Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya

PERS. DIFERENSIAL

Aulia Siti Aisjah
Teknik Fisika ITS

Pengantar

Materi

Contoh Soal

Ringkasan

Latihan

Asesmen

Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial Biasa

Definisi: Persamaan diferensial mengandung fungsi yang belum diketahui Beserta turunannya.

Contoh:.

1. $$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

2. $$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + ay = 0$$

3. $$\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 6y = 3$$

y variabel dependent dan ***x*** variabel independent, dan contoh di atas merupakan kelas Persamaan Diferensial Biasa.

Persamaan Diferensial Parsial

Contoh:

1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

u variabel dependent dan independent, dan contoh di atas merupakan persamaan diferensial parsial.

2. $$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 0$$

3. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

u variabel dependent dan ***x dan t*** variabel-variabel independent

Orde dari Persamaan Diferensial

Orde dari persamaan diferensial adalah orde dari turunan tertinggi.

Persamaan Diferensial	ORDE
$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$	1
$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 9y = 0$	2
$\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 6y = 3$	3

Derajat Turunan

Derajat turunan adalah turunan tertinggi persamaan diferensial.

Persamaan Diferensial	Derajat Turunan
$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + ay = 0$	2
$\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 6y = 3$	3
$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3 = 0$	2

Persamaan Diferensial Linier

Persamaan diferensial adalah linier, jika

1. **variabel dependent tunggal (tidak ada perkalian antara variabel dependent),**
2. **koefisien tidak bergantung dari variabel dependent.**

Contoh:

1. $$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 9y = 0.$$

linier.

Example: 2.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 6y = 3$$

non - linier karena dalam term kedua terdapat perkalian.

Example: 3. $$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} = x^3$$

non – liniear karena dalam term kedua, koefisien bergantung *y*.

Example: 4. $$\frac{dy}{dx} = \sin y$$

non – linier karena sbb; $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + -$ **adalah non – linier**

9. Table 1. Classify each differential equation

No	Differential Equations	Ordinary or Partial	Linear or nonlinear	Order	Degree	Independent variables	Dependent variables
1.	$y' = x + 6y$						
2.	$y'' = 4y + y^3$						
3.	$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} - 2y = x^3$						
4.	$y'' + 2xy' + 4y = \cos 2x$						
5.	$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{y + 4}$						
6.	$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$						
7.	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$						

Persamaan Diferensial Orde 1

1. Bentuk turunan:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

2. Bentuk diferensial:

$$(1 + x)dy - ydx = 0$$

3. Bentuk umum:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \text{atau} \qquad f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0.$$

Persamaan diferensial biasa orde 1

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = O.$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$ Derivative form

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$ Differential form

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$ Standard form

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$ Standard form

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$ First order linear differential equation form

Persamaan diferensial biasa orde 2

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}) = O.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx})$$

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$a_2(x)\acute{y} + a_1(x)\acute{y} + a_0(x)y = g(x)$$

Persamaan diferensial biasa orde -n

1. Dengan koefisien konstan.

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$$

2. Dengan koefisien variabel

$$a_n(x)\frac{dy}{dx} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^n} + ... + a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x)$$

Penyelesaian PD secara Analitis

Contoh $$\frac{dy}{dx} = 3$$

y=3x+c, adalah penyelesaian dari persamaan diferensial orde 1 dengan c_1 konstanta sembarang. Nilai c_1 bergantung dari kondisi batas sehingga solusi tersebut merupakan <u>solusi umum.</u>

Contoh

$$y' = \sin(x) \Rightarrow y = -\cos(x) + C$$

$$y'' = 6x + e^{x} \Rightarrow y' = 3x^{2} + e^{x} + C_1 \Rightarrow y = x^{3} + e^{x} + C_1 x + C_2$$

Amati bahwa penyelesaian dari orde 1 mempunyai 1 parameter, sementara pada orde 2 mempunyai 2 parameter.

Kelas-Kelas Penyelesaian

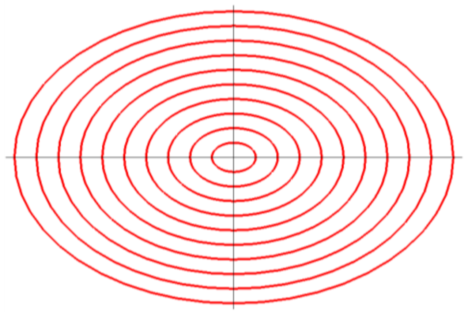
Contoh $9yy' + 4x = 0$

Solusi $\int (9yy' + 4x)\,dx = C_1 \Rightarrow \int 9y(x)y'(x)\,dx + \int 4x\,dx = C_1$

$$\Rightarrow \int 9y\,dy + 2x^2 = C_1 \Rightarrow \frac{9y^2}{2} + 2x^2 = C_1 \Rightarrow 9y^2 + 4x^2 = 2C_1$$

Ini menghasilkan $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = C$ dengan $C = \frac{C_1}{18}$.

Amati bahwa pada setiap titik (x_0, y_0), ada solusi unik dari persamaan di atas dimana kurvanya melewati titik yang ditentukan tersebut.



Solusi berada pada kelas elips.

Penyelesaian berasal dari

1. **Untuk kelas garis lurus**

$$y = c_1 x + c_2$$ persamaan diferensialnya adalah

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

2. **Untuk kelas-kelas kurva**

A. $$y = ce^{\frac{x^2}{2}}$$ persamaan diferensialnya adalah $$\frac{dy}{dx} = xy$$

B. $$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

persamaan diferensialnya adalah $$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

Aplikasi di dalam Ilmu Fisika

1. Gerak jatuh bebas

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g$$

dimana s adalah jarak atau tinggi dan g percepatan gravitasi.

2. Gerak pegas

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} = -ky$$

Dimana y adalah posisi, m adalah massa dan k konstanta pegas

3. RLC – circuit, Hukum kedua Kirchoff

$$L\frac{d^2 q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = E$$

q muatan kapacitor,
L induktansi,
c kapasitansi.
R resistansi
E tegangan

Aplikasi

1.Newton's Law of Cooling

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \left(T - T_s\right)$$

dimana $\dfrac{dT}{dt}$ adalah laju pendinginan,

$T - T_s$ adalah perbedaan suhu antara liquid 'T' dan lingkungan Ts

2. Pertumbuhan dan peluruhan

$$\frac{dy}{dt} = \kappa\ y$$

y adalah kuantitas pada saat ini

Tugas 1 – **minggu ke 9**:
CP: Mampu menjelaskan beberapa aplikasi bentuk PD dalam permasalahan bidang sains dan Teknik

1. Searching dalam bidang keilmuan Teknik Fisika, untuk aplikasi dari beberapa model PD, dengan melalui www.sciencedirect atau yang lain, yang menunjukkan sumber terpercaya bahwa PD diaplikasikan, minimal 5 buah jurnal.
2. Tuliskan ulang bentuk PD yang ada di dalam 5 jurnal tersebut, dan identifikasi masing-masing dari PD, merupakan bentuk PD linier / non liner dan berapa orde PD.
3. Tugas diketik di dalam word, beri identitas Anda.
4. Upload tugas, paling lambat **5 April 2019 jam 24.00** di share.its.ac.id

terimakasih

Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya

PERS. DIFERENSIAL

Aulia Siti Aisjah
Teknik Fisika ITS

Pengantar

Materi

Contoh Soal

Ringkasan

Latihan

Asesmen

Metode Numerik
Penyelsaian PD

Persamaan Diferensial *Separable*

Persamaan diferensial *separable* dapat didefinisikan sebagai perkalian antara fungsi x dan fungsi y.

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \qquad h(y) \neq 0$$

Contoh:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

Kalikan kedua sisi dengan dx dan bagi kedua sisi dengan y^2 untuk memisahkan variable - variabel nya (Syarat y^2 bukan nol)

$$\frac{dy}{y^2} = 2x\ dx$$

$$y^{-2} dy = 2x\ dx$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = 2x\ dx$$

$$y^{-2}dy = 2x\ dx$$

$$\int y^{-2}dy = \int 2x\ dx$$

$$-y^{-1} + C_1 = x^2 + C_2$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

Gabungan konstanta integrasi

$$-\frac{1}{x^2 + C} = y$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{x^2 + C}}$$

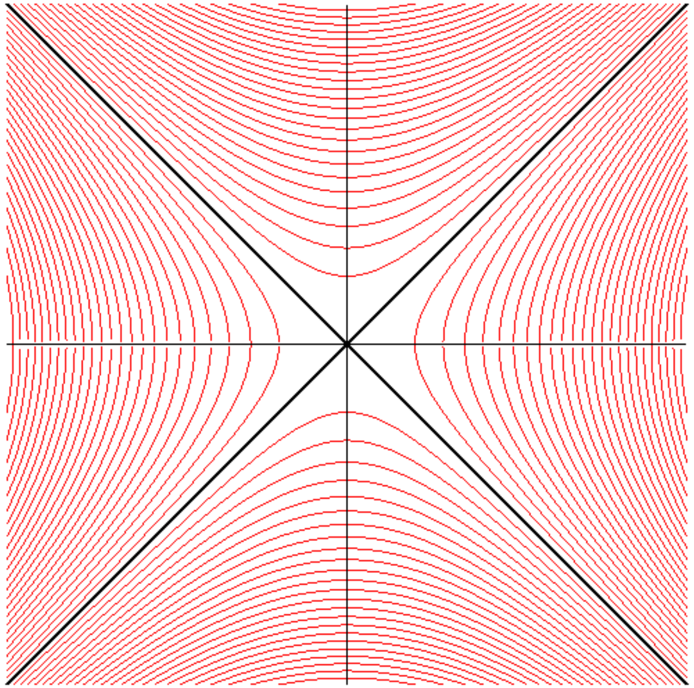
→

Solusi Umum Persamaan Diferensial

Contoh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \qquad \int y\,dy = \int x\,dx$$

$$y^2 = x^2 + C$$



Gambar disamping adalah visualisasi dari solusi persamaan diferensial di atas. Garis lurus

$y = x$ and $y = -x$

adalah solusi khusus. Solusi yang unik melalui setiap titik yang berbeda. Adapun solusi khusus melalui satu titik yang sama (origin).

Kondisi Awal

- Di dalam persoalan fisis, kita perlu untuk menentukan solusi khusus yang memenuhi kondisi awal $y(x_0)=y_0$. Masalah solusi persamaan diferensial yang memenuhi kondisi awal disebut **initial-value problem (IVP)**.
- *Contoh:* Tentukan solusi $y^2 = x^2 + C$ yang memenuhi kondisi awal $y(0) = 2$.

  $2^2 = 0^2 + C$

  $C = 4$

  $y^2 = x^2 + 4$

Contoh:

$$\frac{dy}{dx} = 2x\left(1+y^2\right)e^{x^2} \longleftarrow$$ *x* dan *y* dapat dipisah (separable)

$$\frac{1}{1+y^2}\,dy = 2x\ e^{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int 2x\ e^{x^2}\,dx$$

$$u = x^2$$
$$du = 2x\ dx$$

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int e^u\,du$$

$$\tan^{-1} y + C_1 = e^u + C_2$$

$$\tan^{-1} y + C_1 = e^{x^2} + C_2 \longrightarrow \tan^{-1} y = e^{x^2} + C$$

→

Contoh:

$$\frac{dy}{dx} = 2x\left(1+y^2\right)e^{x^2}$$

$$\tan^{-1} y = e^{x^2} + C \longleftarrow$$

Dihasilkan y sebagai fungsi implisit dari x.

$$\tan\left(\tan^{-1} y\right) = \tan\left(e^{x^2} + C\right)$$

$$\boxed{y = \tan\left(e^{x^2} + C\right)}$$

Dalam kasus di atas, kita dapat menentukan y sebagai fungsi eksplisit dari x dengan melakukan operasi tangen pada kedua sisi.

→

Hukum Pertumbuhan & Peluruhan

Sebuah populasi secara normal meningkat secara proporsional terhadap jumlahnya sekarang. Contoh lain yang meningkat atau menurun secara proporsional dengan jumlahnya diantaranya peluruhan radioaktif dan peningkatan uang dalam rekening bank berbunga.

Jika laju perubahannya proporsional dengan jumlah saat ini, maka perubahannya dapat diekspresikan sbb:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

→

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Persamaan di samping menunjukkan bahwa perubahannya (ruas kiri) proporsional terhadap jumlah saat ini (ruas kanan).

$$\frac{1}{y}dy = k\ dt$$

Bagi kedua sisi dengan *y*.

$$\int \frac{1}{y}dy = \int k\ dt$$

Integralkan kedua sisi.

$$\ln|y| = kt + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{kt+C}$$

$$|y| = e^{C} \cdot e^{kt} \longrightarrow y = \pm e^{C} e^{kt} \longrightarrow y = Ae^{kt}$$

→

Model Pertumbuhan Logistik

Populasi dalam kenyataannya tidaklah meningkat selamanya. Ada faktor batasan dalam makanan maupun ruang untuk hidup (habitat)

Sehingga ada keadaan populasi maksimum, atau carrying capacity, M.

Model yang lebih realistis adalah model pertumbuhan logistik dimana laju pertumbuhan proporsional dengan ukuran populasi saat ini *(y)* dan jumlah dimana y turun dari ukuran maksimum *(M-y)*. Sehingga model tersebut menjadi:

$$\frac{dy}{dt} = ky(M - y)$$

Dengan solusi sebagai berikut (verify yourself):

$$y = \frac{y_0 M}{y_0 + (M - y_0)e^{-kMt}}, \quad \text{dengan } y_0 = y(0)$$

Metode Numerik dalam Peny. PD, didasarkan dari penyelesaian integrasi numerik. Beberapa metode yang ada:

1. Integrasi dengan metode Trapesium
2. Integrasi dengan metode Simpson 1/3; 3/8 dst

Dll

Tugas 2:

Cari metode numerik di dalam penyelesaian Integrasi secara numerik selain yang disebutkan dalam 2 di atas, Tuliskan tahapan dalam metode tersebut dalam word

Upload tugas 2, ini paling lambat 12 April 2019, jam 24.00

Tugas akan dipresentasikan dan didiskusikan pada saat kuliah Minggu 11.

terimakasih