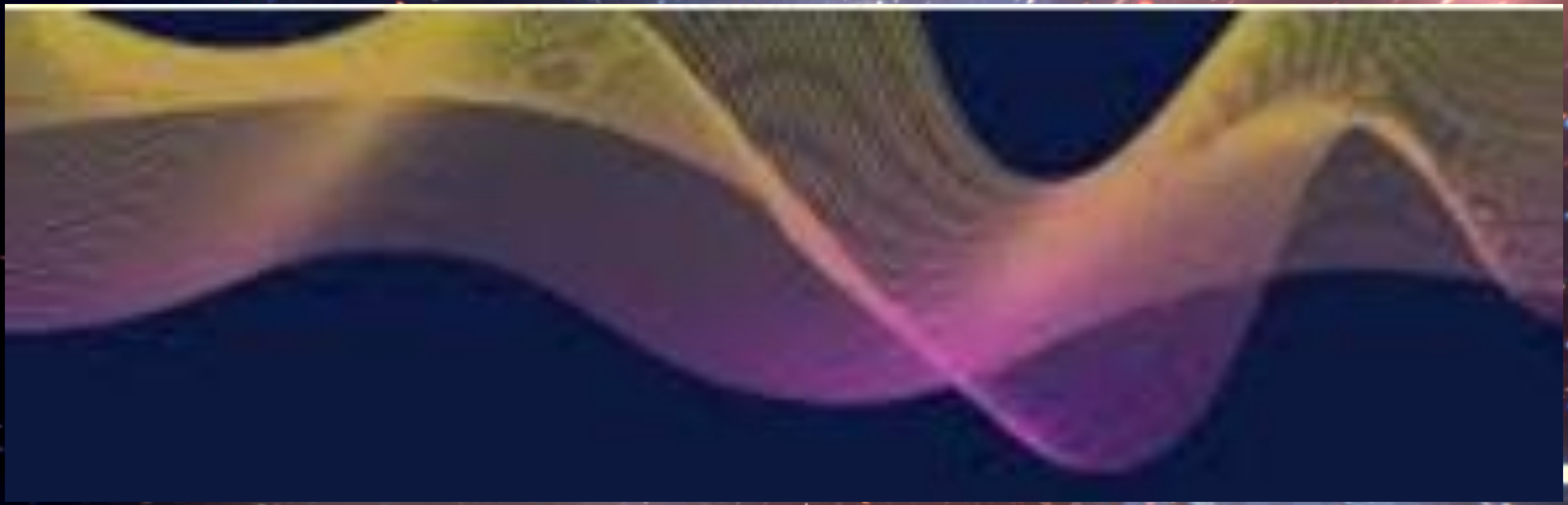
MATEMATIKA REKAYASA 1



PENYELESAIAN PD BIASA

dengan Faktor Pengintegrasi

AULIA SITI AISJAH – TEKNIK FISIKA ITS

Bagaimana mengg. Faktor Pengintegrasi?

- Misalkan *Φ* dan gunakan untuk mengalika ODE / PDB spt contoh sebelumnya

$$\frac{dy}{dt} + y = 1 \quad \Longrightarrow \quad \phi\frac{dy}{dt} + \phi y = \phi$$

- To make the LHS of this equation look like the RHS of the **Product Rule** we must choose

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi$$

Bagaimana mengg. Faktor Pengintegrasi?

- ODE menjadi $$\phi \frac{dy}{dt} + \frac{d\phi}{dt} y = \phi$$

- Gunakan rule hasil kali di sisi kiri sehingga diperoleh

$$\frac{d(\phi y)}{dt} = \phi$$

Bagaimana mengg. Faktor Pengintegrasi?

- Akan di integrasikan variable Φ
- Dan pisahkan untuk mendapatkan Φ

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi \Rightarrow \frac{d\phi}{\phi} = dt$$

$$\Rightarrow \ln\phi = t + c \Rightarrow \phi = e^{t+c}$$

$$\Rightarrow \phi = Ae^{t}$$

- Sebuah konvensi untuk menentukan $A = 1$.
- Ini terjadi pada ODE. Dan factor pengintegrasi

$$\phi = e^{t}$$

Mencari Faktor pengintegrasi

- Secara umum PD orde 1 non homogen

$$\frac{dy}{dt} + g(t)y = f(t)$$

$$y(0) = y_0$$

- Bgmn mencari factor pengintegrasi untuk memperoleh *y*?

Mencari Faktor pengintegrasi

- Step 1: Kalikan dengan *Φ:*

$$\phi\frac{dy}{dt}+\phi g(t)y=\phi f(t)$$

- Step 2: Bandingkan sisi kanan dengan **Product Rule** dan set up Kembali *Φ:*

$$\frac{d\phi}{dt}=\phi g(t)$$

- Step 3: Gukan metode pemisahan untuk mendapatkan *Φ:*

$$\frac{d\phi}{\phi}=g(t)dt$$

$$\Rightarrow \ln\phi=\int g(t)dt$$

$$\Rightarrow \phi=e^{\int g(t)dt}$$

Mencari Faktor pengintegrasi

- Step 4: Kombinasikan suku pada sisi kiri $$\frac{d[\phi\, y]}{dt} = \phi\, f(t)$$

- Step 5: Integralkan $$\phi y = \int \phi\, f dt + C$$

- Step 6: Bagi untuk mendapat nilai eksplisit *y* :

$$y = \frac{1}{\phi}\int \phi\, f dt + \frac{C}{\phi}$$

- Step 7: Gunakan nilai awal untuk evaluasi nilai C

Mencari Faktor pengintegrasi

Catatan

- Faktor pengintegrasi

$$\phi = e^{\int g(t)\,dt}$$

- ODE linier orde 1. Kedua integral $\int g(t)dt$ $\int \phi f(t)dt$

Tidak mungkin untuk dievaluasi

Contoh

$$\frac{dy}{dt} + ty = t \qquad\qquad y(0) = 0$$

Step 1: PD bentuk umum

$$\frac{dy}{dt} + g(t)y = f(t)$$

Step 2: Tentukan factor pengintegrasi

$$g(t) = t \Rightarrow \phi = e^{\int tdt}$$

$$\Rightarrow \phi = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

Contoh

Step 3: Kalikan dengan factor pengintegrasi

$$e^{\frac{1}{2}t^2}\frac{dy}{dt} + e^{\frac{1}{2}t^2}ty = te^{\frac{1}{2}t^2}$$

Step 4: Gunakan rumus balik dari **Product Rule**:

$$\frac{d[e^{\frac{1}{2}t^2}y]}{dt} = te^{\frac{1}{2}t^2}$$

Step 5: Integralkan untuk mendapatkan *y*:

$$e^{\frac{1}{2}t^2}y = \int te^{\frac{1}{2}t^2}dt + C = e^{\frac{1}{2}t^2} + C$$

$$\Rightarrow y = 1 + Ce^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Contoh

Step 6: Gunakan kondisi awal untuk mendapatkan solusi eksak:

$$y(0) = 0 \Rightarrow 1 + Ce^{0} = 0$$

$$\Rightarrow 1 + C = 0$$

$$\Rightarrow C = -1$$

Step 7: Substitusi balik untuk mendapatkan pers. Awal

$$y = 1 - e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Substitusi eksponensial

- Koefisien pada ODE homogen.

- Solusi ODE: $$y = Ce^{\lambda t}$$

Pers. Karakteristik

$$y = Ce^{\lambda t}$$

- memberikan pers turunan

$$y' = \lambda Ce^{\lambda t}$$

$$y'' = \lambda^2 Ce^{\lambda t}$$

$$y^{(3)} = \lambda^3 Ce^{\lambda t}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \lambda^n Ce^{\lambda t}$$

- Pers. Karakteristik secara aljabar

$$Ce^{\lambda t}$$

Contoh

$$y' + 5y = 0$$

Dicoba $y = Ae^{\lambda t}$

$$\lambda Ae^{\lambda t} + 5Ae^{\lambda t} = 0$$

- Hilangkan $Ae^{\lambda t}$ memberikan pers. karakteristik

$$\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -5$$

- Substitusi kembali $y = Ae^{\lambda t}$

$$\boxed{y = Ae^{-5t}}$$

Panduan Penyelesaian

Bentuk Umum	Deskripsi	Met. Peny
$$\frac{d^n y}{dt^n} = f(t)$$	▪ 1^{st} or higher order ▪ RHS does not depend on the unknown y	**Integrasi langsung**
$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) = g(t)h(y)$$	▪ 1^{st} order only	**Separasi**
$$\frac{dy}{dt} + g(t)y = f(t)$$	▪ 1^{st} order ▪ nonhomogeneous ▪ linear equation	**Metode Faktor pengintegrasi**

Panduan Penyelesaian

Bentuk Umum	Deskripsi	Met. Peny
$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$	▪ 2^{nd} order or higher ▪ homogeneous ▪ linear equation ▪ constant coefficients	
$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$	▪ 2^{nd} order or higher ▪ <u>non</u>homogeneous ▪ linear equation ▪ constant coefficients	

Solving Guide

General Form	Description	Solving Method
$$\frac{d^n y}{dt^n} + g_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + g_1(t)\frac{dy}{dt} + g_0(t)y = f(t)$$	▪ 2^{nd} order or higher ▪ nonhomogeneous ▪ linear equation ▪ variable coefficients	Can only solve a few 'special' problems **Not Covered in MM2**
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$$	▪ 2^{nd} order ▪ Function f contains t, y and y' terms all mixed up	Generally can't be solved analytically (see Module 4 for numerical methods)

Silahkan untuk Latihan scr Mandiri – soal di Buku Pustaka