Refleksi Geser

Pada kegiatan belajar ini Anda akan mempelajari tentang refleksi geser yang merupakan isometri keempat dari isometri-isometri yang Anda pelajari pada mata kuliah Geometri Transformasi. Refleksi geser sebenarnya dapat diperoleh dari komposisi antara isometri-isometri yang telah dipelajari terdahulu, yaitu pencerminan, translasi, dan rotasi. Oleh karena itu, sebelum Anda mempelajari refleksi geser, ingat kembali isometri-isometri yang telah dipelajari pada modul sebelumnya, kemudian cobalah pelajari hasil komposisi isometri-isometri berikut.

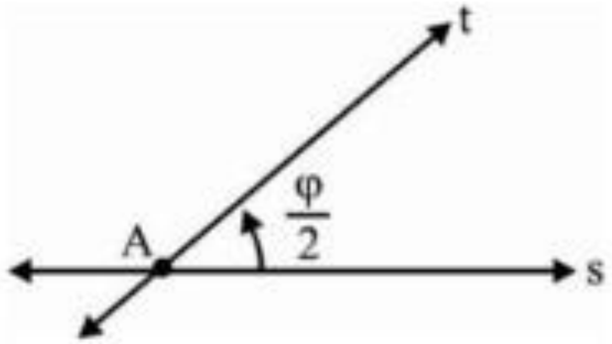
Isometri yang telah dibahas adalah pencerminan, setengah putaran, rotasi, dan translasi. Sebenarnya baru tiga macam isometri yang telah dipelajari karena setengah putaran diartikan sebagai rotasi sejauh 180^o atau pencerminan terhadap titik pusat setengah putaran tersebut.

Pada bahasan modul-modul terdahulu kita telah mengetahui bahwa:

1. komposisi dua translasi adalah sebuah translasi;
2. komposisi dua pencerminan adalah sebuah translasi atau sebuah rotasi;
3. komposisi dua rotasi adalah translasi atau rotasi;
4. komposisi sebuah rotasi dan sebuah translasi adalah sebuah rotasi yang sudut rotasinya sama dengan sudut rotasi yang diketahui.

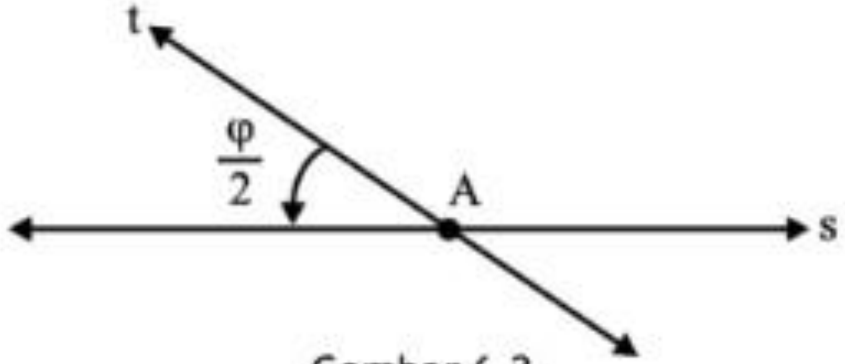
Sekarang akan kita bahas mengenai komposisi antara sebuah rotasi dengan sebuah pencerminan. Anggaplah rotasi $\rho_{A,\varphi}$ dan pencerminan μ_s adalah transformasi-transformasi yang diketahui. **Kasus pertama**, jika $A \in s$. Melalui A buat garis t sehingga sudut dari s ke t adalah $\frac{\varphi}{2}$. Menurut Teorema 5.4 maka $\rho_{A,\varphi} = \mu_t \circ \mu_s$. Komposisi antara $\rho_{A,\varphi}$ dengan μ_s adalah

$$\begin{aligned}\rho_{A,\varphi} \circ \mu_s &= (\mu_t \circ \mu_s) \circ \mu_s \\ &= \mu_t \circ (\mu_s \circ \mu_s) \\ &= \mu_t\end{aligned}$$



Gambar 6.1

Bila komposisi yang dibentuk adalah $\mu_s \circ \rho_{A,\varphi}$, maka kedudukan garis t terhadap s harus dipilih agar dapat menyederhanakan bentuk akhir komposisi, yaitu agar $\rho_{A,\varphi} = \mu_s \circ \mu_t$. Dengan demikian, kita peroleh $\mu_s \circ \rho_{A,\varphi} = \mu_s \circ (\mu_s \circ \mu_t) = (\mu_s \circ \mu_s) \circ \mu_t = \mu_t$

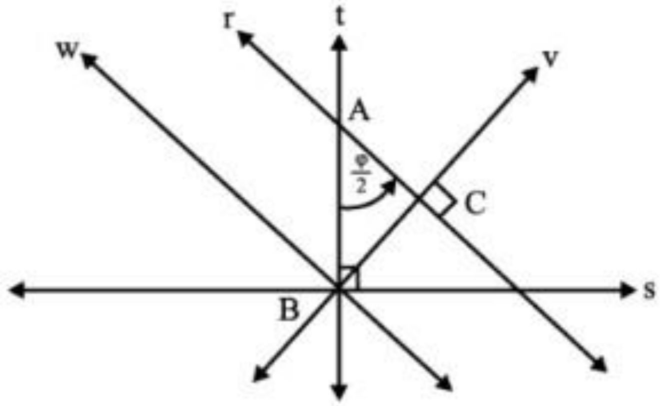


Gambar 6.2

Jelas t harus dipilih seperti pada Gambar 6.2. Jadi, komposisi antara $\rho_{A,\varphi}$ dengan μ_s adalah sebuah pencerminan μ_t dengan t adalah garis melalui titik A dengan $A \in s$.

Kasus kedua, bagaimana jika $A \notin s$?

Jelas untuk kasus ini kondisinya menjadi tak sederhana seperti pada kasus pertama.



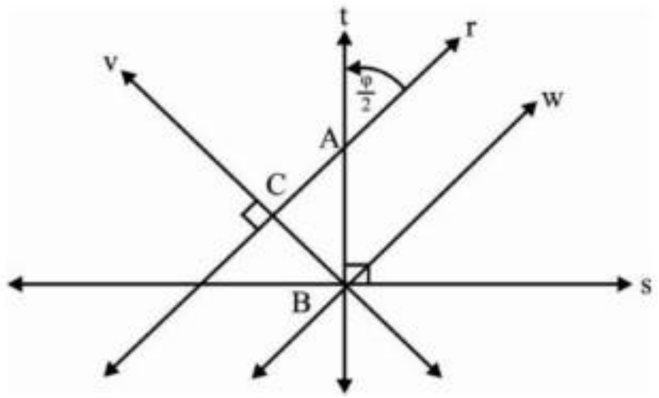
Gambar 6.3

Buat garis t melalui A tegak lurus s di B. Garis r melalui A sehingga besar sudut dari t ke r adalah $\frac{\varphi}{2}$. Menurut Teorema 5.4 $\rho_{A,\varphi} = \mu_r \circ \mu_t$. Kita bentuk komposisi $\rho_{A,\varphi}$ dengan μ_s sebagai berikut.

$\rho_{A,\varphi} \circ \mu_s = (\mu_r \circ \mu_t) \circ \mu_s = \mu_r \circ (\mu_t \circ \mu_s) = \mu_r \circ \sigma_B$, karena $\{B\} = t \cap s$ dan $s \perp t$ (dibuat). Melalui titik B kita buat garis v yang tegak lurus r di C dan garis w yang tegak lurus v juga melalui B. Menurut Teorema 3.2 ada setengah putaran dengan pusat B, sehingga $\sigma_B = \mu_w \circ \mu_v$. Akibatnya $\rho_{A,\varphi} \circ \mu_s = \mu_r \circ \sigma_B = \mu_r \circ (\mu_w \circ \mu_v) = (\mu_r \circ \mu_w) \circ \mu_v$. Karena garis w dan r sejajar dan tegak lurus $\overleftrightarrow{BC}$ maka menurut Teorema 4.3 $\gamma_{2BC} = \mu_r \circ \mu_w$. Jadi, $\rho_{A,\varphi} \circ \mu_s = (\mu_r \circ \mu_w) \circ \mu_v = \gamma_{2BC} \circ \mu_v$, di sini $\{C\} = v \cap r$ dan $\overleftrightarrow{BC}$ //v atau $\overleftrightarrow{BC}$ berimpit v.

Dengan demikian, komposisi pencerminan dilanjutkan dengan rotasi adalah pencerminan terhadap garis v dilanjutkan dengan translasi sejauh 2BC sejajar dengan garis v. Jenis transformasi ini merupakan isometri dasar yang terakhir yang akan kita pelajari, yaitu refleksi geser (*glide reflection*).

Sebelum menuliskan definisi mengenai refleksi geser tersebut, perlu diperiksa pula hasil komposisi antara rotasi $\rho_{A,\varphi}$ dengan pencerminan μ_s, bila komposisinya dibalik. Apakah juga menghasilkan refleksi geser? Untuk itu kita buat garis t melalui A tegak lurus s di B. Garis r melalui A sehingga sudut dari r ke t adalah $\frac{\varphi}{2}$ maka $\rho_{A,\varphi} = \mu_t \circ \mu_r$. Mengapa? Komposisi yang kita bentuk adalah $\mu_s \circ \rho_{A,\varphi}$, sehingga $\mu_s \circ \rho_{A,\varphi} = \mu_s \circ (\mu_t \circ \mu_r) = (\mu_s \circ \mu_t) \circ \mu_r = \sigma_B \circ \mu_r$, karena $\{B\} = s \cap t$ dan $s \perp t$ (di buat) .



Gambar 6.4

Buat garis v melalui B tegak lurus r di C. Garis w dibuat tegak lurus v di B. Akibatnya garis r akan sejajar w. Menurut Teorema 3.2 maka $\sigma_B = \mu_v \circ \mu_w$, sebab $\{B\} = v \cap w$ dan $v \perp w$. Dengan demikian, kita peroleh $\mu_s \circ \rho_{A,\varphi} = \sigma_B \circ \mu_r = (\mu_v \circ \mu_w) \circ \mu_r = \mu_v \circ (\mu_w \circ \mu_r)$. Garis w melalui B, garis r melalui C, w dan r sejajar, w dan r masing-masing tegak lurus v (sengaja dibuat tegak lurus), maka menurut Teorema 4.3 $\mu_w \circ \mu_r = \gamma_{2CB}$. Jadi, $\mu_s \circ \rho_{A,\varphi} = \mu_v \circ (\mu_w \circ \mu_r) = \mu_v \circ \gamma_{2CB}$, di sini $\{C\} = w \cap r$ dan $\overrightarrow{BC}$ // v atau $\overrightarrow{BC}$ berimpit dengan v.

Jelaslah bahwa komposisi rotasi dengan pencerminan adalah suatu translasi sejauh 2 $\overrightarrow{CB}$ sejajar dengan garis v dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis v. Komposisi ini selanjutnya akan diberi nama, refleksi geser yang merupakan isometri keempat yang dibahas dalam mata kuliah Geometri Transformasi.

Definisi 6.1 Pemetaan γ disebut refleksi geser apabila ada garis v dan sebuah ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$ yang sejajar v sehingga $\gamma = \gamma_{AB} \circ \mu_v$, dengan v disebut sumbu refleksi geser.

Refleksi geser ini juga merupakan isometri, seperti halnya refleksi, translasi, dan rotasi. Hal ini diperkuat oleh Teorema 6.1.

Teorema 6.1 Refleksi geser adalah sebuah transformasi.

Bukti:
Untuk membuktikan teorema di atas kita akan menggunakan sifat-sifat komposisi dari transformasi γ_{AB} dan μ_v. Translasi γ_{AB} sudah dibuktikan merupakan transformasi, demikian juga refleksi μ_v. Menurut teorema, komposisi transformasi adalah juga transformasi. Jadi, karena $\gamma = \gamma_{AB} \circ \mu_v$ maka γ adalah transformasi.

Teorema 6.2 Refleksi geser adalah sebuah isometri.

Bukti:
Teorema di atas dapat juga menggunakan definisi dari komposisi $\gamma_{AB} \circ \mu_v$. Anda diminta untuk membuktikannya. Petunjuk: Anda periksa syarat surjektif dan injektif dari $\gamma_{AB} \circ \mu_v$ tersebut.

Sekarang akan kita perlihatkan bahwa γ adalah isometri.
Karena $\gamma = \gamma_{AB} \circ \mu_v$, maka apabila P dan Q adalah dua titik tertentu. Kita tentukan peta-petanya oleh $\gamma = \gamma_{AB} \circ \mu_v$ sebagai berikut.
$(\gamma_{AB} \circ \mu_v)(P) = \gamma_{AB}[\mu_v(P)] = P''$ dan $(\gamma_{AB} \circ \mu_v)(Q) = \gamma_{AB}[\mu_v(Q)] = Q''$. Misalkan $\mu_v(P) = P'$ dan $\mu_v(Q) = Q'$. Akibatnya $\gamma_{AB}(P') = P''$ dan $\gamma_{AB}(Q') = Q''$. Karena μ_v isometri (menurut teorema) maka $PQ = P'Q'$. Juga karena γ_{AB} isometri (menurut teorema) maka $P'Q' = P''Q''$. Dari dua hal itu (dengan menggunakan sifat transitif), kita peroleh $PQ = P''Q''$. Ini berarti bahwa γ adalah isometri.

Termasuk isometri langsung atau lawankah refleksi geser tersebut? Untuk menjawab pertanyaan di atas kita perlihatkan dahulu komposisi translasi γ_{AB} dengan pencerminan μ_v sebagai berikut.

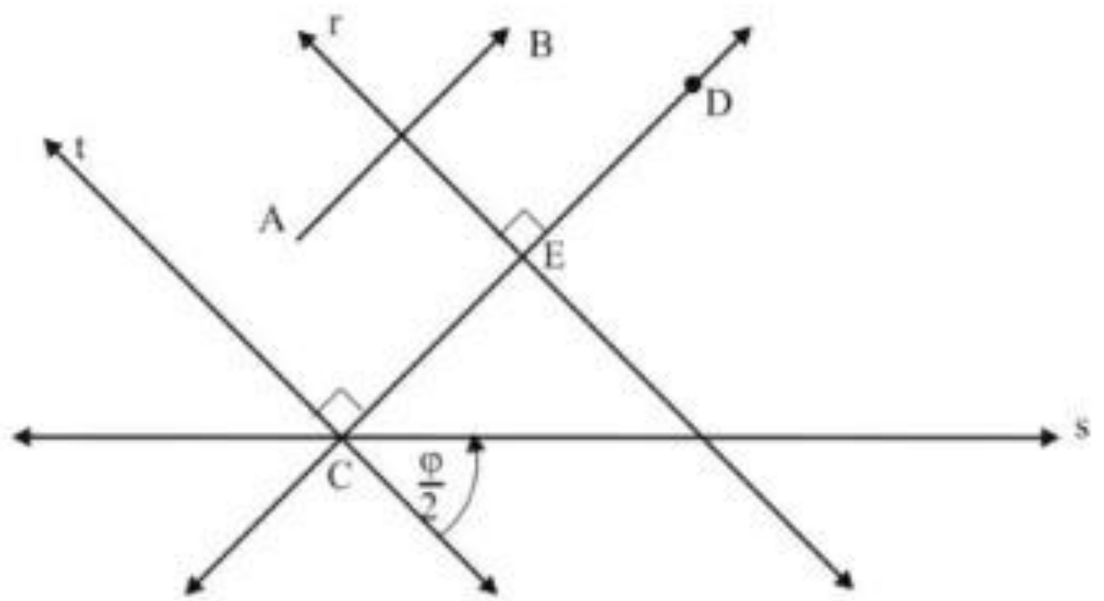
Karena translasi merupakan isometri langsung dan pencerminan merupakan isometri lawan (menurut sifat kedua isometri tersebut), maka komposisi $\gamma_{AB} \circ \mu_v$ merupakan isometri lawan (menurut teorema). Jadi, γ merupakan isometri lawan. Berdasarkan hal-hal itulah, terbukti teorema berikut.

Teorema 6.4 Komposisi refleksi dengan rotasi yang pusatnya tidak pada garis yang dikomposisikan adalah refleksi geser.

Teorema 6.5 (Teorema Akibat) Jika ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$ tidak tegak lurus terhadap garis s yang diketahui, maka komposisi translasi γ_{AB} dengan refleksi μ_s adalah refleksi geser.

Bukti:

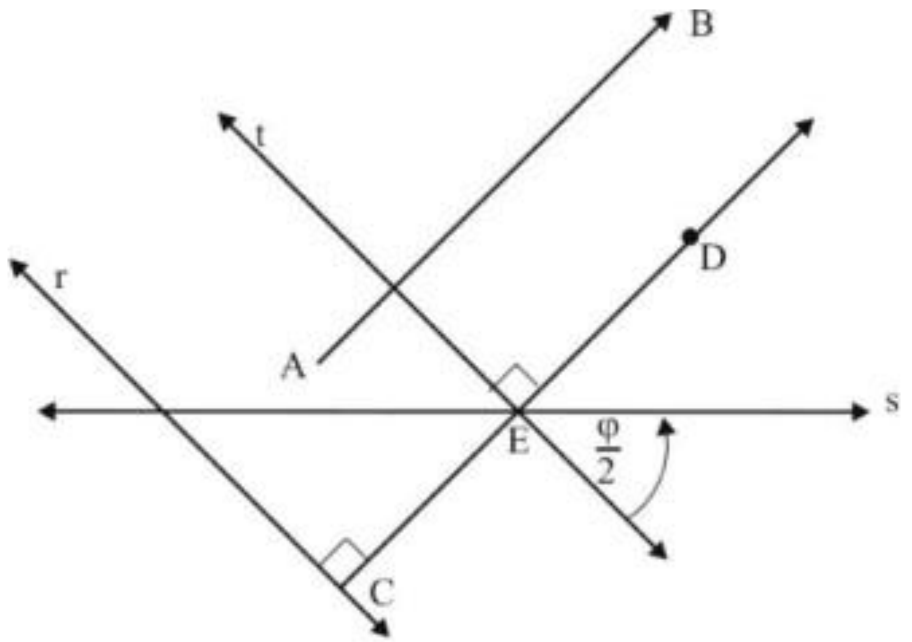
Buat titik $C \in s$ dan $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. Bila E adalah titik tengah $\overline{CD}$, buat garis t melalui C dan garis r melalui E masing-masing tegak lurus $\overleftrightarrow{CD}$.



Gambar 6.5

Menurut teorema $\gamma_{AB} = \mu_r \circ \mu_t$ sehingga $\gamma_{AB} \circ \mu_s = (\mu_r \circ \mu_t) \circ \mu_s = \mu_r \circ (\mu_t \circ \mu_s) = \mu_r \circ \rho_{C,\varphi}$ dengan φ adalah 2 kali ukuran sudut dari garis s ke garis t. Menurut Teorema 6.4 $\mu_r \circ \rho_{C,\varphi}$ adalah refleksi geser.

Bagaimana bila komposisinya yang dibentuk adalah $\mu_s \circ \gamma_{AB}$? Untuk komposisi ini kita harus mengubah posisi r dan t agar komposisinya dapat disederhanakan. Buatlah titik $E \in s$ sehingga E tengah-tengah segmen berarah $\overrightarrow{CD}$ di mana $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. Kemudian buat garis r melalui C dan garis t melalui E yang masing-masing tegak lurus $\overleftrightarrow{CD}$.



Gambar 6.6

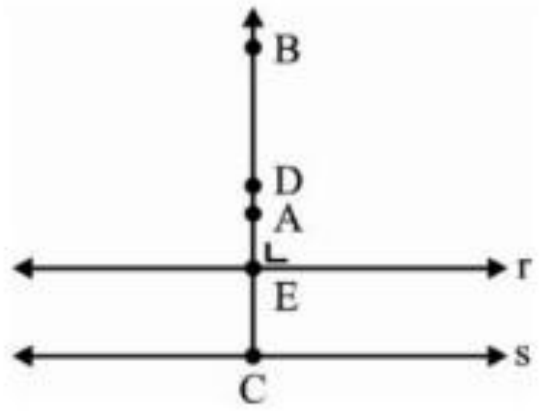
Menurut Teorema 4.3, $\gamma_{AB} = \mu_t \circ \mu_r$.

Sehingga $\mu_s \circ \gamma_{AB} = \mu_s \circ (\mu_t \circ \mu_r) = (\mu_s \circ \mu_t) \circ \mu_r = \rho_{E,\varphi} \circ \mu_r$ dengan φ adalah 2 kali ukuran sudut dari t ke s. Menurut Teorema 6.4 $\rho_{E,\varphi} \circ \mu_r$ adalah refleksi geser.

Teorema 6.6 Jika ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$ tegak lurus terhadap garis s yang diketahui, maka komposisi translasi γ_{AB} dengan refleksi μ_s adalah pencerminan.

Bukti:

Buat titik C pada s dan buat $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. Bila E titik tengah $\overline{CD}$, buatlah garis r tegak lurus $\overleftrightarrow{CD}$ melalui E.

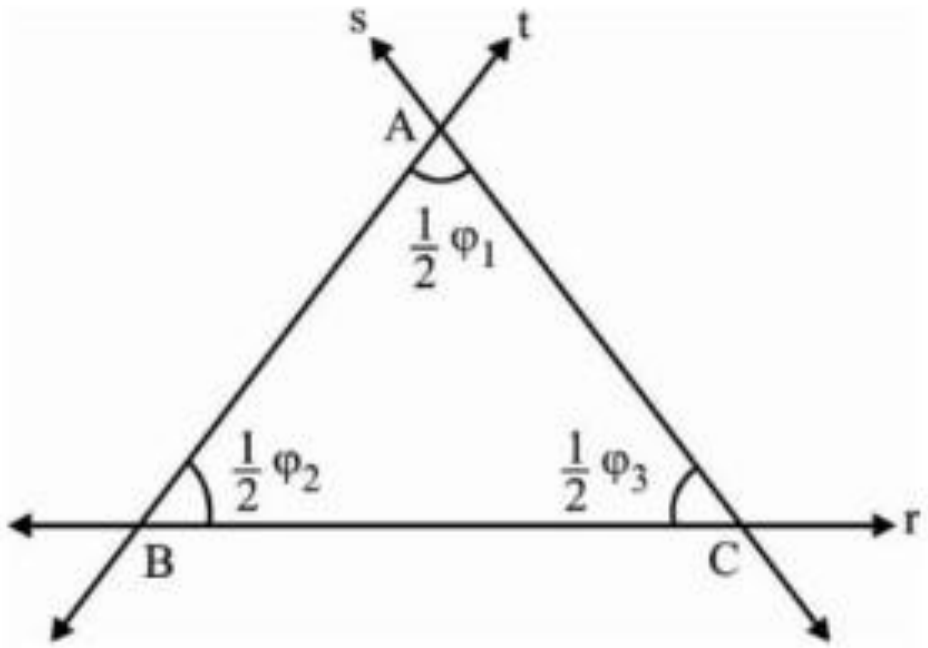


Gambar 6.7

Teorema 6.7 Misal diketahui tiga buah garis r, s, dan t yang ketiganya tidak kongkuren (kongkuren = melalui satu titik) dan tidak ketiganya sekaligus sejajar, maka komposisi refleksi terhadap ketiga garis itu adalah suatu refleksi geser.

Bukti:

Andaikan komposisi tiga pencerminan tersebut adalah $\mu_r \circ \mu_s \circ \mu_t$. Ada dua kasus yang dapat terjadi, yaitu ketiga garis tersebut tak ada yang sejajar dan dua di antara ketiga garis tersebut sejajar.



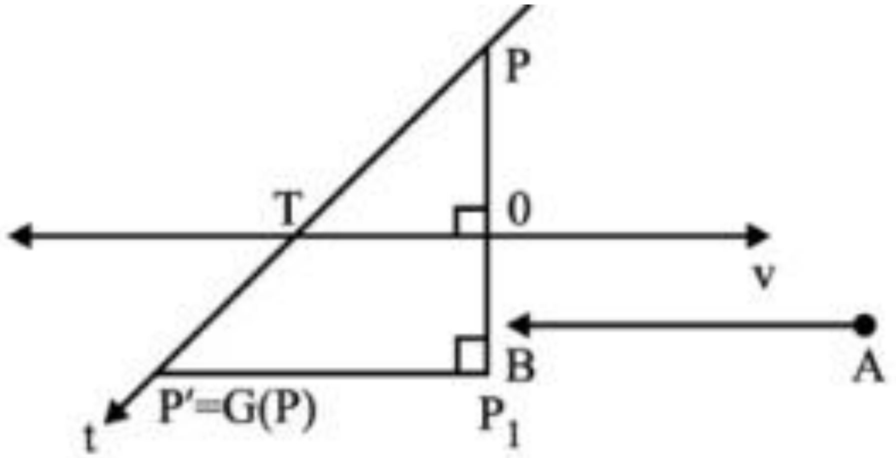
Gambar 6.8

Kasus 1. Ketiga garis tak ada yang sejajar. Misal $\{A\} = s \cap t$, $\{B\} = t \cap r$, dan $\{C\} = r \cap s$ dengan $A \neq B \neq C$. Menurut teorema, karena s dan t berpotongan di A dan menyudut $\frac{1}{2}\varphi_1$ maka $\rho_{A,\varphi_1} = \mu_s \circ \mu_t$. Sehingga $\mu_r \circ \mu_s \circ \mu_t = \mu_r \circ \rho_{A,\varphi_1}$. Menurut teorema, $\mu_r \circ \rho_{A,\varphi_1}$ adalah refleksi geser. Anda diminta untuk mencoba sendiri bila menggunakan ρ_{B,φ_2} dan ρ_{C,φ_3}. Dengan menggunakan rotasi ini, juga akan diperoleh refleksi geser.

Teorema 6.8 Diberikan γ refleksi geser dan P adalah sebarang titik. Bila v sumbu refleksi geser γ maka v melalui titik tengah $\overline{PP'}$ dengan $P' = \gamma(P)$.

Bukti:

Misal $\gamma = \gamma_{AB} \circ \mu_v$ dengan $v \parallel \overleftrightarrow{AB}$, dan $\mu_v(P) = P_1$.
$\gamma_{AB}(P_1) = \gamma_{AB} \circ \mu_v(P) = \gamma(P) = P'$. Menurut definisi maka $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{P_1P'}$. Buat garis t melalui P′ dan P atau $t = \overleftrightarrow{P'P}$. Karena $\overleftrightarrow{AB} \parallel v$ dan t dibuat melalui P′, maka menurut teorema t memotong v. Misal $t \cap v = \{T\}$. Akan ditunjukkan bahwa T tengah-tengah $\overline{PP'}$. Perhatikan Gambar 6.10.



Gambar 6.10

$\Delta POT \sim PP_1P'$ (sd, sd, sd). Akibatnya $PO : PP_1 = PT : PP'$ atau $PT : PP' = 1:2$. Ini berarti T adalah tengah-tengah $\overline{PP'}$. Jadi, terbuktilah bahwa sumbu refleksi geser melalui titik tengah segmen yang ujung-ujungnya titik tertentu dan bayangannya oleh refleksi geser tersebut.

latihan soal

1) Jika γ merupakan komposisi translasi γ_{AB} dengan pencerminan μ_s, di mana $\overleftrightarrow{AB} // s$, tentukan sumbu dari γ!
2) Jika γ refleksi geser, tunjukkan bahwa γ isometri lawan!
3) Diberikan γ refleksi geser dan $\gamma(P) = P'$ dengan garis v adalah sumbu refleksi geser. Apakah garis v melalui titik tengah $\overline{PP'}$?
4) Diketahui $A(1, 2)$, $B(3, 5)$, $t = \{(x, y) | x = 0\}$ dan $\gamma = \gamma_{AB} \circ \mu_t$.
   Tentukan $\gamma((4, -2))$!
5) Diketahui $A(2, -3)$, $B(6, 4)$, dan $\gamma((1, 2)) = (5, 9)$.
   Tentukan sumbu refleksi geser γ!

Terima Kasih