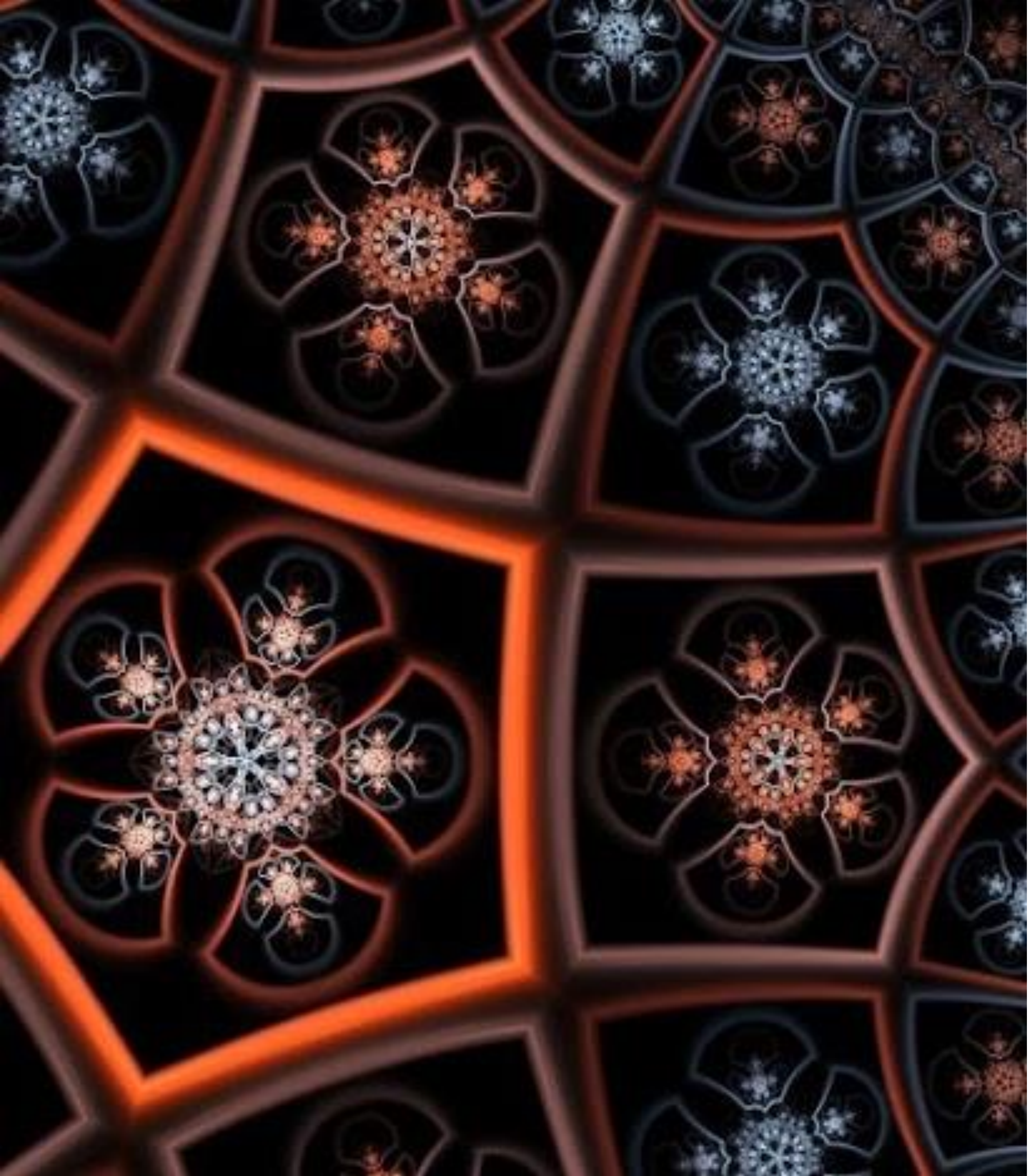


Pembelajaran
Digital Kolaboratif

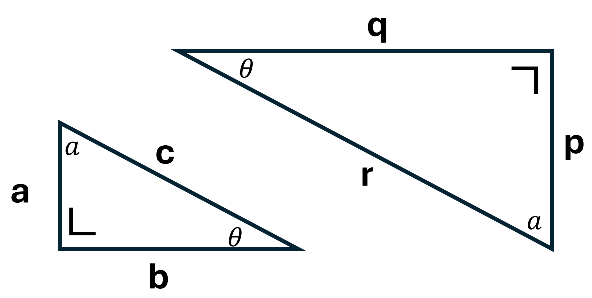
PEMBELAJARAN DIGITAL KOLABORATIF
GEOMETRI TRANSFORMASI
UNIVERSITAS GALUH – UNIVERSITAS SILIWANGI

SIMILARITAS
(Pertemuan-13)
20 November 2025

Dosen: Dr. Eko Yulianto

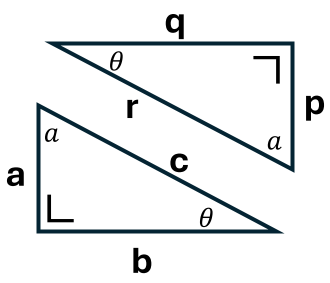
❖ Pengantar

Sebelumnya pada Geometri Euclid kita mengenal istilah **"kesebangunan"**



Dua objek yang memiliki bentuk yang sama dikatakan sebangun (ukuran boleh beda)

Sebangun
- Sudut pada kedua bangun sama $(\alpha, \theta, \llcorner)$
- $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$



Kongruen
- Sudut sama $(\alpha, \theta, \llcorner)$
- Ukuran sama
  $a = p$
  $b = q$
  $c = r$

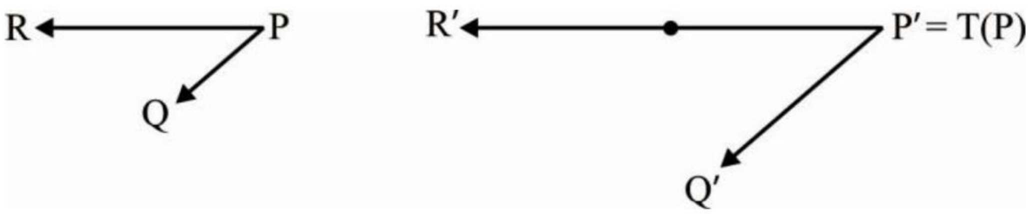
❖ Coba perhatikan

Apa kaitan antara kesebangunan, kongruensi, dan transformasi?

- *Kongruensi merupakan isometri*
- *Kesebangunan merupakan transformasi, belum tentu isometri*

❖ Definisi 1

Transformasi T disebut kesebangunan jika dan hanya jika ada konstanta k > 0 sehingga untuk setiap titik P dan Q berlaku: P'Q' = k (PQ) dengan P'=T(P) dan Q'=T(Q).



Pada saat apa kesebangunan merupakan isometri?

Jawab: Saat k = 1

❖ Teorema 1

Jika T kesebangunan maka:

(1) T memetakan garis pada garis

(2) T mengawetkan ukuran sudut

(3) T mengawetkan kesejajaran

❖ Bukti Teorema 1

(1) T memetakan garis pada garis

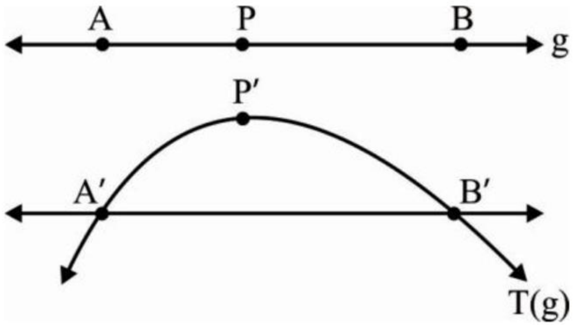
- Perhatikan:
  - Andaikan g garis yang memuat titik A dan B dengan $A \neq B$
  - Misalkan $A' = T(A)$ dan $B' = T(B)$
- Akan dibuktikan bahwa $T(g) = \overleftrightarrow{A'B'}$ dengan $T(g) = \{y | y = T(x), \forall x \in g\}$
- Perhatikan bahwa

$$T(g) = \overleftrightarrow{A'B'} \begin{cases} (a).\ \ T(g) \subseteq \overleftrightarrow{A'B'} \\ (b).\ \ \overleftrightarrow{A'B'} \subseteq T(g) \end{cases}$$

$(a).\ \ T(g) \subseteq \overleftrightarrow{A'B'}$

Ambil $P' \in T(g)$ berarti ada $P \in g$ sehingga $T(P) = P'$

Kasus 1, misal P antara A dan B



Maka $AP + PB = AB$

Ingat kita telah mendefinisikan bahwa

$$\left.\begin{aligned} A' &= T(A) \\ B' &= T(B) \\ C' &= T(C) \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} A'P' &= k(AP) \\ B'P' &= k(BP) \end{aligned}\right\} \quad A'P' + P'B' = k(AP) + k(PB) = k(AP + PB) = k(AB)$$

$$k(AB) \longrightarrow A'B' \longrightarrow A'P' + P'B' = A'B'$$

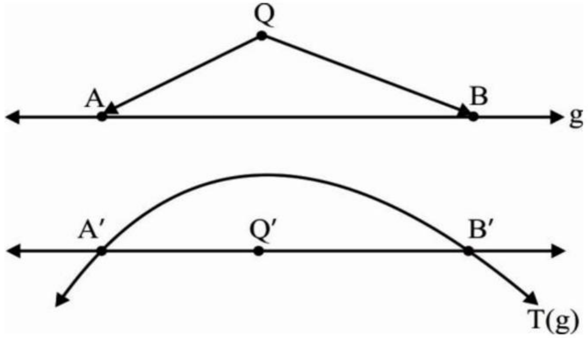
Dengan kata lain, A', P', dan B' segaris
Jadi $P' \in \overleftrightarrow{A'B'}$. Artinya $T(g) \subseteq \overleftrightarrow{A'B'}$

Kasus 2 (misal A antara B dan P) dan kasus 3 (misal B antara A dan P) coba sendiri

$(b).\quad \overleftrightarrow{A'B'} \subseteq T(g)$

- Ambil $Q' \in \overleftrightarrow{A'B'}$
- Ingat di bagian awal, karena T suatu transformasi T surjektif. Artinya terdapat Q sehingga $Q' = T(Q)$
- Andaikan Q' antara A' dan B' maka $A'Q' + Q'B' = A'B'$
- **Andaikan $\boldsymbol{Q}$ bukan elemen $\boldsymbol{g}$ maka** $AQ + QB > AB$
- Kalikan kedua ruas dengan $k > 0$ diperoleh

$$k(AQ + QB) > k(AB)$$
$$k(AQ) + k(QB) > k(AB)$$
$$A'Q' + Q'B' > A'B'$$



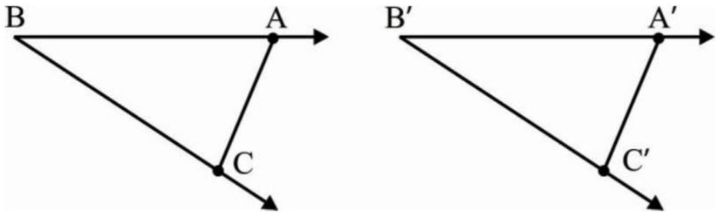
- Lihat, ini bertentangan dengan dengan akibat Q' antara A' dan B'. Artinya, pengandaian **$\boldsymbol{Q}$ bukan elemen $\boldsymbol{g}$ salah**. Haruslah Q elemen g atau $Q' \in T(g)$

- Karena setiap kali kita mengambilQ′ $\in \overleftrightarrow{A'B'}$ kita berhasil menunjukkan $Q' \in T(g)$, berarti $\boldsymbol{\overleftrightarrow{A'B'} \subseteq T(g)}$

➢ **Karena terbukti $\boldsymbol{T(g) \subseteq \overleftrightarrow{A'B'}}$ dan $\boldsymbol{\overleftrightarrow{A'B'} \subseteq T(g)}$ maka $\boldsymbol{T(g) = \overleftrightarrow{A'B'}}$**

(2) T mengawetkan ukuran sudut

- Perhatikan gambar berikut



- Andaikan $T(\angle ABC) = \angle A'B'C'$
- Menurut (1) yang telah kita buktikan,

$$T(\overleftrightarrow{\boldsymbol{BA}}) = \overleftrightarrow{\boldsymbol{B'A'}}$$
$$T(\overleftrightarrow{\boldsymbol{BC}}) = \overleftrightarrow{\boldsymbol{B'C'}} \quad \Rightarrow \quad T(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$$
$$T(\overleftrightarrow{\boldsymbol{AC}}) = \overleftrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}$$

- Karena T kesebangunan, maka $A'B' = k(AB),\ A'C' = k(AC)$ dan $B'C' = k(BC)$

- Dengan menggunakan teorema kesebangunan yang unsur-unsurnya (sisi, sisi, sisi), kita simpulkan bahwa

  $\Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$

- Akibatnya,

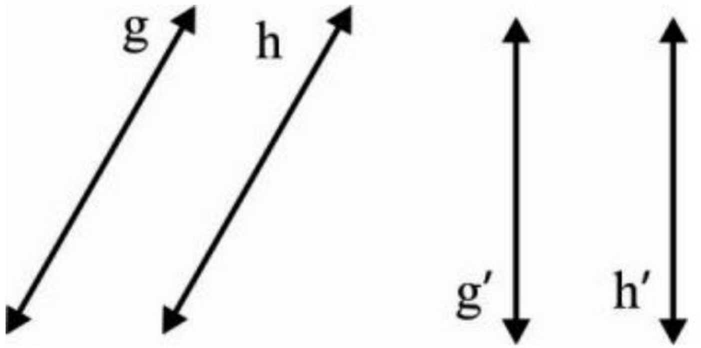
  $\angle A'B'C' \cong \angle ABC$

  $atau$

  $\mathrm{m}\angle A'B'C' \cong m\angle ABC$

  $atau$

  $T(\angle ABC) = T(\angle A'B'C')$



(3) T mengawetkan kesejajaran

- Diketahui $g \parallel h$, $T(g) = g'$, dan $T(h) = h'$
- Akan dibuktikan $g' \nparallel h'$
- Bukti:
  - Andaikan $g' \parallel h'$
  - Misalkan $X = g' \cap h'$

  $\boxed{X \in g'}$ dan $\boxed{X \in h'}$

  Artinya, $\exists Y \in g \ni T(Y) = X$

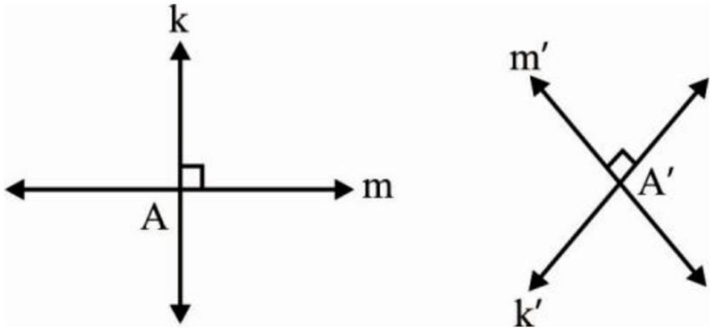
  Artinya, $\exists Z \in h \ni T(Z) = X$

  - Dari 2 hal tersebut, maka $T(Y) = T(Z)$
  - Karena T kesebangunan maka T merupakan transformasi dan T pastilah surjektif
  - $T(Y) = T(Z)$ maka $Y = Z$
  - Karena $Y \in g$ dan $Z \in h$ dan $Y = Z$ maka Z $\in (g \cap h)$ atau Y $\in (g \cap h)$
  - Artinya, g dan h berpotongan (ini kontradiksi dengan yang diketahui $g \parallel h$)
- $\therefore$ Pengandaian $g' \nparallel h'$ salah, haruslah $g' \parallel h'$

Lemma 1

Kesebangunan mengawetkan ketegaklurusan dua buah garis

Bukti Lemma 1



- Ambil garis $k \perp m$ sehingga berpotongan di A
- Ingat, sebelumnya sudah dibuktikan bahwa kesebangunan mengawetkan ukuran sudut
- Karena

$$\left.\begin{array}{l} T(k) = k' \\ T(m) = m' \\ k \perp m \end{array}\right\} \text{Sudut antara } k' \text{ dan } m' = 90^\circ$$

$k' \perp m'$

$\therefore$ *T mengawetkan ketegaklurusan 2 garis*

Lemma 2

Jika T dan L kesebangunan maka TL juga kesebangunan

Bukti Lemma 2

- Menurut definisi, jika T *dan* L *kesebangunan* maka T *dan* L merupakan transformasi
- Komposisi 2 transformasi adalah transformasi
- Karena T *dan* L transformasi maka TL juga transformasi
- Akan ditunjukkan TL adalah kesebangunan, artinya ada scalar $k > 0 \ni \ \forall(P, Q)$ berlaku $P"Q" = k(PQ)$ dengan $P" = TL(P)$ dan Q" $= TL(Q)$
- Bukti:
  - Misalkan $L(P) = P'$ dan $L(Q) = Q'$
  - Karena L kesebangunan maka $P'Q' = t(PQ), t > 0$
  - Kita tahu bahwa $TL(P) = T\big(L(P)\big) = T(P') = P"$ dan $TL(Q) = T\big(L(Q)\big) = T(Q') = Q"$
  - Karena T kesebangunan maka $P"Q" = l(P'Q'), l > 0$
  - Dari $P'Q' = t(PQ)$ dan $P"Q" = l(P'Q')$ diperoleh hubungan $P"Q" = l\big(t(PQ)\big)$ atau $P"Q" = lt(PQ)$
  - Karena $l > 0$ *dan* $t > 0$ maka $lt > 0$. Ingat, TL adalah kesebangunan