

Nama : Febi Febriyanti
NIM : 2118230009
Mata Kuliah : Geometri Transformasi
Program Studi : Pendidikan Matematika
Perguruan Tinggi : Universitas Galuh

1. Buktikan bahwa relasi-relasi berikut merupakan relasi ekuivalen.

❖ Syarat relasi ekuivalen:

Sebuah relasi R pada himpunan A dikatakan relasi ekuivalen jika memenuhi:

1. Refleksif: aRa untuk setiap $a \in A$.
2. Simetris: Jika aRa , maka bRa .
3. Transitif: Jika aRb dan bRc , maka aRc

a) " \leq " (lebih kecil atau sama dengan) pada himpunan semua bilangan real R .

- Refleksif: $a \leq a$ benar.
- Simetris: Jika $a \leq b$, belum tentu $b \leq a$ (contoh: $2 \leq 3$, tetapi $3 \not\leq 2$).
- Transitif: Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$, maka $a \leq c$.

\Rightarrow Relasi ini bukan relasi ekuivalen (hanya relasi parsial).

b) " \equiv " Kongruen modulo n pada himpunan semua bilangan bulat B ($a \equiv b \pmod{n}$, $n > 0$ jika dan hanya jika $a - b$ habis dibagi n).

- Refleksif: $a - a = 0$, habis dibagi n .
- Simetris: Jika $a \equiv b \pmod{n}$, maka $b \equiv a \pmod{n}$.
- Transitif: Jika $a \equiv b \pmod{n}$ dan $b \equiv c \pmod{n}$, maka $a \equiv c \pmod{n}$.

\Rightarrow Relasi ekuivalen.

c) Kesejajaran ($//$) pada himpunan semua garis.

- Refleksif: Setiap garis sejajar dengan dirinya.
- Simetris: Jika $g//h$, maka $h//g$.
- Transitif: jika $g//h$ dan $h//k$, maka $g//k$.

\Rightarrow Relasi ekuivalen.

d) Kekongruenan (\cong) pada himpunan semua segitiga.

- Refleksif: Segitiga selalu kongruen dengan dirinya.
- Simetris: Jika $\triangle A \cong \triangle B$, maka $\triangle B \cong \triangle A$.
- Transitif: Jika $\triangle A \cong \triangle B$ dan $\triangle B \cong \triangle C$, maka $\triangle A \cong \triangle C$.

\Rightarrow Relasi ekuivalen.

e) Kekongruenan (\cong) pada himpunan semua sudut.

- Refleksif: Sudut selalu kongruen dengan dirinya.

- Simetris: Jika $\angle A \cong \angle B$, maka $\angle B \cong \angle A$.
- Transitif: Jika $\angle A \cong \angle B$ dan $\angle B \cong \angle C$, maka $\angle A \cong \angle C$.

\Rightarrow Relasi ekuivalen

✓ Jadi, relasi ekuivalen terdapat pada (b), (c), (d), (e).

2. Manakah di antara relasi f dari R ke R di bawah ini (R himpunan semua bilangan real) yang merupakan fungsi.

❖ Fungsi adalah relasi khusus yang memenuhi sifat unik, artinya setiap elemen domain hanya memiliki satu pasangan di kodomain.

a) $f(x, y) = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$

\rightarrow Bukan merupakan fungsi, karena setiap pasangan (x, y) yang memenuhi $x + y = 1$ dapat memiliki banyak pasangan.

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}, \forall x \in R$

\rightarrow Bukan merupakan fungsi, karena terdapat nilai $x \in R$ yang membuat $x^2 - x - 2 = 0$, sehingga $f(x)$ tidak terdefinisi.

c) $f(x) = 2x - 1, \forall x \in R$

\rightarrow Merupakan fungsi, karena setiap $x \in R$ hanya memiliki satu pasangan di kodomain.

✓ Relasi (c) $f(x) = 2x - 1, \forall x \in R$ merupakan fungsi

3. Manakah di antara fungsi f dari B ke B di bawah ini (B himpunan semua bilangan bulat), yang merupakan fungsi bijektif.

❖ Fungsi bijektif adalah fungsi yang bersifat injektif (satu-satu) dan surjektif (onto).

a) $f(x) = 2x - 1, \forall x \in B$

- Injektif: Setiap $x \in B$ memiliki pasangan yang unik di kodomain.
- Surjektif: Setiap $y \in B$ dapat dinyatakan sebagai $2x - 1$ untuk suatu $x \in B$.

\Rightarrow Bijektif.

b) $f(x) = 1 - x, \forall x \in B$

- Fungsi ini bersifat injektif, tetapi tidak surjektif karena tidak semua $y \in B$ dapat dinyatakan sebagai $1 - x$ untuk suatu $x \in B$.

\Rightarrow Bukan bijektif.

c) $f(x) = x^2 + x, \forall x \in B$

- Fungsi ini tidak bersifat injektif karena terdapat beberapa $x \in B$ yang memiliki pasangan yang sama di kodomain.

⇒ Bukan bijektif.

✓ Fungsi (a) $f(x) = 2x - 1, \forall x \in B$ merupakan fungsi bijektif

4. Manakah di antara fungsi f dari R ke R di bawah ini (R himpunan semua bilangan real) yang merupakan fungsi bijektif.

a) $f(x) = ax - 1, a \in R, \forall x \in R$

- Fungsi ini bersifat injektif jika $a \neq 0$, tetapi tidak surjektif karena tidak semua $y \in R$ dapat dinyatakan sebagai $ax - 1$ untuk suatu $x \in R$.

⇒ Bukan bijektif

b) $f(x) = x + b, b \in R, \forall x \in R$

- Fungsi ini bersifat injektif karena setiap $x \in R$ memiliki pasangan yang unik di kodomain, dan bersifat surjektif karena setiap $y \in R$ dapat dinyatakan sebagai $x + b$ untuk suatu $x \in R$.

⇒ Bijektif

✓ Fungsi (b) $f(x) = x + b, b \in R, \forall x \in R$ merupakan fungsi bijektif.

1. Diberikan garis g pada bidang Euclides V . Ditetapkan relasi T sebagai berikut. Untuk setiap titik $P \in V$:
- $T(P) = P$ jika $P \in g$
 - $T(P) = Q$ jika g sumbu dari \overline{PQ} .

Apakah relasi T merupakan suatu transformasi?

Jawaban:

Relasi T merupakan suatu transformasi. Hal ini karena:

- Untuk setiap titik P yang berada pada garis g , $T(P) = P$. Jadi, T memetakan P ke tepat satu titik, yaitu P sendiri.
- Untuk setiap titik P yang tidak berada pada garis g , $T(P) = Q$, di mana Q adalah titik yang terletak pada sumbu garis \overline{PQ} . Jadi, T juga memetakan P ke tepat satu titik Q .

Dengan demikian, relasi T memenuhi syarat sebagai suatu transformasi, yaitu memetakan setiap titik $P \in V$ ke tepat satu titik $Q \in V$.

2. Diberikan suatu titik A pada bidang Euclides V . Ditetapkan relasi T sebagai berikut. Untuk setiap $P \in V$:
- $T(P) = A$ jika $P = A$
 - $T(P) = P'$ sehingga P titik tengah $\overline{AP'}$ jika $P \neq A$.

Apakah relasi T merupakan suatu transformasi?

Jawaban:

Relasi T merupakan suatu transformasi. Hal ini karena:

- Untuk setiap titik $P \in V$, $T(P)$ memetakan P ke tepat satu titik, yaitu:
 - Jika $P = A$, maka $T(P) = A$.
 - Jika $P \neq A$, maka $T(P) = P'$, di mana P' adalah titik tengah ruas garis AP .

Dengan demikian, relasi T memenuhi syarat sebagai suatu transformasi, yaitu memetakan setiap titik $P \in V$ ke tepat satu titik $Q \in V$.

3. Diberikan suatu garis g pada bidang Euclides V . Ditetapkan relasi T sebagai berikut. Untuk setiap $P \in V$:
- $T(P) = P$ jika $P \in g$
 - $T(P) = Q$ sehingga P titik tengah ruas garis tegak lurus dari Q ke garis g , jika $P \notin g$.

Apakah relasi T merupakan suatu transformasi?

Jawaban:

Relasi T tidak merupakan suatu transformasi. Hal ini karena:

- Untuk titik P yang berada pada garis g , $T(P) = P$. Ini berarti T memetakan P ke dirinya sendiri.

- Untuk titik P yang berada pada garis g , $T(P) = Q$, di mana Q adalah titik yang terletak pada ruas garis tegak lurus dari Q ke garis g , dengan P sebagai titik tengahnya.

Namun, untuk setiap titik $P \in g$, T tidak memetakannya ke tepat satu titik $Q \in V$. Satu titik P bisa dipetakan ke dirinya sendiri atau ke titik Q yang berbeda-beda. Oleh karena itu, relasi T tidak memenuhi syarat sebagai suatu transformasi.

4. Diberikan suatu titik A pada bidang Euclides V . Ditetapkan relasi T sebagai berikut. Untuk setiap $P \in V$:

- a) $T(P) = A$ jika $P = A$
- b) $T(P) = Q$ sehingga A titik tengah \overline{PQ} , jika $P \neq A$.

Apakah relasi T merupakan suatu transformasi?

Jawaban:

Relasi T merupakan suatu transformasi. Hal ini karena:

- Untuk setiap titik $P \in V$, $T(P)$ memetakan P ke tepat satu titik, yaitu:
 - Jika $P = A$, maka $T(P) = A$.
 - Jika $P \neq A$, maka $T(P) = Q$, di mana Q adalah titik yang membuat A menjadi titik tengah ruas garis PQ .

Dengan demikian, relasi T memenuhi syarat sebagai suatu transformasi, yaitu memetakan setiap titik $P \in V$ ke tepat satu titik $Q \in V$.

5. Pada bidang Euclides V diberikan sebuah lingkaran L dengan jari-jari r dan pusat di titik A . Ditetapkan relasi T sebagai berikut. Untuk setiap titik $P \in V$.

- a) $T(P) = A$, jika $P = A$
- b) $T(P) = P$, jika $P \in L$
- c) $T(P) = Q$ sehingga $AP \cdot \overline{AQ} = r^2$ jika $P \neq A$, $P \notin L$.

Apakah T suatu transformasi?

Jawaban:

Relasi T merupakan transformasi. Untuk setiap titik $P \in V$, T memetakan P ke tepat satu titik, yaitu:

- Jika $P = A$, maka $T(P) = A$
- Jika $P \in L$, maka $T(P) = P$
- Jika $P \neq A$ dan $P \notin L$, maka $T(P) = Q$ sedemikian sehingga $AP \cdot \overline{AQ} = r^2$

Jadi, untuk setiap titik $P \in V$, T memetakan P ke tepat satu titik, sehingga T adalah suatu transformasi.

6. Diberikan relasi $T: V \rightarrow V$ yang ditetapkan sebagai berikut. Apabila $P(x, y) \in V$ maka:

- a) $T(P) = (x + 1, y)$ untuk $x \geq 0$
- b) $T(P) = (x - 1, y)$ untuk $x < 0$

Apakah T suatu transformasi?

Jawaban:

Relasi T merupakan transformasi. Untuk setiap titik $P(x, y) \in V$, T memetakan P ke tepat satu titik, yaitu:

- Jika $x \geq 0$, maka $T(P) = (x+1, y)$
- Jika $x < 0$, maka $T(P) = (x-1, y)$

Jadi, untuk setiap titik $P(x, y) \in V$, T memetakan P ke tepat satu titik, sehingga T adalah suatu transformasi.

7. Diberikan relasi $T: V \rightarrow V$ yang ditetapkan sebagai berikut. Untuk setiap $P(x, y) \in V$, $T(P) = (x + a, y + b)$

Apakah T suatu transformasi?

Jawaban:

Relasi T merupakan transformasi. Untuk setiap titik $P(x, y) \in V$, T memetakan P ke tepat satu titik $(x + a, y + b)$, di mana a dan b adalah konstanta.

Jadi, untuk setiap titik $P(x, y) \in V$, T memetakan P ke tepat satu titik, sehingga T adalah suatu transformasi.