan
$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 + \mu e_1 \mathbf{x}_1$$
- 6 Nilai-nilai pada iterasi tersebut sudah jelas, yaitu \mathbf{b}_1 adalah nilai sebelumnya, μ adalah konstanta, misalkan $\mu = 0,1$, e_1 sudah diperoleh, dan $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x(1) \\ x(0) \end{bmatrix}$. Proses iterasi selanjutnya bekerja dengan cara yang sama

Ilustrasi perhitungan

Tinjau Ilustrasi Filter orde 1 berikut:



- 1 Pada awal operasi ($n=0$), misal dipilih sebarang bobot b_0 dan b_1 misal $\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- 2 Nilai $\mu = 0, 1$
- 3 Misalkan input filter adalah $\mathbf{x}(n) = [1 \ 2 \ 2 \ 2]$
- 4 Sinyal referensi $s(n) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$
- 5 Tentukan nilai keluaran tiap iterasi (\mathbf{y}), error (\mathbf{e}), dan bobot setiap iterasi!

Ilustrasi perhitungan - lanjutan

- ➊ Pada awal iterasi (iterasi $n = 0$), telah dipilih:

$$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ➋ Nilai $\mu = 0,1$

- ➌ Input filter adalah $\mathbf{x}(n) = [1 \ 2 \ 2 \ 2]$ sehingga $x(0) = 1$

- ➍ Sinyal referensi $s(n) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$, sehingga $s(0) = 1$

- ➎ Keluaran filter adalah $y(0) = b_0 x(0) = 0 \times 1 = 0$

- ➏ Error $e(0) = s(0) - y(0) = 1 - 0 = 1$

- ➐ Terdapat error sebesar 1, maka bobot filter perlu diupdate untuk iterasi $n=1$:

$$\begin{aligned} \text{➑ } \mathbf{b}_1 &= \mathbf{b}_0 + \mu e_0 \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0,1 \times 1 \times \begin{bmatrix} x(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ilustrasi perhitungan - lanjutan

- 1 dengan demikian diperoleh bobot baru: $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- 2 Untuk iterasi $n=1$, maka input $x(1) = 2$, dan bobot $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- 3 Sehingga diperoleh keluaran (gambar filter sebagai patokan)
 $y(1) = b_0x(1) + b_1x(0) = 0,1 \times 2 + 0 \times 1 = 0,2$
- 4 Error $e(1) = s(1) - y(1) = 1 - 0,2 = 0,8$
- 5 Dengan nilai-nilai ini, maka update bobot untuk iterasi $n=2$ adalah:

$$\begin{aligned}
 \text{6 } \mathbf{b}_2 &= \mathbf{b}_1 + \mu e_1 \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0,1 \times 0,8 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
 &\begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,16 \\ 0,08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,26 \\ 0,08 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ilustrasi perhitungan - lanjutan

- 1 dengan demikian diperoleh bobot baru: $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0,26 \\ 0,08 \end{bmatrix}$
- 2 Untuk iterasi $n=2$, maka input $x(2) = 2$, dan bobot $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0,26 \\ 0,08 \end{bmatrix}$
- 3 Sehingga diperoleh keluaran (gambar filter sebagai patokan)
 $y(2) = b_0x(2) + b_1x(1) = 0,26 \times 2 + 0,08 \times 2 = 0,68$
- 4 Error $e(2) = s(2) - y(2) = 1 - 0,68 = 0,32$
- 5 Dengan nilai-nilai ini, maka update bobot untuk iterasi $n=3$ adalah:
- 6 $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_2 + \mu e_2 \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0,26 \\ 0,08 \end{bmatrix} + 0,1 \times 0,32 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,324 \\ 0,144 \end{bmatrix}$

Ilustrasi perhitungan - lanjutan

Latihan:

- 7 Lanjutkan proses ini sampai dengan iterasi $n=3$, berapa nilai keluaran $y(3)$, $e(3)$ dan nilai \mathbf{b}_4

Ilustrasi perhitungan - lanjutan

Setelah kita selesaikan iterasi tersebut sampai iterasi $n=3$ maka kita peroleh hasil:

❶ $\mathbf{y} = [0 \quad 0,2 \quad 0,68 \quad 0,936]$

❷ $\mathbf{e} = [1 \quad 0,8 \quad 0,32 \quad 0,064]$

- ❸ Terlihat pada iterasi $n=3$, diperoleh bahwa keluaran sudah sangat dekat dengan target yaitu 1 sedangkan error pada iterasi $n=3$ sudah mencapai nilai yang sangat kecil yaitu 0,064

Latihan Soal

- 1 Ulangi lagi soal sebelumnya yaitu filter LMS orde 1, dengan input filter adalah $\mathbf{x}(n) = [1 \ 2 \ 2 \ 2]$
- 2 Sinyal referensi $s(n) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$
- 3 Tentukan nilai keluaran tiap iterasi (\mathbf{y}), error (\mathbf{e}), dan bobot setiap iterasi
- 4 Pada latihan ini gunakan nilai $\mu = 0,2$
- 5 Tuliskan nilai \mathbf{y} , dan \mathbf{e} untuk setiap iterasi.
- 6 Bagaimana perbandingannya dengan soal ilustrasi sebelumnya dengan $\mu = 0,1$