Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya

DEPARTEMEN TEKNIK FISIKA - FTI

KARAKTERISTIK FUNGSI DISTR PROB. HASIL TRANSFORMASI VAR. ACAK

Oleh: Aulia Siti Aisjah

Karakteristik Fs Transformasi VARIABEL ACAK

Capaian Pembelajaran:

Mampu menentukan karakteristik dari fungsi transformasi Variabel acak

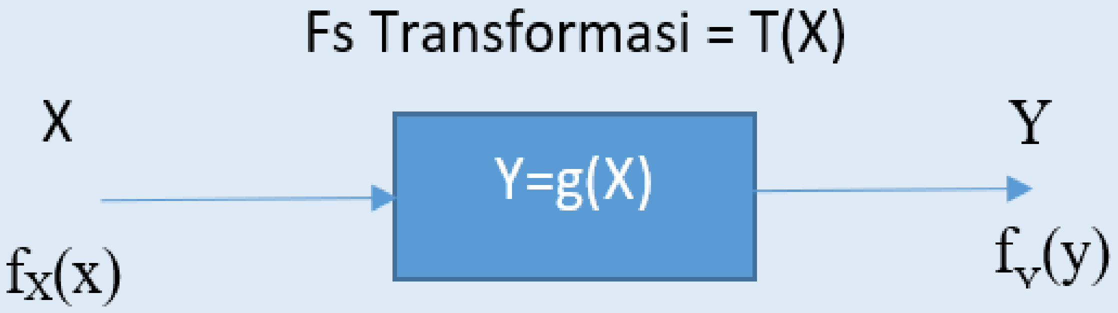
Kajian:

1. **Fungsi Transformasi Variabel acak**
2. **Karakteristik Fungsi Transformasi Variabel Acak**

Transformasi Variabel Acak

Telah dipelajari tentang definisi dari variabel acak. Variabel acak ini dapat bertransformasimenjadi variabel acak yang baru / variabel acak lain dengan suatu fungsi transformasi T(X)

Perharikan ilustrasi gambar berikut,

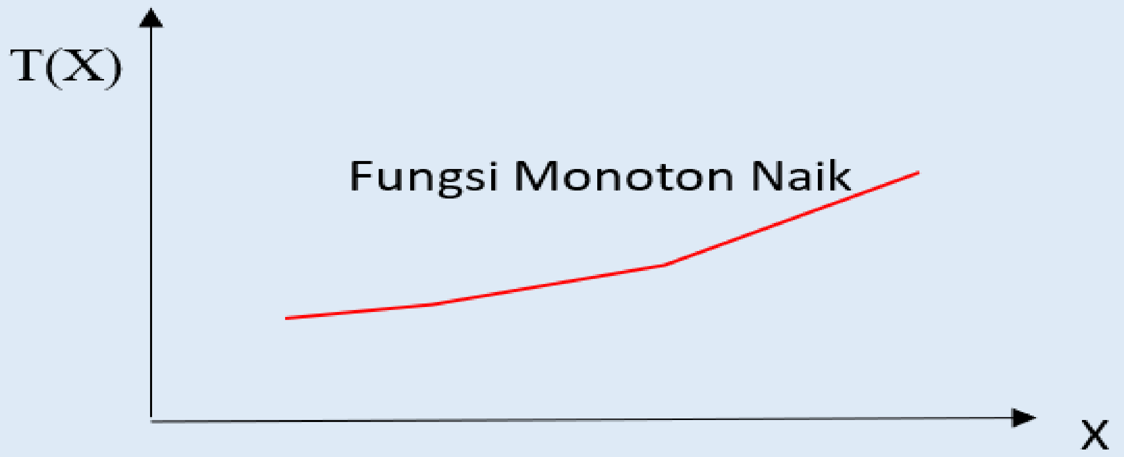


Ada 3 kasus untuk variabel acak baru Y:

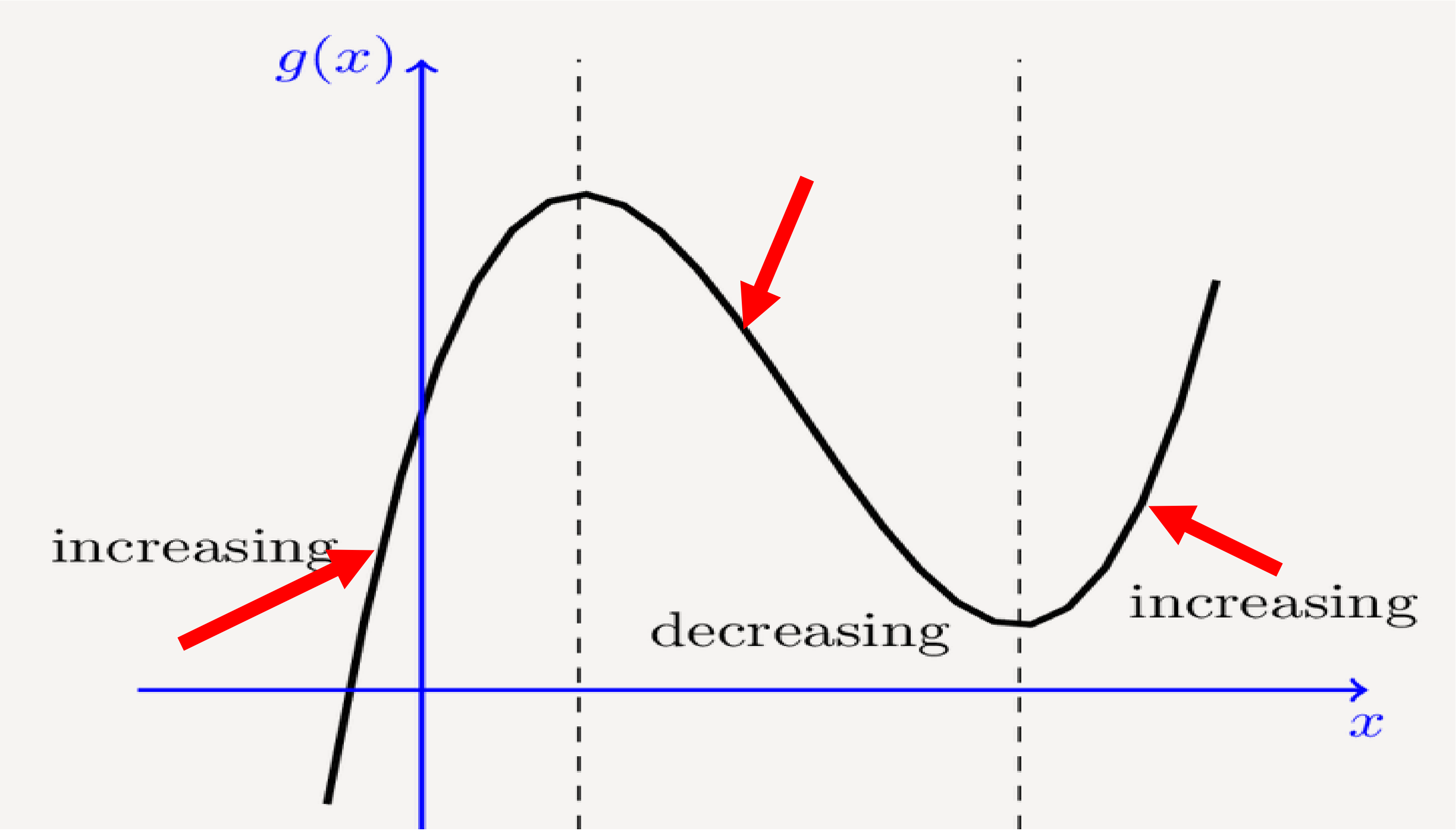
1. X kontinyu dan T adalah kontinyu, dan secara monoton akan bernilai naik atau turun sesuai dengan nilai X.
2. X kontinyu dan T kontinyu tetapi tidak terjadi fungsi yang monoton
3. X diskrit dan T adalah fungsi kontinyu.

Transformasi monoton dari variabel acak kontinyu

Transformasi dikatakan monoton naik jika $T(x_1) < T(x_2)$ untuk $x_1 < x_2$. Dan monoton turun bila $T(x_1) > T(x_2)$ untuk $x_1 > x_2$.



Transformasi dikatakan monoton naik jika $T(x_1) < T(x_2)$ untuk $x_1 < x_2$. Dan monoton turun bila $T(x_1) > T(x_2)$ untuk $x_1 > x_2$.



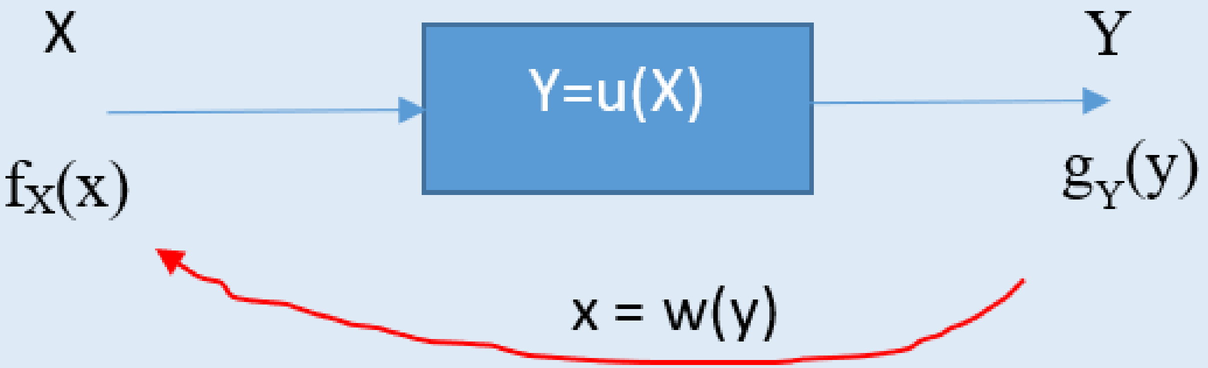
Perhatikan hubungan antara fungsi disribusi probabilitas antara X dan Y,

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Atau dituliskan dalam bentuk:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}$$

Bila dinyatakan secara umum, terjadi fungsi transformasi balik, yang ditunjukkan dalam bentuk ilustrasi gambar di bawah, dengan X dapat diperoleh dari hasil transformasi w(y),



Diketahui var. acak dg fs distr.

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2 & |x| \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Tentukan:

a. Konstanta c
b. Tentukan E(X) dan Var (X)
c. Tentukan Prob: P (X ≥ 1/2)

Ingat Prob. total

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)du \\ &= \int_{-1}^{1} cu^2 du \\ &= \frac{2}{3}c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-1}^{1} u f_X(u)du \\ &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} u^3 du \\ &= 0. \end{aligned}$$

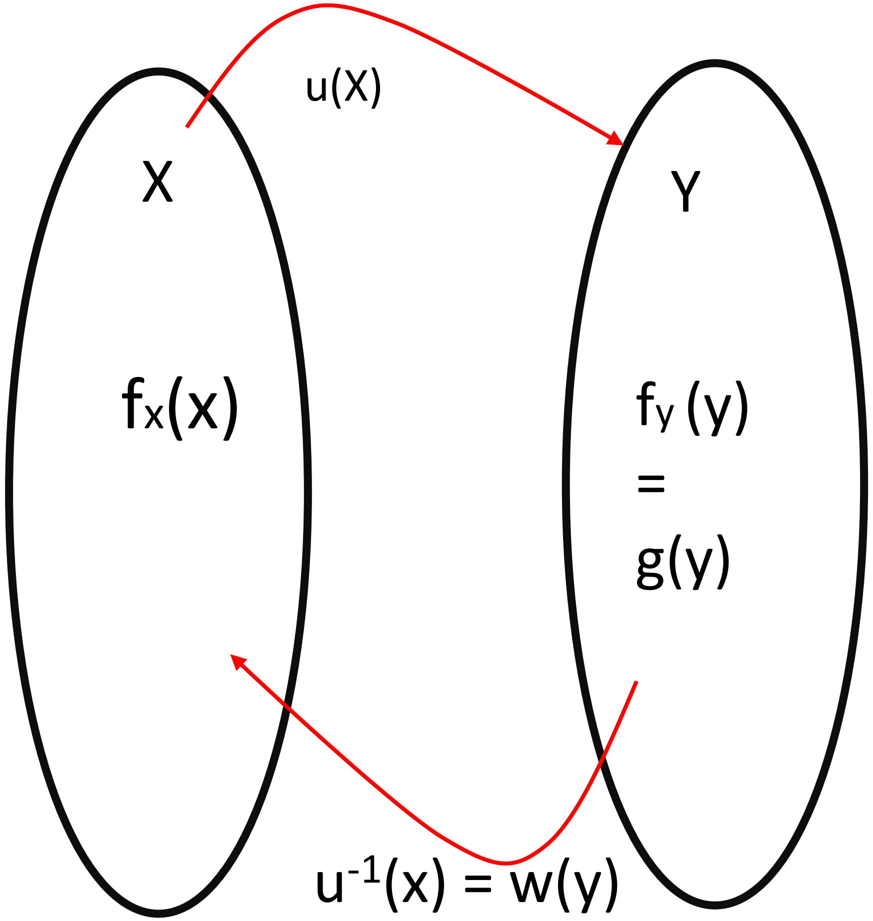
$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2 &= EX^2 \\ &= \int_{-1}^{1} u^2 f_X(u)du \\ &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} u^4 du \\ &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

$$P(X \ge \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 dx = \frac{7}{16}.$$

Var. acak Diskrit

Suppose that X is a **discrete** random variable with probability distribution $f(x)$. Let $Y = u(X)$ define a one-to-one transformation between the values of X and Y so that the equation $y = u(x)$ can be uniquely solved for x in terms of y, say $x = w(y)$. Then the probability distribution of Y is

$$g(y) = f[w(y)].$$



$Y = u(X)$

Setiap nilai $y = u(x) \rightarrow y_1 = u(x_1)$

$g(y) = f\,(w(y)$

Karakterisitik fs transformasi Var. acak

1. $g(y) \geq 0$

2. $\sum_{all\ y} g(y) = 1$

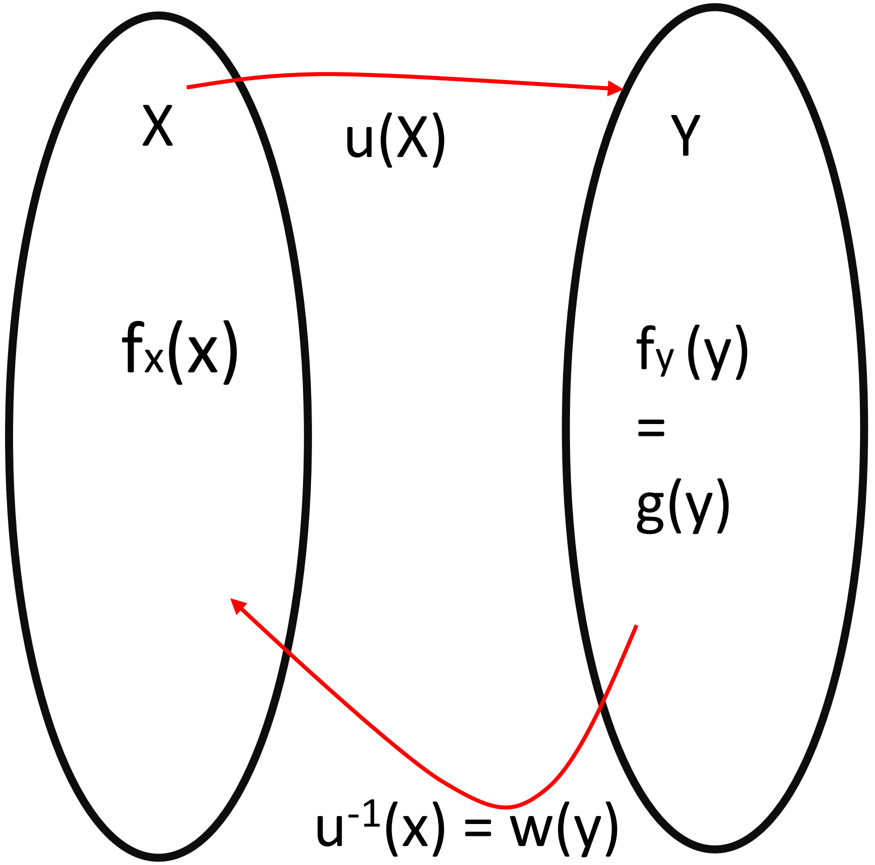
Var. acak Kontinyu

Suppose that X is a **continuous** random variable with probability distribution $f(x)$. Let $Y = u(X)$ define a one-to-one correspondence between the values of X and Y so that the equation $y = u(x)$ can be uniquely solved for x in terms of y, say $x = w(y)$. Then the probability distribution of Y is

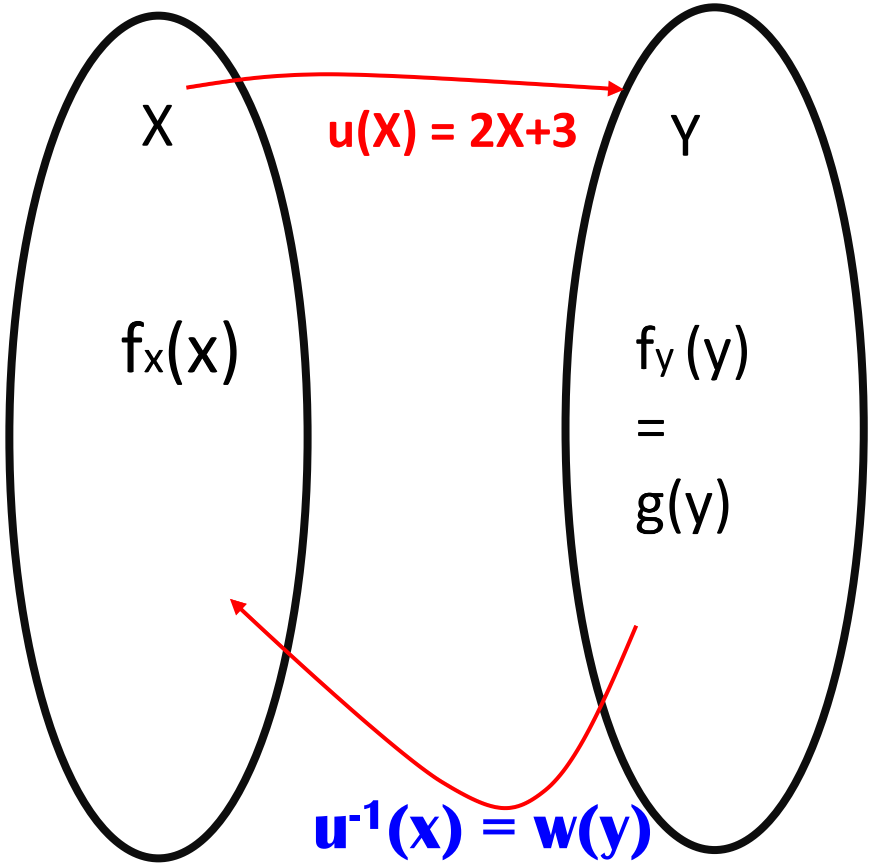
$$g(y) = f[w(y)]|J|,$$

where $J = w'(y)$ and is called the **Jacobian** of the transformation.

Bila hanya terdiri dari 1 var. acak



Contoh



Bila diketahui X adalah variable acak dengan fs distribusi prob.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{12}, & 1 < x < 5, \\ 0, & \text{Yg lain} \end{cases}$$

Tentukan fungsi distribusi probabilitas untuk var. acak $Y = 2X - 3.$

Setiap nilai $y = 2x - 3$ shg $x = (y+3)/2,$

$$J = w'(y) = dx/dy = 1/2.$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{(y+3)/2}{12}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{y+3}{48}, & -1 < y < 7, \\ 0, & \text{Yg lain} \end{cases}$$

Diketahui var. acak dg fs distr.

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|},$$

Jika $Y = X^2$

$y \in [0, \infty)$,

Tentukan fs distr. Komulatif dari var. acak Y

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \tfrac{1}{2} e^{-|x|} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x} dx \\ &= 1 - e^{-\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{y}} & y \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Contoh

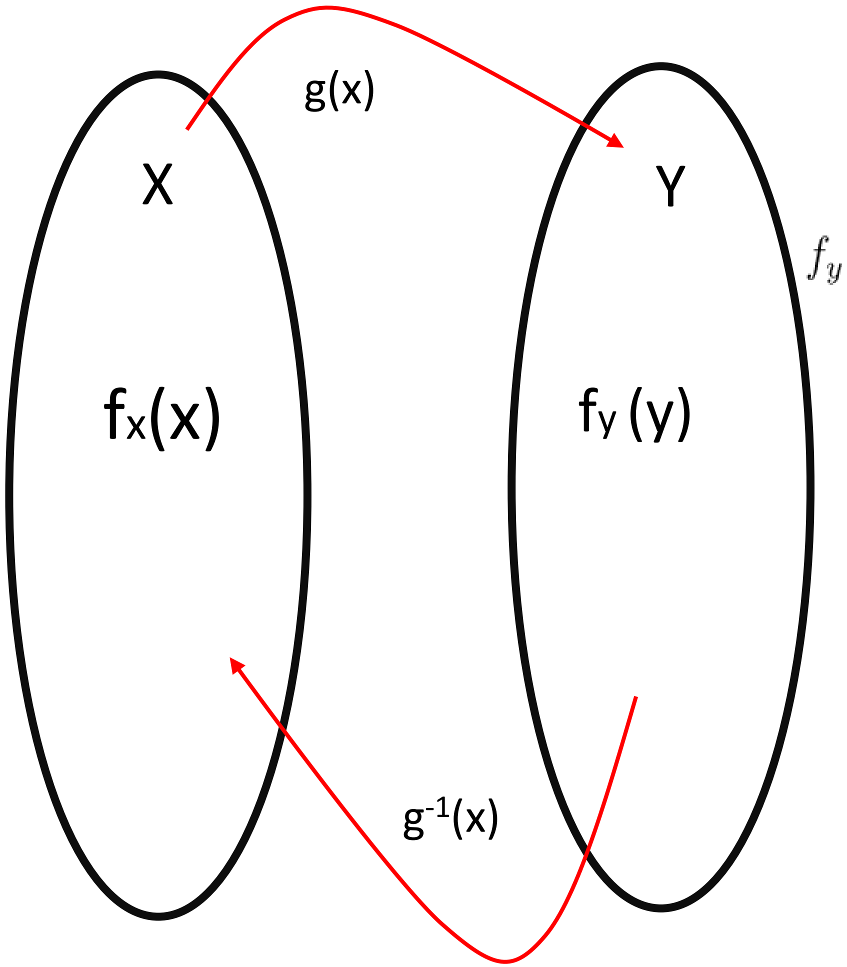
Var. acak X memp. Fs distribusi Prob:

$$f_x(x) = \tfrac{30}{4}x^2(1-x)^2 \quad , \quad 0 \le x \le 1.$$

Bila Y = X^2

$$Y = X^2 = g(x)$$
$$X = \sqrt{y} = g^{-1}(y)$$

$$\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$



Derivatif $g^{-1}(y)$

$$\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_y(y) = \tfrac{d}{dy}\, g^{-1}(y) f_x(x).$$

$$f_y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_x(\sqrt{y})$$
$$= \frac{30}{4}y(1 - 2\sqrt{y} - y)\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_y(y) = \frac{30}{8}\sqrt{y}(1 - 2\sqrt{y} - y)$$
$$= \frac{15}{4}\sqrt{y}(1 - 2\sqrt{y} - y)$$

Contoh

Let X be a continuous random variable with PDF

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2\left(2x + \frac{3}{2}\right) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

If $Y = \frac{2}{X} + 3$, find Var(Y).

Solution

First, note that

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}\left(\frac{2}{X} + 3\right) = 4\text{Var}\left(\frac{1}{X}\right),$$

Thus, it suffices to find Var$(\frac{1}{X}) = E[\frac{1}{X^2}] - (E[\frac{1}{X}])^2$. Using LOTUS, we have

$$E\left[\frac{1}{X}\right] = \int_0^1 x\left(2x + \frac{3}{2}\right) dx = \frac{17}{12}$$

$$E\left[\frac{1}{X^2}\right] = \int_0^1 \left(2x + \frac{3}{2}\right) dx = \frac{5}{2}.$$

Thus, Var$(\frac{1}{X}) = E[\frac{1}{X^2}] - (E[\frac{1}{X}])^2 = \frac{71}{144}$. So, we obtain

$$\text{Var}(Y) = 4\text{Var}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{71}{36}.$$

Contoh

Contoh

Contoh

Contoh

Contoh

Contoh

Latihan

1. Tegangan PLN diketahui berdistribusi uniform dengan diantara 210 sd 230 Volt. Bila tegangan ini mendapatkan gangguan N karena faktor cuaca yang bersifat additif, N diketahui berdistribusi uniform diantara 4 sd 6 Volt. Tentukan:

a. Mean dan standard deviasi tegangan yang ididistribusikan ke rumah rumah
b. Probabilitas tegangan pada rumah tangga lebih dari 215 Volt
c. Tentukan probabilitas tegangan pada rumah tangga bernilai antara 205 sampai dengan 225 Volt.

Latihan

2. Tegangan PLN diketahui berdistribusi uniform dengan diantara 210 sd 230 Volt. Bila tegangan ini melalui beban yang bersifat resistor murni dengan R = 1000 ohm, tentukan

a. Fungsi distribusi probabiltas dari arus pada beban
b. Fungsi distribusi daya pada beban
c. Tentukan probabilitas arus bernilai > 0.21 A

Jawab

Jawab

Tugas – diupload paling lambat 28 Okt. 2020 jam 24.00

1

Let X be a continuous random variable with PDF

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and let $Y = \frac{1}{X}$. Find $f_Y(y)$.

2

Bila X adalah var. acak kontinyu dengan fs distr. Prob:

f(x) = 3 X + 4 → untuk $1 \leq x \leq 5$

f(x) = 0 → untuk yg lain

a. Bila Y = 2 X + 5, Tentukan Mean dari X dan Y

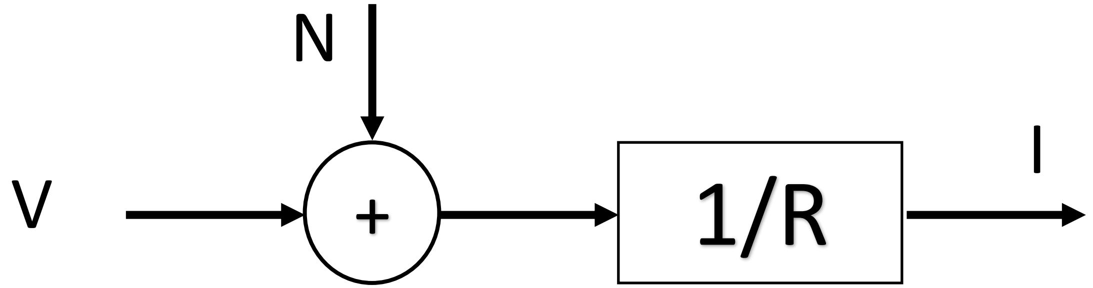
b. Tentukan var. X dan var Y

c. Tentukan fs distribusi probabilitas Y

3

Tegangan PLN diketahui berdistribusi uniform dengan diantara 210 sd 230 Volt, dan tegangan tersebut mendapatkan noise N bersifat additive berdistribusi uniform diantara 4 – 6 Volt. Bila tegangan ini melalui beban yang bersifat resistor murni dengan R = 1000 ohm, tentukan

a. Nilai rata-rata arus dan variansi arus pada beban
b. Fungsi distribusi probabiltas dari arus pada beban
c. Fungsi distribusi daya pada beban
d. Tentukan probabilitas arus bernilai > 50 A



$$P = V^2/R$$

Catat semua Informasi tambahan dari perkuliahan – online

Terimakasih