

Latihan Soal Relasi, Fungsi, dan Transformasi Geometri

4. Buktikan bahwa relasi-relasi berikut merupakan relasi ekuivalen.

Syarat relasi ekuivalen: Refleksif, Simetris, dan Transitif.

a) " \leq " (kurang dari atau sama dengan) pada himpunan bilangan real \mathbb{R}

Refleksif: $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$ (benar).

Simetris: Jika $x \leq y$, belum tentu $y \leq x$. (salah).

Transitif: Jika $x \leq y$ dan $y \leq z$ maka $x \leq z$ (benar).

\Rightarrow **Bukan relasi ekuivalen.**

b) \equiv (kongruen modulo n) pada himpunan bilangan bulat B

Refleksif: $x \equiv x \pmod{n}$. (benar).

Simetris: Jika $x \equiv y \pmod{n}$, maka $y \equiv x \pmod{n}$. (benar).

Transitif: Jika $x \equiv y \pmod{n}$ dan $y \equiv z \pmod{n}$, maka $x \equiv z \pmod{n}$. (benar).

\Rightarrow **Merupakan relasi ekuivalen.**

c) Kesejajaran ($//$) pada semua garis

Refleksif: Garis g sejajar dengan dirinya sendiri (benar).

Simetris: Jika $g // h$ maka $h // g$ (benar).

Transitif: Jika $g // h$ dan $h // k$ maka $g // k$ (benar).

\Rightarrow **Relasi ekuivalen.**

d) Kongruensi (\cong) pada semua segitiga

Refleksif: Segitiga selalu kongruen dengan dirinya (benar).

Simetris: Jika $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ maka $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ (benar).

Transitif: Jika $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ dan $\triangle DEF \cong \triangle XYZ$ maka $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ (benar).

\Rightarrow **Relasi ekuivalen**

Latihan Soal Relasi, Fungsi, dan Transformasi Geometri

e) Kongruensi (\cong) pada semua sudut

Refleksif: Sudut selalu kongruen dengan dirinya sendiri (benar).

Simetris: Jika $\angle A \cong \angle B$ maka $\angle B \cong \angle A$ (benar).

Transitif: Jika $\angle A \cong \angle B$ dan $\angle B \cong \angle C$ maka $\angle A \cong \angle C$ (benar).

\Rightarrow Relasi ekuivalen.

5. Manakah di antara relasi f dari R ke R berikut ini (R = himpunan bilangan real) yang merupakan fungsi?

a) $f(x,y) = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Ini adalah himpunan titik pada lingkaran.

Satu nilai x bisa berpasangan dengan dua nilai y (positif & negatif).

Bukan fungsi.

b) $f(x) = 1 / (x^2 - x - 2), \forall x \in \mathbb{R}$

Fungsi ini valid kecuali di titik penyebut = 0.

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) \rightarrow \text{tidak terdefinisi pada } x = 2, -1.$$

Untuk domain $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, fungsi ini terdefinisi dengan baik.

\Rightarrow Fungsi.

c) $f(x) = 2x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Linear, selalu menghasilkan satu output untuk tiap x .

\Rightarrow Fungsi.

6. Fungsi f dari $B \rightarrow B$ (B = himpunan bilangan bulat), yang merupakan fungsi bijektif.

a) $f(x) = 2x - 1$

- Hasilnya selalu bilangan ganjil \rightarrow tidak semua bilangan bulat terjangkau.
- Tidak surjektif.

\Rightarrow Bukan Bijektif.

Latihan Soal Relasi, Fungsi, dan Transformasi Geometri

b) $f(x) = 1 - x$

- Untuk setiap bilangan bulat x , hasilnya juga bulat.
- Injektif (berbeda input \rightarrow hasil berbeda).
- Surjektif (setiap bilangan bulat y punya pasangan $x = 1 - y$).

\Rightarrow Bijektif.

c) $f(x) = x^2 + x$

- Tidak injektif ($f(0) = 0$, $f(-1) = 0$).
- Tidak surjektif (nilai negatif tidak mungkin muncul).

\Rightarrow Bukan Bijektif.

7. Fungsi f dari $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang merupakan fungsi bijektif.

a) $f(x) = ax - 1$, $a \in \mathbb{R}$

- Jika $a = 0$, $f(x) = -1$ (konstan) \rightarrow bukan bijektif.
- Jika $a \neq 0$, ini fungsi linear dengan gradien $\neq 0 \rightarrow$ injektif dan surjektif.

\Rightarrow Bijektif untuk $a \neq 0$.

b) $f(x) = x + b$, $b \in \mathbb{R}$

- Fungsi linear dengan gradien = 1.
- Selalu injektif dan surjektif (pergeseran grafik).

\Rightarrow Bijektif untuk semua b .

Latihan Soal Relasi, Fungsi, dan Transformasi Geometri

1. Refleksi terhadap garis g

Relasi:

- $T(P)=P$ jika $P \in g$
- $T(P)=Q$ jika g sumbu PQ

Analisis: Untuk setiap titik P , terdapat tepat satu citra. Ini adalah refleksi terhadap garis g .

Kesimpulan: Ya, T adalah transformasi (bijektif, involutif, isometri).

2. Transformasi relatif titik A

Relasi:

- $T(A)=A$
- Jika $P \neq A$, maka $T(P)=P'$ sehingga P titik tengah AP'

Analisis: Untuk setiap P unik citranya. Citra dapat dituliskan $T(P)=2P-A$.

Kesimpulan: Ya, T adalah transformasi (bijektif, involutif).

3. Transformasi dengan garis g dan titik tengah tegak lurus

Relasi:

- $T(P)=P$ jika $P \in g$
- Jika $P \notin g$, maka $T(P)=Q$ sehingga P titik tengah ruas tegak lurus dari Q ke g

Analisis: Proyeksi kaki tegak lurus H unik di g , sehingga $Q=2P-H$ juga unik.

Kesimpulan: Ya, T adalah transformasi (bijektif, involutif).

4. Transformasi relatif titik tengah A

Relasi:

- $T(A)=A$
- Jika $P \neq A$, maka $T(P)=Q$ sehingga A titik tengah PQ

Analisis: Citra unik, dapat ditulis $Q=2A-P$.

Kesimpulan: Ya, T adalah transformasi (bijektif, involutif).

Latihan Soal Relasi, Fungsi, dan Transformasi Geometri

5. Inversi lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r

Relasi:

- $T(A)=A$
- Jika $P \in L$, maka $T(P)=P$
- Jika $P \notin L$, maka $T(P)=Q$ dengan $AP \cdot AQ=r^2$

Analisis: Ini adalah inversi lingkaran dengan modifikasi di pusat. Untuk setiap $P \neq A$ unik citranya.

Kesimpulan: Ya, T adalah transformasi (involutif, bijektif untuk $P \neq A$).

6. Translasi bergantung tanda koordinat x

Relasi:

- Jika $x \geq 0$, $T(P)=(x+1,y)$
- Jika $x < 0$, $T(P)=(x-1,y)$

Analisis: Setiap titik memiliki citra unik. Namun hasilnya tidak mencakup semua bidang (x di antara -1 dan 1 tidak tercapai).

Kesimpulan: Ya, T adalah transformasi (injektif, tetapi tidak surjektif).

7. Translasi umum $(x,y) \rightarrow (x+a,y+b)$

Relasi: $T(P)=(x+a,y+b)$

Analisis: Translasi standar yang bijektif dan isometri.

Kesimpulan: Ya, T adalah transformasi (bijektif, isometri, inversnya adalah translasi $(x-a,y-b)$).