Berpikir Kritis?

Misalkan diketahui bilangan kompleks $z = x + iy$, maka tentukan berapakah z^8!. Hal ini tentu saja dapat diselesaikan dengan mengalikan bilangan kompleks z sebanyak 8 kali. Akan tetapi apakah cara ini yang paling sederhana dan paling efisien?

Tentu saja tidak, pada kesempatan ini kalian akan menemukan formula atau **rumus D'Moivre** yang dapat menyederhanakan proses perkalian di slide sebelumnya!

Perhatikan bahwa untuk setiap bilangan kompleks z dapat kita representasikan dalam bentuk kutub atau polar sebagai berikut:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Jika diketahui bilangan-bilangan kompleks

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

Perkalian antara z_1 dan z_2 diperoleh
$z_1z_2 = r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2))$
Dengan menggunakan sifat $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$
dan $\sin(\theta_1 + \theta_2) = (\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)$, diperoleh

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Hal ini dapat diperumum untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$, sehingga diperoleh

$$z_1z_2...z_n = r_1r_2...r_n(\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2... + \theta_n))$$

Kasus khusus untuk $z_1 = z_2 = ... = z_n = z = x + iy$, maka diperoleh

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Lebih khusus lagi, untuk $r = 1$ diperoleh formula **D'Moivre** sebagai berikut:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Definition 3

Misalkan diketahui bilangan kompleks z dan bilangan kompleks w. Selanjutnya, bilangan kompleks w dikatakan sebagai akar pangkat n dari z jika $w^n = z$ dan dinotasikan dengan $w = z^{\frac{1}{n}}$

Jika $w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$ akar pangkat n dari bilangan kompleks $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, maka dengan adanya kondisi $w^n = z$ diperoleh:

$$\rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

sehingga diperoleh:

$$\rho^n = r \ \text{ dan } \ n\phi = \theta + 2k\pi$$

dengan $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Akibatnya diperoleh

$$\rho = r^{\frac{1}{n}} \text{ dan } \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Hal ini dapat disimpulkan menjadi sebuah teorema berikut ini.

Theorem 4

Jika diketahui bilangan kompleks $z = r(cos\theta + isin\theta)$, maka akar pangkat n dari z adalah bilangan kompleks w dengan sifat

$$w = r^{\frac{1}{n}}[(cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + isin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})],$$

dengan n bilangan asli dan $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Contoh Tentukan akar pangkat 4 dari bilangan -81.
Penyelesaian Misalkan $w = (-81)^{\frac{1}{4}}$, jadi harus dicari penyelesaian persamaan $w^4 = -81$. Dilain pihak, perhatikan bahwa

$$-81 = 81(\cos\pi + i\sin\pi),$$

sehingga

$$\rho^4(\cos^4\phi + i\sin^4\phi) = 81(\cos\pi + i\sin\pi,$$

akibatnya,

$$\rho^4 = 81 \Rightarrow \rho = 3$$

dan

$$\phi = \frac{\pi + 2k\pi}{4}.$$

Oleh sebab itu, akar pangkat 4 dari -81 adalah

$$w_k = 3[\cos(\frac{\pi + 2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi + 2k\pi}{4})]$$

dengan $k = 0, 1, 2, 3.$

Perhatikan formula euler berikut ini

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Dengan demikian bentuk kutub bilangan kompleks dapat dituliskan atau dinotasikan sebagai berikut.

$$z = r3^{i\theta}.$$

Theorem 5

1. $e^{i\theta} e^{i\xi} = e^{i(\theta+\xi)}$
2. $arg\frac{z}{w} = argz - argw.$